

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 93/94 (1929)
Heft: 5

Artikel: Ueber Fourier-Reihen
Autor: Lieberherr, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43387>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

certitude de ses résultats en faisaient pour les autres sciences un modèle à imiter, un idéal à poursuivre; elles s'efforcent à l'envi de sortir de la période purement qualitative, d'introduire la mesure, c'est à dire la quantité, de rechercher les relations numériques entre les grandeurs dont elles s'occupent. Même dans les sciences plus voisines de l'observation pure et simple, la déduction tend à jouer un rôle de plus en plus important, déduction, cela va sans dire, fondée sur l'expérimentation et l'expérience.

La mathématique est à la fois un instrument et une discipline, un instrument d'une merveilleuse puissance, mais aussi une discipline incomparable. Les uns la considèrent surtout comme un moyen. C'était le cas de Fourier par exemple. Comme il reprochait à ses illustres confrères Abel et Jacobi de ne pas s'occuper de préférence du mouvement de la chaleur, ce dernier répondit à Legendre en ces termes: il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde. Les deux tendances dont nous parlons sont affaire de tempérament, beaucoup plus que de raisonnement; elles sont légitimes toutes deux à condition de ne pas s'exclure l'une l'autre. Mais faire de la mathématique uniquement l'auxiliaire ou la servante des sciences de la nature, c'est la mutiler, en méconnaître le véritable caractère. Chaque mathématicien a ses préférences, mais il n'a aucun titre à les imposer à autrui, l'esprit souffle où il veut. Comme le remarque Picard, la dépendance a toujours été intime entre la science pure et la science appliquée; elles réagissent constamment l'une sur l'autre, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, la pratique conduisant ici à la spéculation, tandis que la théorie a été ailleurs l'origine de recherches pratiques. La théorie apparaît de plus en plus comme le germe fécond d'où sortent la plupart des progrès dans l'industrie. La source tarirait promptement si un esprit exclusivement utilitaire venait à dominer dans nos sociétés.

Et maintenant, quels bénéfices peut-on attendre d'une science si haut prise? Le principal à mon sens est de nous donner de bonnes habitudes d'esprit, de fortifier en nous la raison et le jugement, de nous doter d'un bon sens lucide et clairvoyant qui consiste à ne pas se payer de mots et d'apparences, à voir les idées sans les mots et les choses sans les idées. L'étude des mathématiques, par leur rigueur et leur exactitude, nous contraint, bon gré mal gré, à nous exprimer avec netteté et précision, elle nous apprend le respect de la vérité. L'enseignement des mathématiques est très propre à faire sortir l'auditeur du régime de la passivité, à le mettre en mesure de pratiquer une méthode, de découvrir un fait, une notion, une idée, à lui donner confiance dans ses propres forces en lui faisant résoudre, seul et sans secours, des problèmes à sa portée, à éveiller ainsi chez lui le sens de l'invention. Il développe aussi à un haut degré l'esprit critique. Pasteur disait: ayez le culte de l'esprit critique. Réduit à lui seul il n'est ni un éveillé d'idées, ni un stimulant de grandes choses. Sans lui tout est caduc, il a toujours le dernier mot. Nulle science n'est plus capable que la mathématique d'exalter le goût d'être soi-même, de se développer en toute indépendance. Aucune n'est plus négative du principe d'autorité dans l'ordre intellectuel. Nulle part le témoignage d'un savant réputé n'a moins de poids en l'absence d'une preuve rigoureuse. En mathématiques, dit le géomètre français Denjoy, la grandeur d'une époque se mesure à son indifférence à l'égard de la tradition. Une science qui développe chez celui qui la cultive une pareille autonomie mérite la couronne que lui tressait l'illustre Gauss en l'appelant la reine des sciences.

Mais ne soyez pas exclusifs, ne vous enfermez pas dans un cercle trop restreint de préoccupations, la spécialité vous saisira toujours assez tôt. Vous êtes des hommes du temps présent; pour le comprendre, pour se rendre compte de ses besoins et de ses aspirations, il est nécessaire d'avoir

une idée au moins sommaire de l'évolution de l'humanité et des étapes qu'elle a franchies. D'autre part la vie et l'action vous proposeront sans cesse des problèmes qui exigent une solution rapide, et la science avec ses méthodes sûres mais lentes est loin d'y suffire. L'intuition a donc sa place très considérable dans la vie réelle, et une intelligence qui en serait dépourvue serait singulièrement désarmée dans le combat de la vie. Aussi la connaissance de l'histoire et des littératures est-elle le complément obligé d'une éducation à base scientifique. Vos programmes, je le sais, sont très chargés, mais une sage économie de votre temps et une bonne méthode de travail vous permettront, sans efforts au-dessus de vos forces, de mener de front ces deux genres d'études, pour peu que vous le vouliez.

La plupart d'entre vous étudient les mathématiques non pour elles-mêmes, mais en vue de leurs applications. Or on peut les étudier, même quand on les considère comme un simple moyen, dans un esprit désintéressé, autrement que par les lunettes de ceux qu'en allemand on désigne par le terme expressif de „Brotstudenten“. Le vaste monde des vérités mathématiques édifié par des millions de chercheurs et par quelques hommes de génie a sa beauté propre comme toute œuvre de foi et d'amour. J'espère qu'à fréquenter ce temple auguste vous aurez, ne fût-ce qu'une au deux fois, cette sorte de frisson qu'on éprouve à la vue d'un beau spectacle, ou à la lecture d'un beau poème, ou à l'audition d'un beau concert, et je puis vous assurer qu'alors vous garderez du temps de vos études un souvenir inoubliable. C'est, Messieurs les étudiants, ce que souhaite, de tout son cœur, votre vieux maître, au moment de vous quitter.

Ueber Fourier-Reihen.

Von HANS LIEBERHERR, Ingenieur, Zürich.

In neuerer Zeit gewinnen infolge der weitgehenden Untersuchung erzwungener Schwingungsvorgänge die Zerlegungen graphisch gegebener Funktionen in ihre Fourier-Komponenten erhöhtes Interesse. Im folgenden wird auf Grund einer vektoriellen Deutung der Koeffizientengleichungen ein graphisches Verfahren zur harmonischen Analyse entwickelt, das sich durch Mindestmass an Rechenarbeit, Uebersichtlichkeit in der Anwendung, Bestimmung von a_λ und b_λ durch einen einzigen Rechnungsgang als Komponenten des Schlussvektors R_λ kennzeichnet.

Setzt man für eine periodische Funktion f von der Periode 2π des Argumentes x die Reihe an

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_\lambda \cos \lambda x + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_\lambda \sin \lambda x + \dots$$

so ergeben sich bekanntlich die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots a_\lambda \dots b_1, b_2 \dots b_\lambda \dots$ zu

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \lambda x \, dx$$

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x \, dx$$

a_0 ist gleich der mittleren Höhe der zu untersuchenden Kurve.

Fasst man jetzt a_λ und b_λ als die rechtwinkligen Komponenten eines Vektors R_λ auf, so lässt sich in komplexer Form schreiben

$$R_\lambda = a_\lambda + i b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \{\cos \lambda x + i \sin \lambda x\} \, dx$$

oder mit $\cos \lambda x + i \sin \lambda x = e^{i\lambda x}$

$$R_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{i\lambda x} \, dx \quad \dots \quad (A)$$

Die Lösung dieses Integrals geschehe durch eine Differenzenmethode in der Weise, dass man sich die Kurve durch eine Treppenlinie ersetzt denkt, sodass jeweils innerhalb einer Stufe $x_{k-1} < x < x_k$ $f(x)$ als konstant betrachtet werden darf mit dem Mittelwert f_{km} (Abb. 1). Das Integral schreibt sich dann:

$$R_\lambda = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{x_1} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i\lambda x} dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) e^{i\lambda x} dx + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n f_{km} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{i\lambda\pi} \sum_{k=1}^n f_{km} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}]$$

und es wird sich jetzt wesentlich darum handeln, die Summenglieder

$$r_k = f_{km} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}]$$

zu bestimmen, die dann in beliebiger Reihenfolge geometrisch zu addieren sind. Abbildung 2 zeigt die Bildung eines solchen Teilvektors.

Das Verfahren ist jedoch noch einer wesentlichen Verbesserung fähig. Zu diesem Zwecke werde die Grundgleichung (A) partiell integriert.

$$R_\lambda = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\lambda} f'(x) e^{i\lambda x} dx$$

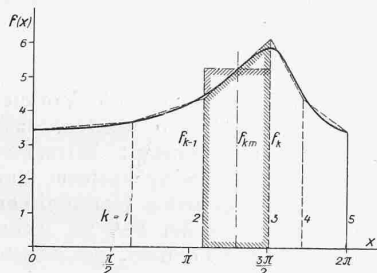


Abbildung 1.

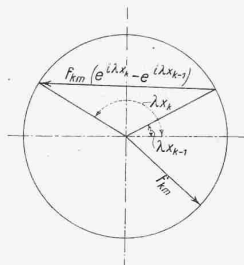


Abbildung 2.

Das erste Glied verschwindet für den technisch immer zutreffenden Fall, dass $f(2\pi) = f(0)$ ist, sodass also R_λ auch als

$$R_\lambda = \frac{i}{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{i\lambda x} dx \quad \dots \quad (B)$$

dargestellt werden kann.

Unterteilt man auch hier wieder in einzelne Intervalle, so folgt

$$R_\lambda = \frac{i}{\pi\lambda} \left[\int_0^{x_1} f'(x) e^{i\lambda x} dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) e^{i\lambda x} dx + \dots \right]$$

und indem man $f'(x)$ für ein solches Intervall konstant hält

$$R_\lambda = \frac{i}{\pi\lambda} \sum_{k=1}^n f'_{km} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\lambda x} dx$$

$$= \frac{i}{\pi\lambda} \sum_{k=1}^n f'_{km} \frac{1}{i\lambda} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}] =$$

$$\frac{1}{\pi\lambda^2} \sum_{k=1}^n f'_{km} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}]$$

wo wiederum mit $r'_k = f'_{km} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}]$

$$R_\lambda = \frac{1}{\pi\lambda^2} \sum_{k=1}^n r'_k$$

Dieses Vorgehen bedeutet, dass an Stelle der Rechtecksannäherung von vorher eine Annäherung durch Trapeze gesetzt wird, die sich naturgemäss bedeutend besser an die vorgegebene Kurve anschmiegen und damit eine entsprechend bessere Annäherung erwarten lassen. Man erkennt auch, dass die Werte von

$$f'_{km} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

für alle Harmonischen nur einmal berechnet zu werden brauchen, da sich die Ordnungszahl der harmonischen

Komponenten nur in der Vektorenfolge $e^{i\lambda x_k}$ ausdrückt. Ausserdem liefert dieses Verfahren im Gegensatz zur ersten Methode R_λ direkt in richtiger Lage.

Praktisch wird man so vorgehen, dass man das Diagramm möglichst günstig in Trapeze aufteilt und für diese die Tangentenwerte f'_{km} bestimmt. Diese Grössen werden als Radien auf den durch die Einheitsvektoren $e^{i\lambda x_k}$ festgelegten Richtungen abgetragen und die Differenzvektoren r'_k gebildet. Deren vektorielle Summe ergibt den Endvektor, woraus durch Division mit $\pi\lambda^2$ die gesuchte harmonische Komponente R_λ folgt.

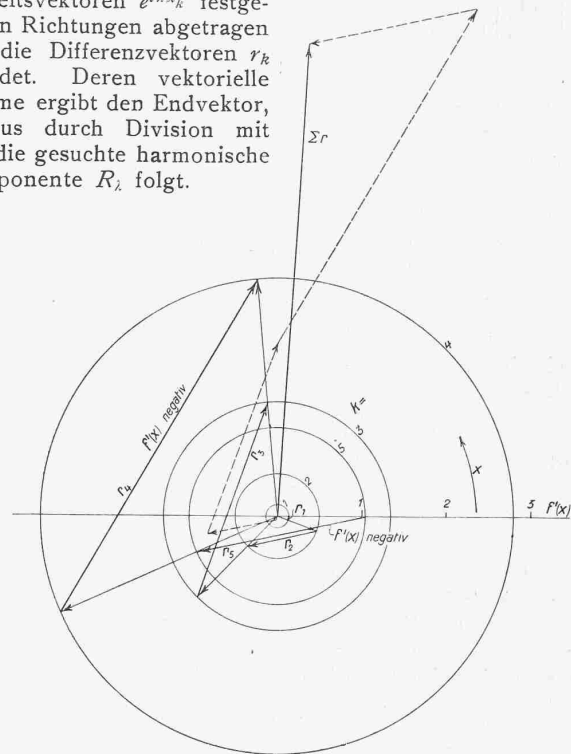


Abbildung 3.

Für die Kurve nach Abbildung 1 erhält man zum Beispiel für die dritte Harmonische, $\lambda = 3$:

h	0	1	2	3	4	5
x	0	1,98	3,41	4,72	5,39	6,28
$3x$	0	5,94	10,23	14,22	16,17	18,84
$3x - 2\pi n$	0	5,94	3,94	1,66	3,61	0
$\ln 0$	0	340	225,5	95,1	204	0
$f(x)$	3,45	3,70	4,40	6,20	4,38	3,45
$\Delta f(x)$	0,25	0,70	1,80	-1,82	-0,93	
Δx	1,98	1,43	1,33	0,65	0,89	
$f'(x)$	0,126	0,488	1,35	-2,80	-1,045	

Die Durchführung der Konstruktion ist in Abbildung 3 dargestellt. Darnach stellt sich der Endvektor dar als

$$5,60 e^{i86,5^\circ \frac{\pi}{180}}$$

$$\text{und damit } R_3 = \frac{5,60}{\pi 3^2} e^{i86,5^\circ \frac{\pi}{180}} = 0,198 e^{i86,5^\circ \frac{\pi}{180}}$$

Die Fourier-Koeffizienten a_3 und b_3 sind bestimmt als

$$a_3 = 0,198 \cos 86,5^\circ = 0,0121$$

$$b_3 = 0,198 \sin 86,5^\circ = 0,1976$$

Zur Bestimmung höherer Harmonischer wird man vorteilhaft die Teilung nicht mehr beliebig wählen, sondern das Intervall in Streifen gleicher Breite zerlegen. Wählt man deren Anzahl gleich der Ordnungszahl, so erkennt man leicht, dass für diesen Fall R_λ verschwindet; bei 2λ Teilen ergeben sich nur reelle Werte der harmonischen Komponente und erst bei Einteilung in 4λ Intervalle erhält man wieder komplexe Werte für R_λ , sodass erst von hier ab die Genauigkeit als genügend angesprochen werden kann.

Es ist jetzt $x_k - x_{k-1} = \frac{2\pi}{4\lambda} = \text{konstant}$, $x_k = k \frac{2\pi}{4\lambda}$ und somit der Teilvektor:

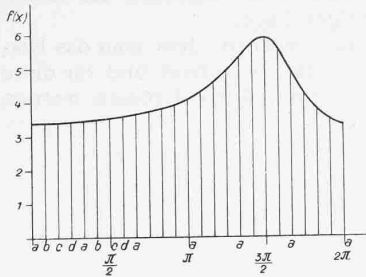


Abb. 4.

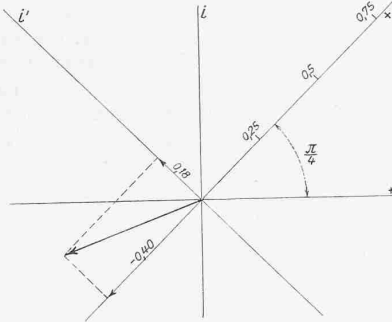


Abb. 5.

$$\begin{aligned} r_k &= f'_{km} [e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}] \\ &= \frac{f_k - f_{k-1}}{\frac{2\pi}{4\lambda}} [e^{i\lambda k \frac{2\pi}{4\lambda}} - e^{i\lambda (k-1) \frac{2\pi}{4\lambda}}] \\ &= \frac{2\lambda}{\pi} (f_k - f_{k-1}) e^{i\frac{k\pi}{2}} [1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}] \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $1 - e^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 - (-i) = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ sodass

$$r_k = \frac{2\lambda}{\pi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (f_k - f_{k-1}) e^{i\frac{k\pi}{2}}$$

und

$$R_\lambda = \frac{1}{\pi \lambda^2} \sum r_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \lambda} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=1}^n (f_k - f_{k-1}) e^{i\frac{k\pi}{2}}$$

Die Multiplikation mit $e^{i\frac{\pi}{4}}$, die einer Verdrehung um 45° in positiver Richtung entspricht, wird vorteilhaft von Anfang an in der Weise berücksichtigt, dass das Koordinatensystem, in dem die Summe bestimmt werden soll, entsprechend gedreht wird. In dieser letzten ist nun für

$$\begin{aligned} k_a &= 0,4,8, \dots, 4n & e^{ik\frac{\pi}{2}} &= 1 \\ k_b &= 1,5,9, \dots, 4n-1 & e^{ik\frac{\pi}{2}} &= i \\ k_c &= 2,6,10, \dots, 4n-2 & e^{ik\frac{\pi}{2}} &= -1 \\ k_d &= 3,7,11, \dots, 4n-3 & e^{ik\frac{\pi}{2}} &= -i \end{aligned}$$

Demgemäss stellt sich die Summe dar als

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4\lambda} &= \sum (f_{ka} - f_{ka-1}) - \sum (f_{kc} - f_{kc-1}) \\ &+ i [\sum (f_{kb} - f_{kb-1}) - \sum (f_{kd} - f_{kd-1})] \end{aligned}$$

wobei aber offenbar

$$\begin{aligned} f_{ka-1} &= f_{kd} & f_{kc-1} &= f_{kb} \\ f_{kb-1} &= f_{ka} & f_{kd-1} &= f_{kc} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4\lambda} &= \sum (f_{ka} + f_{kb}) - (f_{kc} + f_{kd}) \\ &+ i \sum (f_{kb} + f_{kc}) - (f_{kd} + f_{ka}) \end{aligned}$$

Man hat also lediglich das Diagramm in 4λ gleich breite Streifen zu teilen, die Ordinatenwerte nach a, b, c, d zu ordnen und die Einzelsummen $\sum f_{ka}, \sum f_{kb}, \sum f_{kc}, \sum f_{kd}$ zu bilden, die entsprechend zusammengefasst dann als reelle und imaginäre Komponente in ein um 45° gedrehtes Koordinatensystem eingetragen werden und deren geometrische Resultierende im ursprünglichen Koordinatensystem die mit $\frac{\pi^2 \lambda}{2\sqrt{2}}$ multiplizierte harmonische Komponente λ -ter Ordnung in richtiger Phase darstellt.

Wie man sich leicht überlegt, läuft die obige Bildung der Komponenten auf die Aufsuchung der Flächendifferenzen benachbarter Trapeze hinaus, deren Summe dann den wesentlichen Bestandteil der Fourier-Koeffizienten ausmacht.

Abbildung 4 zeigt die Anwendung des Verfahrens auf die gleiche Kurve wie in Abbildung 1 für die sechste Harmonische, $\lambda=6$. Die Ordinatenwerte sind:

a	b	c	d
3,39	3,39	3,39	3,42
3,46	3,49	3,56	3,62
3,65	3,72	3,81	3,95
4,08	4,31	4,56	4,96
5,33	5,81	5,90	5,62
4,78	4,22	3,76	3,48
29,94	24,98	25,05	24,69

$$\text{Also } \sum (f_a + f_b) = 49,63$$

$$- \sum (f_c + f_d) = -50,03$$

$$\text{reeller Teil} = -0,40$$

$$\text{ebenso } \sum (f_b + f_c) = 49,92$$

$$- \sum (f_d + f_a) = -49,74$$

$$\text{imaginärer Teil} = 0,18$$

Die beiden Vektorkomponenten sind in Abbildung 5 in ihrem Koordinatensystem eingetragen und ergeben damit im richtigen Axsystem den Summenvektor

$$\sum r_k = 0,445 e^{i201 \frac{\pi}{180}}$$

der durch Multiplikation mit $\frac{2\sqrt{2}}{6\pi^2}$ in

$$R_6 = 0,0212 e^{i201 \frac{\pi}{180}}$$

$$a_6 = -0,0076$$

$$b_6 = -0,0199$$

übergeht.

Bei der Anwendung darf jedoch nicht die Voraussetzung der Methode ausser acht gelassen werden, dass $f'(x)$ innerhalb eines Intervalls als konstant betrachtet werden dürfe. Würde z. B. eine Schwingungsform zur Untersuchung vorliegen, in der die gesuchte Harmonische sich schon deutlich heraushebt, wie es der Fall ist, wenn sich diese in der Nähe der Resonanz befindet, so müsste eine noch engere Unterteilung vorgenommen werden. Verwendet man 8λ Intervalle, so würde sich wieder eine ganz ähnliche Lösung wie die obige für 4λ herstellen lassen.

Eine rein geometrische Darstellung der Coulomb'schen Erddruck-Theorie.

Zur bezüglichen Abhandlung von Dr. Ing. P. Pasternak auf Seite 219 letzten Bandes (4. Mai 1929) erhalten wir die folgende Zuschrift:

In der Abhandlung von Dr. Ing. Peter Pasternak ist ein Verfahren angegeben, wie man den Satz von Rebhann unmittelbar ablesen kann. Meistens leitet man zwar den Satz analytisch her; Dr. Fritz Postuwanschitz, weiland Professor in Graz, leitete ihn in seinen Vorlesungen geometrisch ab. Ich werde hier ein ähnliches unmittelbares Ablesen zeigen (Abb. 1).

Durch den Punkt A (Schnittpunkt der Gleitlinie mit der Bodenlinie) zieht man Parallele zur Stellungslinie. Das Dreieck OAB ist ähnlich dem Kräfte-dreieck. Dann ist

$$G = x \lambda \gamma$$

$$\text{oder } F = x \lambda$$

G ist dabei das Gewicht des Gleitprisma, F also der Querschnitt dieses Prisma, λ ein Multiplikator.

Weiter ist

$$E = y \lambda \gamma \quad \text{oder} \quad F_E = y \lambda$$

„Nach Coulomb ist die Gleitlinie so auszuwählen, dass E den Grösstwert annimmt.“¹⁾ Man zieht eine Parallele zur Böschungslinie (Erddruck E ändert sich nicht) und bekommt mit der neuen Gleitlinie den Schnittpunkt C. Dann ist

$$-dF = AC \lambda \quad \text{oder} \quad -dG = AC \lambda \gamma$$

Es ist ersichtlich, dass

$$-dF = AC \frac{h}{2}$$

