Inhaltsverzeichnis

Band 84. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 24.**

Zur Schwingungslehre.

Von Prof. Dr. E. Meissner, Zürich.

(Schluss von Seite 276.)

Eigenschwingungen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

Ueber dieses Thema habe ich in dieser Zeitschrift (Bd. 72, Nr. 11, vom 14. September 1918) einen Aufsatz I[1]) veröffentlicht. Es handelte sich im wesentlichen um Vorgänge, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t) \cdot x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

genügen, wobei $P(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist:

$$P(t+T) \equiv P(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Sie treten bei schwingenden Systemen dann auf, wenn die elastische Kraft die die Schwingung verursacht, nicht konstante, sondern periodisch pulsierende Intensität P besitzt. Mein Aufsatz bezweckte, die neuen Begriffe, die den Vorgang kennzeichnen, scharf zu fassen. Insbesondere hatte ich darauf hingewiesen, dass es unendlich viele Zonen für den Wert T der Pulsationsperiode gibt, für die der Schwingungsvorgang instabil ist, indem die Ausschläge ins Unendliche wachsen. Ich hatte eine kurze Andeutung auf die Berechnungsmethoden für die Instabilitätszonen gemacht, wie sie die astronomische Störungstheorie entwickelt hat [2]) und hatte schliesslich ein dem dort im Vordergrund stehenden technischen Problem angepasstes Beispiel konstruiert.

Von den Arbeiten, die an diesen Aufsatz anknüpften, muss ich hier zwei Aufsätze erwähnen, die Herr *L. Dreifus* veröffentlicht hat [3]), und die in der Folge unter II, bezw. III zitiert werden. Sie enthalten ausser einer Näherungstheorie zur Berechnung der Instabilitätszonen auch theoretische Betrachtungen, die angeblich die Theorie vertiefen sollen, während sie nach meiner Ansicht nur geeignet sind, Verwirrung zu stiften. In der spätern Arbeit III sind diese Betrachtungen freilich auf einen einleitenden Abschnitt beschränkt und etwas vorsichtiger gefasst, so dass ich mich hauptsächlich an sie halten werde, um meine Bemerkungen anzubringen. — Verwahren möchte ich mich gegen die Art, wie Herr Dreifus meine Ausführung wiedergibt.

Zunächst stiftet der Verfasser grosse Verwirrung, indem er den Ausdruck „periodisch" in einem unwissenschaftlichen und unzulässigen Sinn verwendet. Er nennt nämlich „periodisch" eine jede Funktion [4]), die „in gleichen Intervallen durch Null geht, gleichgültig nach welchem Gesetz ihre Amplituden anwachsen oder abklingen". Nur so wird verständlich, dass er in II behauptet, ich hätte nachgewiesen, dass die Schwingungen in der Instabilitätszone periodisch seien [5]). Uebrigens ist nicht einmal diese Aussage korrekt. Es gibt im instabilen Falle wohl zwei „periodische" Integrale X_1, X_2 von (16), aber das allgemeine Integral $c_1 X_1 + c_2 X_2$ ist es im allgemeinen nicht, da die Summe zweier im Dreifus'schen Sinne periodischer Funktionen im allgemeinen nicht periodisch ist.

Indessen bekommen gewisse Stellen der Dreifus'schen Ausführungen doch wieder nur dann einen Sinn, wenn man annimmt, er verstehe manchmal unter periodischer Funktion dann doch wieder dasselbe, was andere Leute auch, nämlich eine Funktion, die der Identität (17) genügt, die also in ihrem ganzen Verlauf im allgemeinen durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden kann.

Diese Zweideutigkeit, gerade an kritischen Stellen, macht es schwer, den genauen Sinn der Behauptungen von Dreifus zu fassen. Ein Beispiel:

Ich hatte betont, dass der Begriff Eigenfrequenz für diese Art von Schwingungen keinen Sinn mehr hat. Herr Dreifus führt eine mittlere Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ein, die aus

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{|P(t)|}\, dt$$

zu berechnen ist. Das ist natürlich erlaubt. Es bleibt indessen völlig dunkel, was es bedeuten soll, wenn er in III, S. 93 inmitten grundlegender Ueberlegung sagt: „Nun liegt aber die Eigenfrequenz des Systems stets in der Nähe von $\frac{1}{T_0}$."

Herr Dreifus ist bestrebt, die Vorgänge vom Standpunkt der bekannten Schwingungslehre aus „verständlich" zu machen. Er will also die Lösungen von (16) an jene von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anknüpfen. Soweit es sich um Integral-Eigenschaften wie Schwingungsdauer usw. handelt, muss dieser Versuch natürlich missglücken. Er geht von der Gleichung

$$\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + \frac{d \lg P}{d\vartheta} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} + \omega_0^2 x = 0 \quad \big(P(\vartheta+T) = P(\vartheta)\big) \quad (18)$$

aus, die durch eine bekannte Transformation [1]) aus (16) entsteht. Er deutet sie als Bewegungsgleichung eines gewöhnlichen elastischen Systems mit periodisch veränderlichem Dämpfungsfaktor, übersieht aber jetzt, dass eine solche „Dämpfung", die gelegentlich auch eine „Anfachung" ist, in sehr verwickelter Weise den Vorgang beeinflusst. Bei gewöhnlicher Dämpfung bleibt der Abstand der Nulllagen unveränderlich, hier nicht, ja er ist hier sogar für verschiedene Anfangsbedingungen verschieden.

Alles dies ergibt sich sofort aus der Struktur der Integrale von (16) bezw. (18). Nach I gibt es zwei Lösungen mit den Eigenschaften

$$X_1(\vartheta + T) \equiv \lambda X_1(\vartheta) \qquad X_2(\vartheta + T) \equiv \frac{1}{\lambda} X_2(\vartheta) \quad (19)$$

wo λ eine im instabilen Falle reelle Grösse ist. Setzt man noch $\frac{1}{T} \lg |\lambda| = \alpha$, so kann man diese Lösungen in der Form anschreiben

$$X_1(t) = e^{\alpha\vartheta} \cdot p_1(\vartheta) \qquad X_2(t) = e^{-\alpha\vartheta} p_2(\vartheta)$$

und es sind alsdann p_1 und p_2 periodische Funktionen, die im instabilen Fall die Periode T oder $2T$ besitzen. Bei den gewöhnlichen Schwingungen mit Dämpfung hat man allerdings ähnlich gebaute Lösungen, aber der Exponentialfaktor ist dort bei beiden derselbe. Er hat somit dort auf die Nullstellen der allgemeinen Lösung $c_1 X_1 + c_2 X_2$ gar keinen Einfluss. Ganz anders hier, wo die Nullstellen aus

$$e^{2\alpha\vartheta} = -\frac{c_2}{c_1} \frac{p_2(\vartheta)}{p_1(\vartheta)}$$

bestimmt werden, also weder aequidistant, noch unabhängig von den Anfangsbedingungen ausfallen.

Herr Dreifus geht bei seiner grundlegenden Betrachtung in III, S. 92, anknüpfend an Gleichung (18), von der Energiestreuung während einer Pulsationsperiode aus, die durch

$$E_{0T} = \frac{\omega_0^2}{P(0)} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{d \lg P}{d\vartheta} \cdot d\vartheta \qquad (20)$$

[1]) Die Arbeiten werden im Text unter römischen Ziffern zitiert.

[2]) Ausführliche Literaturzitate z. B. in *Poincaré:* Les nouvelles méthodes de la Méchanique céleste (1893) Bd. III, S 250 ff.

[3]) II. *L. Dreifus:* Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. „Archiv für Elektrotechnik", 12. Band, S. 38, (1923). — III. Unter gleichem Titel in „Beiträge zur Technischen Mechanik und Technischen Physik" (Festschrift für August Föppl), Berlin 1924. [Angekündigt in Bd. 65, S. 142, Red.]

[4]) Nach brieflicher Mitteilung.

[5]) II. 1. Abschnitt.

[1]) Die Transformation ist durch Formel (21) gegeben.