Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 79/80 (1922)
Heft: 11

Artikel: Trägheitskräfte und Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen
Autor: Kummer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38150

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 13.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Band 80. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 11.

Trägheitskräfte und Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen.

Elementar dargestellt von Prof. Dr. *W. Kummer*, Ingenieur, Zürich.

Die Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen, die von der Wellenverbiegung oder von der Wellenverdrehung, oder von beiden Beanspruchungen kombiniert hervorgerufen werden, sind nach der einschlägigen Literatur in der Regel aus den Differentialgleichungen der klassischen Dynamik hergeleitet. Indessen ist es für das grundlegende Schema der schwingenden Einzelmasse sowohl im Falle der Wellenverbiegung, als auch im Falle der Wellenverdrehung möglich, die Fo mel für die Eigenschwingungszahl auf elementarem Wege, gleichsam auf statischer Grundlage, rechnerisch zu ermitteln, wozu in beiden Fällen die Zentrifugalkraft der rotierenden Masse ganz oder zum Teil die Gegenkraft der in Betracht fallenden elastischen Kraft bildet. Für die Biegungserscheinung ist diese Berechnungsmethode allgemein bekannt und in die Handbücher des Ingenieurs[1]) übergegangen; für die Verdrehungserscheinung finden wir einen bezüglichen, hier näher zu erörternden Ansatz in dem kürzlich erschienenen Werke von Dr. Ing. *Hans Wydler*[2]). Mit Rücksicht auf die analogen Erörterungen zur Herleitung der jeweiligen Beziehungen, sollen beide Fälle im Folgenden zur Darstellung kommen. Als weitere, dritte Gattung von Eigenschwingungszahlen an Maschinenwellen kann man noch die aus der Längenänderung (Dehnung) von Kurbelstangen hervorgehende betrachten, wobei jedoch die bewegten Massen nicht nur Eigenschwingungen, sondern zugleich meistens auch erzwungene Schwingungen unmittelbar bewirken, die harmonischen Drehmomenten von Trägheitskräften entsprechen; statt einer Einzelwelle ist nun allerdings ein eigentliches „Getriebe", nämlich entweder das Gleitkurbelgetriebe (Schubkurbelgetriebe) oder das Parallelkurbelgetriebe, zu betrachten. Auch für diese Schwingungen die wir als „Dehnungsschwingungen" bezeichnen wollen, lassen sich die Eigenschwingungszahlen auf elementarem Wege, also ohne Zuhülfenahme von Differentialgleichungen, ermitteln, wie im Folgenden gezeigt wird.

1. *Biegungsschwingungen.* Auf die masselose Welle sei die scheibenförmige Masse m mit der sehr kleinen Exzentrizität e aufgebaut. Bei der Rotation erfährt die, gemäss der Durchbiegung f aus der Geraden verformte Welle eine als „zusätzliche" Kraft auftretende Zentrifugalkraft Z vom Betrage:

$$Z = m\,(f + e) \cdot \omega^2$$

die nach Massgabe der Biegungskonstanten c_b mit der zu f proportionalenKraft B der federnden Biegung vom Betrag

$$B = c_b\, f$$

im Gleichgewichte stehen muss, derart dass

$$m\,(f + e)\,\omega^2 = c_b\, f.$$

Die hieraus bestimmte Durchbiegung:

$$f = \frac{m\, e\, \omega^2}{c_b - m\, \omega^2}$$

wird ein Maximum, wenn der Nenner verschwindet, was für die kritische Winkelgeschwindigkeit ω_b, bezw. für die kritische Drehzahl ν_b der Eigenschwingung der Wellenverbiegung:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{c_b}{m}}, \quad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_b}{m}}$$

der Fall ist. Bekanntlich vermeidet man für numerische Rechnungen die Bestimmung der als Kraft pro Längeneinheit anzugebenden Grösse c_b und schreibt:

$$\frac{c_b}{m} = \frac{c_b\, f}{m\, f} = \frac{g}{f}$$

weil die Kraft $c_b\, f$ dividiert durch m der Beschleunigung g der Erdschwere gleichzustellen ist. Man erhält dann:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{g}{f}}, \quad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{f}}$$

Man kann auch anstelle von c_b die ihr reziproke Grösse γ_b einführen, die, ebenso wie c_b, den Elastizitätsmodul E und das Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnitts enthalten muss, und kann schreiben:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{\gamma_b\, m}}, \quad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\gamma_b\, m}},$$

welche Darstellungsform wir in einer frühern Veröffentlichung[1]) benutzten.

2. *Drehschwingungen.* Unsere zylindrisch angenommene Welle, deren Zylinder-Erzeugende $A\,B = l$ links in Abbildung 1 dem Beschauer zunächst liegt, sei am End-

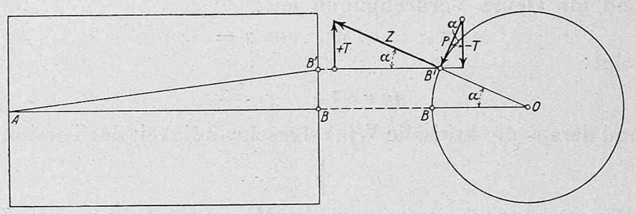

Abbildung 1.

querschnitt bei A mit einer als unendlich gross anzunehmenden Masse versehen, während der Endquerschnitt bei B die endliche Masse m aufweisen soll. Der Verdrehung entspricht der Schiebungsbogen:

$$f = B\,B'$$

für den die Festigkeitslehre die Beziehung:

$$f = M_t\, \frac{r}{c_t}$$

liefert, in der mit M_t das tordierende Moment, mit r ($= OB$ in Abbildung 1) der Wellenradius und mit c_t die Torsionskonstante bezeichnet sind. In c_t sind das polare Trägheitsmoment J_p, der Schubelastizitätsmodul G und die Länge l gemäss:

$$c_t = \frac{G\, J_p}{l}$$

enthalten, derart, dass c_t als Moment pro Bogeneinheit Deformation gemessen ist. Wir nennen die deformierende Schubkraft P und schreiben:

$$P = \frac{M_t}{r} = c_t\, \frac{f}{r^2}$$

Nach *H. Wydler*[2]) entspricht dem Schiebungsbogen f eine Trägheitskraft T, die als Komponente der Zentrifugalkraft in der Anfangsrichtung von f den Wert:

$$T = m\, a\, \omega^2$$

hat, wobei für die Bewegungsumkehr:

$$a = f$$

und

$$c_t\, \frac{f}{r^2} = m\, f\, \omega^2$$

gesetzt wird, und wobei die Auflösung nach ω den Ausdruck der kritischen Winkelgeschwindigkeit der Torsion ergibt:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{c_t}{m\, r^2}} = \sqrt{\left(\frac{G\, J_p}{r^2}\right)\frac{1}{m\, l}}$$

[1]) Vergl. Band II der «*Hütte*», sowie Band I des Taschenbuches für den Maschinenbau von *H. Dubbel*.

[2]) Vergl. unter «Literatur» auf Seite 128 dieser Nummer.

[1]) Auf Seite 147 von Band LXXII (am 12. Oktober 1918).

[2]) Seite 8 seines oben erwähnten Werkes.

Weiter wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{G\,J_p}{r^2} = H$$

und als Wellenkonstante, bezw. „Systemkonstante" benützt.

Obwohl die Darstellung von *H. Wydler* zu richtigen Resultaten führt und als Grundlage seines Berechnungsverfahrens der kritischen Drehzahlen von Mehrmassensystemen von praktisch hohem Wert ist, muss sie doch in *formaler* Hinsicht als wenig befriedigend bezeichnet werden, da sie die niemals übereinstimmende Richtung der, bei Verdrehung um einen Quadranten sogar in Quadratur stehenden Grössen P und T, die im „Umkehrpunkt" gleichgesetzt werden, vernachlässigt. Wie aus der rechten Seite von Abbildung 1 ersichtlich ist, wirkt tatsächlich beim Verdrehungswinkel α, der dem Schiebungsbogen $B\,B'$ entspricht, die Schubkraft P bei B' tangential; anderseits wirkt von B' aus die Zentrifugalkraft

$$Z = m\,r\,\omega^2$$

radial und ihre von Wydler mit T bezeichnete Komponente ist tatsächlich gleich:

$$+T = m\,r\,\omega^2 \sin\alpha$$

und kann nur von:

$$P\cos\alpha = \left(c_t\,\frac{f}{r^2}\right).\quad \cos\alpha = -T$$

im Gleichgewicht gehalten werden. Wir haben somit die Beziehung:

$$m\,r\,\omega^2 \sin\alpha = c_t\,\frac{f}{r^2}\cos\alpha.$$

Mit Rücksicht auf: $f = r\,\alpha$

und für kleine Verdrehungen mit:

$$\sin\alpha = \sim\alpha;\quad \cos\alpha = \sim 1$$

folgt:

$$m\,r\,\omega^2\,\alpha = c_t\,\frac{r\,\alpha}{r^2}$$

und daraus die kritische Winkelgeschwindigkeit der Torsion:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{c_t}{m\,r^2}}\,.$$

Wir setzen noch statt $(m\,r^2)$ das Massenträgheitsmoment Θ und geben neben ω_t weiter noch die kritische Drehzahl ν_t der Eigenschwingung an und erhalten:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{c_t}{\Theta}}\,;\quad \nu_t = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{c_t}{\Theta}}$$

Indem wir noch anstelle von c_t die ihr reziproke Grösse Γ einführen, erhalten wir die von uns in einer frühern Veröffentlichung bevorzugte[1]) Darstellungsform:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\,\Theta}}\,;\quad \nu_t = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{\Gamma\,\Theta}}$$

Unserer Ableitung kann man, wie übrigens den meisten Sätzen über Torsionsfestigkeit, vorwerfen, dass sie zunächst nur für kleine Winkel α zutreffen; jedoch muss sie in formaler Hinsicht als korrekt bezeichnet werden.

3. Dehnungsschwingungen. Statt der einfachen Maschinenwelle betrachten wir nun das Kurbelgetriebe, das entweder zwischen zwei parallelen Wellen als „Parallelkurbelgetriebe", oder zwischen einer drehenden und einer geradlinigen Bewegung als „Gleitkurbelgetriebe" wirkt, wobei als einzige Elastizität diejenige der Stangen-Dehnung in Betracht falle, wofür mit:

$$\gamma = \frac{1}{c}$$

die im Längenmass gemessene Deformation pro Einheit der Zug- oder Druckkraft in den Stangen eingeführt sei. Beim Einmasse-System nach Abbildung 2 hat die Gleichsetzung der kinetischen Energie $\left(\frac{m\,v^2}{2}\right)$ und der potentiellen Energie (von der Form: Kraft mal Weg) mit Rücksicht auf:

$$v = x\,\omega$$

und mit Rücksicht auf den Mittelwert $\frac{c\,x}{2}$ der elastischen Kraft, deren Deformationsweg x ist, die Form:

$$\frac{m\,(x\,\omega)^2}{2} = \frac{c\,x}{2}\,x$$

1) Auf Seite 147 von Band LXXII (am 12. Oktober 1918).

woraus das der Eigenschwingungszahl entsprechende ω mit

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\gamma\,m}}$$

bezw. die Eigenschwingungszahl ν mit:

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{\gamma\,m}}$$

folgt. Beim Zweimassen-System nach Abbildung 3 bestehen zwei simultane Energiegleichungen:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m_1\,(x_1\,\omega)^2}{2} = \dfrac{c\,(x_1 + x_2)}{2}\,x_1 \\[2ex] \dfrac{m_2\,(x_2\,\omega)^2}{2} = \dfrac{c\,(x_1 + x_2)}{2}\,x_2 \end{array}\right.$$

weil die elastische Kraft, die pro Längeneinheit gleich ist der Konstanten:

$$c = \frac{1}{\gamma}$$

die Gesamtdehnung, die durch die Wegsumme $x_1 + x_2$ gemessen wird, hervorruft. Die Summierung der Energiegleichungen liefert:

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\left(m_1 + m_2\,\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{2}{2}\,c\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)$$

während aus dem Quotienten der Energiegleichungen:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

folgt. Setzt man diesen Wert in die vorherige Gleichung ein, so folgt aus:

$$\omega^2\,(m_1 + m_1) = 2\,c\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

das der Eigenschwingungszahl entsprechende ω mit:

$$\omega = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{\gamma\,m_1\,m_2}}$$

bezw. die Eigenschwingungszahl ν mit:

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{\gamma\,m_1\,m_2}}$$

die wir in frühern Veröffentlichungen benutzten[1]).

Es mag bemerkt werden, dass für die Kurbelgetriebe, die einem der Schemata nach Abbildung 2 oder 3 entsprechen, auch die, aus den harmonischen Drehmomenten der Trägheitskräfte hervorgehenden, erzwungenen Schwingungen elementar erhältlich sind, deren Ordnung, bezw. deren Verhältnis „Frequenz zu Drehzahl" allgemein Zahlenwerten aus der ganzzahligen Reihe: 1, 2, 3, 4... entspricht[2]).

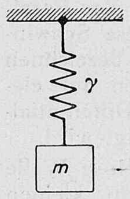

Abb. 2.

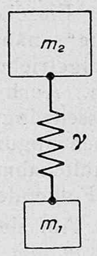

Abb. 3.

Man erkennt aus dem Auftreten solcher erzwungener Schwingungen, dass die Trägheitskräfte demnach für die „Getriebe", die „Dehnungsschwingungen" hervorrufen, wesentlich verwickeltere Erscheinungen zeitigen, als für gewöhnliche, nur auf Biegung oder Drehung beanspruchte Maschinenwellen, für die die Trägheitskräfte nur zu Eigenschwingungszahlen führen[3]). Glücklicherweise kennt und verwendet die Technik aber auch Getriebe, die sich hinsichtlich der Schwingungen nicht anders, als die gewöhnlichen Maschinenwellen verhalten.

Diplom-Arbeiten an der Architektenschule der E. T. H.

(Schluss von Seite 112)

In Ergänzung der in letzter Nummer vorgeführten Entwürfe der Klasse Gull lassen wir hier einige Beispiele von diesjährigen Diplom-Arbeiten der Klasse Moser folgen. Wie bereits bemerkt, lag dieser Aufgabe ein Katasterplan mit Höhenkurven des Gebietes zwischen Burghölzli und

1) Seite 68 von Band LXVI (7. August 1915), sowie Seite 147 von Band LXXII (12. Oktober 1918).

2) Dass die Berücksichtigung weiterer Elastizitäten, als der in den Stangen allein angenommenen, und dass die Berücksichtigung von Lagerspiel komplizierend wirkt, wobei auch die Eigenschwingungszahl beeinflusst wird, möge mit Rücksicht auf Vollständigkeit bemerkt werden.

3) Wenigstens im Rahmen rein elementarer Betrachtung.