

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 95/96 (1930)
Heft: 5

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen. — Die Hebungen und Senkungen der Rheinschleife in der Strecke Landquartmündung-Bodensee. — Das Krematorium in Rüti-Zürich (mit Tafel 1 und 2). — Gustave Louis Naville (mit Tafel 3). — Le soixantième anniversaire de la G. E. P. — Mitteilungen: Gasbetrieb für Luftschiffe. Von der Cité universitaire in Paris. Dreirosenbrücke in

Basel. Internationaler Kongress für Maschinenbau, Lüttich 1930. Eine „Holz-Tagung“ in Berlin. — Wettbewerbe: Beseitigung der Niveauübergänge der Durchgangstrassen in Baden. Erweiterung des Kursaals Lugano. — Mitteilungen der Vereine: Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein. Maschineningenieur-Gruppe Zürich der G. E. P. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 95

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 5

Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen.

Von HANS LIEBERHERR, Dipl. Ing., Winterthur.

Im allgemeinen geht man zur Ermittlung der Eigenfrequenz der Drehschwingung einer mit Trägheitsmomenten besetzten Welle so vor, dass man für jede einzelne Masse die Bewegungsgleichung der Drehung unter dem Einfluss der an ihr angreifenden Momente aufstellt. Durch Einführung eines Cosinus-Ansatzes mit der noch unbestimmten Frequenz λ und der Amplitude A , die für jede Masse verschieden ist, geht dieses System von Differentialgleichungen über in ein System linearer homogener Gleichungen für die Amplituden A . Diese können von Null verschiedene Werte nur dann besitzen, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet. Aus dieser Bedingung ermittelt man durch Probieren und Interpolation diejenigen Werte von λ , die die Determinante zu Null machen, die sog. Eigenfrequenzen des Problems. Für ein System von n schwingenden Massen erhält man auf diese Art ($n - 1$) Werte für die Eigenfrequenzen. Für die technische Anwendung kommt jedoch fast ausschliesslich nur die unterste in Betracht. Hier gelangt man viel rascher zum Ziel durch die nachstehende Methode. Wie sich zeigen wird, stellt sie das genaue Analogon dar zum bekannten Verfahren der Bestimmung der Eigenfrequenz der Biegeschwingung einer mit Massen besetzten Welle (Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. Auflage, Seite 381).

Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient die Schwingungsgleichung einer Welle von konstantem Trägheitsmoment, die stetig mit Massenträgheitsmomenten belegt ist. Als solche fallen in Betracht die Eigenmasse der Welle, aber auch aufgesetzte Massen, wie Schwungrad, Generator, Schiffschrauben, Kupplungen und die reduzierten Massen des Kurbeltriebes. Da in den praktischen Anwendungen gewöhnlich das Trägheitsmoment längs der Welle veränderlich ist, unter welche Abweichungen auch in den Wellenstrang eingeschaltete elastische Kupplungen zu rechnen sind, so hat man die Welle vorerst zu „reduzieren“. Dies bedeutet, dass man die einzelnen Elemente der Welle, die abweichendes Trägheitsmoment haben, ersetzt durch Wellenstücke des gegebenen Durchmessers und von solcher Länge, dass bei gleichem Drehmoment die Verdrehung entsprechender Querschnitte gegeneinander gleich wird wie bei der ursprünglichen Welle. Das Massenträgheitsmoment über einem bestimmten Wellenstück wird man über die entsprechende reduzierte Länge bei unverändertem Gesamtbetrag sinngemäss verteilen.

Bezeichnet man das polare Trägheitsmoment der reduzierten Welle mit J_p , das Massenträgheitsmoment pro Längeneinheit, das eine Funktion des Abstandes x vom Wellenende sein soll, mit Θ_1 , das verdrehende Moment im Querschnitt x mit M , so lautet die Bewegungsgleichung der Drehung für das Element der Welle zwischen x und $x + dx$, wenn φ der Verdrehungswinkel,

$$(\Theta_1 dx) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad \dots \quad (1)$$

M lässt sich ausdrücken durch die Verdrehung gemäss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M}{G J_p} \quad \dots \quad (2)$$

Damit folgt die Schwingungsgleichung

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \dots \quad (3)$$

Führt man hierin den Normalschwingungsansatz ein, $\varphi = A \cos(\lambda t)$, worin A unabhängig von der Zeit sein soll, so folgt

$$-\Theta_1 \lambda^2 A = G J_p \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\Theta_1}{G J_p} A \quad \dots \quad (4)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Bedingungen zu erfüllen, dass das übertragene Moment an beiden Enden der Welle verschwindet, was nach (2) durch die Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{in } x = 0, l$$

oder gleichbedeutend

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad \text{in } x = 0, l \quad \dots \quad (5)$$

dargestellt wird.

$\frac{\partial A}{\partial x}$ ergibt sich durch einmalige Integration aus (4) als

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\int_0^x \Theta_1 dx A}{G J_p \lambda^2} \quad \dots \quad (6)$$

sodass, da die erste Bedingung des Verschwindens der Neigung der Tangente der elastischen Linie im Anfangspunkt ohne weiteres erfüllbar ist, die Bedingung verbleibt

$$\int_0^l \Theta_1 A dx = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Bedenkt man, dass $\Theta_1 dx A \lambda^2$ das an jedem Massenelement angreifende Moment der Trägheitskräfte darstellt, so hat diese Gleichung die einfache Bedeutung, dass das resultierende Moment der Trägheitskräfte über die ganze Welle verschwindet. Da keine äusseren Kräfte auf die Welle einwirken, ist dies eine Selbstverständlichkeit.

Zur Lösung der Differentialgleichung wird jetzt so vorgegangen, dass man zuerst eine willkürliche Annahme über den Verlauf der elastischen Linie macht, die aber die Randbedingungen erfüllen muss. Während die erste sofort berücksichtigt ist, verlangt die zweite das Bestehen

der Gleichung $\int_0^l \Theta_1 A dx = 0$, die jetzt in etwas veränderter Form wiederholt sei

$$\int_0^l \Theta_1 A dx = \int_0^l \Theta_1 (A + a) dx - a \int_0^l \Theta_1 dx = 0 \quad \dots \quad (7a)$$

A stellt die Amplitude der Schwingung, also die maximale Auslenkung gegenüber der Axenrichtung dar. Sie ist vorläufig noch unbekannt. Dagegen gibt die Annahme die Abstände $A + a$ von einer beliebigen Axe, die parallel zur Schwingungsaxe im Abstand a verläuft, sodass sich a aus den gegebenen Werten von $(A + a)$ und Θ_1 ergibt.

Gemäss Gleichung (6) ist der Neigungswinkel der elastischen Linie gegenüber der Axe im Punkte x

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\int_0^x A \Theta_1 dx}{G J_p \lambda^2}$$

sodass man ihn graphisch dadurch erhält, dass man auf einer Horizontalen $G J_p / \lambda_0^2$ aufträgt, λ_0 vorläufig geschätzt

und von deren Ende aus abwärts die Teilintegrale $\int_0^x A \Theta_1 dx$,

wenn man sich die Welle in einzelne Teilstücke zerlegt denkt, aneinanderreicht. Damit kann man die Lösung der Differentialgleichung für den angenommenen Verlauf von A aufzeichnen und hat auch hier wieder zuerst die Lage der Schwingungsaxe zu bestimmen. Wären angenommene elastische Linie und λ richtig gewesen, so hätte das Resultat