

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 99/100 (1932)  
**Heft:** 23

**Artikel:** Beitrag zum Problem der Schwind- und Temperaturspannungen in steifen Gewölben  
**Autor:** Krall, G. / Straub, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45503>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Beitrag zum Problem der Schwind- und Temperaturspannungen in steifen Gewölben. — Das Rheinkraftwerk Ryburg-Schwörstadt. — Wettbewerb für eine Schulhausanlage an der proj. Tannenrauchstrasse in Zürich 2. — Eidg. Amt für Wasserwirtschaft, 1931. — Temperaturregler für Wohn- und Fabrikräume. — Mitteilungen: Eidgen. Techn. Hochschule. Absperroorgane für Höchstdruckdampf. Selbsttragende Fernmelde-Luftkabel. Abteilung Literaturnachweis an der Bibliothek der E.T.H.

Sinterkorund. Steinkohlenförderung der Welt. Werkbundsiedlungs-Ausstellung Wien 1932. Eiserner Strassenviadukt über die Waal. Hauptversammlung der deutschen Gesellschaft für Metallkunde. — Nekrologe: Marcell v. Kussevich. Fritz Zuppinger. — Wettbewerbe: Schulhausanlage und Hallenschwimmbad in Altstetten. Schulhaus mit Turnhalle in Muttenz. Kirchengemeindehaus Johanneskirche in Bern. Bebauungsplan der Stadt Lausanne. — Literatur. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 23

### Beitrag zum Problem der Schwind- und Temperaturspannungen in steifen Gewölben.

Von Dr. Ing. G. KRALL und Ing. H. STRAUB, Rom.

Bei der statischen Berechnung kleinerer, verhältnismässig steifer Gewölbe aus nichtarmiertem Stampfbeton oder Mauerwerk stösst man in der Praxis oft auf den Fall, dass der behördlicherseits geforderte Nachweis der Schwind- und Temperaturspannungen zu unverhältnismässig hohen Werten, besonders zu unzulässigen Zugspannungen (oder bei Vernachlässigung der Zugfestigkeit des Baumaterials, zu übermässig hohen Druckspannungen) führt. Zwar steht ausser Zweifel, dass in solchen Fällen die scheinbar die zulässigen Grenzen weit überschreitenden Spannungswerte, sofern sie nur hauptsächlich aus Schwinden und Temperatur herrühren, im allgemeinen die Sicherheit des Bauwerks keineswegs beeinträchtigen, da (neben dem günstigen Einfluss der praktisch stets vorhandenen Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls  $E$  mit der Spannung) nach Eintreten einiger Zugrisse die Steifigkeit des Bogens so stark herabgesetzt wird, dass die Spannungen sich nunmehr in zulässigen Grenzen halten. Der Versuch, diese Vorgänge rechnerisch zu erfassen, ist unseres Wissens bis jetzt noch nicht gemacht worden, weshalb der projektierende Ingenieur sich in derartigen Fällen oft vor Schwierigkeiten gestellt sieht, wenn trotzdem eine genaue statische Berechnung geliefert werden soll. Man greift dann in solchen Fällen etwa zum Einbau von Eiseneinlagen, oder Gelenken, die in Wirklichkeit gar nicht nötig wären, und die nur der einwandfreien Rechnung zuliebe hinzugefügt werden.

Im folgenden soll der Versuch gemacht werden, durch eine, wenn auch nur angenäherte Rechnung den günstigen Einfluss zu erfassen, den die entstehenden Zugrisse auf die Steifigkeit, und somit auf die Schwind- und Temperaturspannungen eines symmetrischen, eingespannten Bogens ausüben. Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:

$L$  = theoret. Spannweite,  $f$  = theoret. Pfeil,  $J_s, J_k$  = Trägheitsmoment im Scheitel bzw. im Kämpfer,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $\alpha$  = Temperatúrausdehnungskoeffizient.

Der Einfluss des Schwindens soll in Form einer Temperaturniedrigung eingeführt werden, so dass im folgenden nur noch von Temperaturspannungen die Rede sein wird. Eine Temperaturänderung  $\Delta t$  erzeugt einen im Schwerpunkt der elastischen Gewichte angreifenden Horizontalschub, der nach Prof. Dr. M. Ritter<sup>1)</sup> durch den Ausdruck

$$H_t = \frac{56}{3n+2} \frac{J_s}{f^2} E \alpha \Delta t \dots \dots \dots (I)$$

gegeben ist, worin  $n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k}$  und wobei Bogenform und Veränderlichkeit des Querschnitts gewissen, in Wirklichkeit meist nahezu zutreffenden Gesetzen gehorchen. Wie ersichtlich wachsen, bei konstant bleibendem  $E$ , der Horizontalschub  $H_t$  und damit die Temperaturspannungen mit wachsendem  $J_s$  und  $J_k$ , d. h. mit wachsender Gewölbestärke.

Wie schon einleitend bemerkt, kann nun für die für kleine, steife Gewölbe praktisch in Frage kommenden Baustoffe (Beton, Mauerwerk) der Wert  $H_t$  im allgemeinen die nach Gleichung (I) errechneten, für den Bestand des Bauwerks gefährlichen hohen Werte in Wirklichkeit nicht erreichen, da einerseits mit wachsenden Spannungen der Elastizitätsmodul abnimmt, und andererseits infolge der geringen oder fehlenden Zugfestigkeit des Baustoffs Zugrisse eintreten, die eine starke Herabminderung der wirksamen  $J_s$ , und infolgedessen auch der  $H_t$ -Werte zur Folge haben.

In dem folgenden Versuch einer rechnerischen Erfassung des auf diese Weise gebildeten neuen Gleich-

gewichtszustandes soll der Einfachheit halber der günstige Einfluss der Veränderlichkeit von  $E$  vernachlässigt und die Zugfestigkeit des Baustoffes = 0 gesetzt werden. In einem ebenen Querschnitt wird sich dann, bei ausserhalb des Kerns angreifender Drucklinie, die bekannte dreieckförmige Verteilung der Druckspannungen bilden.

Für ein gegebenes Gewölbe seien die Spannungen aus Eigengewicht und Verkehrslast nach der Elastizitätstheorie berechnet, und es werde mit  $\sigma_t$  die Temperaturspannung infolge  $H_t = 1$  bezeichnet. Wie schon erwähnt, ist die wirkliche Grösse von  $H_t$  einstweilen noch unbestimmt, weil von  $J$ , und damit, unter den angenommenen Voraussetzungen, letzten Endes von den Spannungen und deren Verteilung im Querschnitt abhängig.

Für verschiedene, willkürlich angenommene Werte  $H_t$  von  $H_t$  ergeben sich für homogen gedachte Querschnitte die virtuellen Gesamtspannungen im Scheitel und im Kämpfer, unter Anwendung der üblichen Bezeichnungen,

$$\left. \begin{aligned} \text{im Scheitel: } \sigma_s^{(o u)} &= \sigma_s^{(o u)} + \sigma_s^{(p)} + \sigma_s^{(o u)} H \\ \text{im Kämpfer: } \sigma_k^{(o u)} &= \sigma_k^{(g)} + \sigma_k^{(p)} + \sigma_k^{(o u)} H \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Die Werte  $\sigma_s^{(o u)}$  und  $\sigma_k^{(o u)}$  können positiv oder negativ sein, und aus ihnen kann rückschliessend die Exzentrität  $e$ , und damit die Lage der Resultierenden aller inneren Kräfte berechnet werden nach der Formel

$$e = \left| \frac{\sigma_o - \sigma_u}{\sigma_o + \sigma_u} \frac{h}{6} \right|$$

worin  $h$  die Bogenstärke bedeutet. Die virtuellen Gesamtspannungen am obern, bzw. untern Ende sind hier und in der Folge zur Abkürzung einfach mit  $\sigma_o$  bzw.  $\sigma_u$  bezeichnet.

Unter der gemachten Annahme der Vernachlässigung der Zugspannungen wird, falls  $h/2 > e > h/6$ <sup>2)</sup>, nur ein Bruchteil  $3(h/2 - e)$  der gesamten Gewölbestärke zur Wirkung kommen, und an Stelle des Gesamtträgheitsmomentes  $J = b h^3/12$  tritt das wirksame Trägheitsmoment

$$J' = J \left[ \frac{3 \left( \frac{h}{2} - e \right)}{h} \right]^3 = J \frac{27}{8} \left[ 1 - \frac{\sigma_o - \sigma_u}{3(\sigma_o + \sigma_u)} \right]^3 \dots \dots (3)$$

Da die Werte  $\sigma$  aus Eigengewicht und Verkehrslast festgesetzt sind, treten die wirksamen Trägheitsmomente in Scheitel und Kämpfer als Abhängige derselben und der Grösse  $H$  auf, die wir uns als willkürlich veränderlich denken. Wir können also schreiben:

$$J_s' = J_s'(\sigma_s^{(o)}; \sigma_s^{(u)}; H) \quad J_k' = J_k'(\sigma_k^{(o)}; \sigma_k^{(u)}; H)$$

Wenn angenommen wird, dass auch ausserhalb der Scheitel- und Kämpferquerschnitte das auf Zug beanspruchte Baumaterial gerissen sei, d. h. dass  $J'$  sich zwischen den Werten  $J_k'$  am Kämpfer und  $J_s'$  im Scheitel nach einem ähnlichen Gesetz verändert wie  $J$ <sup>3)</sup>, so können wir nach Gleichung (I) den Schub  $H_t'$  berechnen, den die gegebene Temperaturdifferenz  $\Delta t$  in einem Bogen von der Steifigkeit  $J'$  erzeugen würde:

$$\left. \begin{aligned} H_t' &= \frac{56}{3n'+2} \frac{J_s'(\sigma_s^{(u)}; \sigma_s^{(o)}; H)}{f^2} E \alpha \Delta t \dots \dots (4) \\ n' &= \frac{J_s'}{J_k' \cos \varphi_k} \end{aligned} \right\}$$

<sup>2)</sup> Falls  $e > h/2$ , oder  $(\sigma_o - \sigma_u)/(\sigma_o + \sigma_u) > 3$ , reisst der ganze Querschnitt und es wird  $J' = 0$ ; wenn  $e < h/6$ , oder  $(\sigma_o - \sigma_u)/(\sigma_o + \sigma_u) < 1$ , bleibt der ganze Querschnitt gedrückt und es bleibt  $J' = J$ .

<sup>3)</sup> Die Annahme ist praktisch zulässig, trotzdem sich in der Gegend der Gewölbeviertel eine Zone ohne Zugrisse, und somit eine Unstetigkeit im Verlauf der  $J'$ -Werte befindet, denn die  $J$ -Werte auf der Höhe des Schwerpunktes der elastischen Gewichte haben nur einen geringen Einfluss auf die statisch unbestimmten Grössen.

<sup>1)</sup> M. Ritter, „Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger“, Berlin 1909.

Der wirklich vorhandene, von dem gegebenen  $\Delta t$  erzeugte Horizontalschub  $H_t^*$  ergibt sich durch Gleichsetzung von  $H_t^* = H$ , d. h. die Gl. (4) muss jenen Horizontalschub aus Temperatur ergeben, der vorher zur Ermittlung der Exzentrizität der Drucklinie, und damit der wirksamen Trägheitsmomente  $J'$  angenommen wurde.

Praktisch kommt man am raschesten zum Ziel, wenn man für einige wenige, willkürlich angenommene, zwischen 0 und  $H_t$  liegende Werte  $H$  nach Gleichung (3)  $J'$  und nach Gleichung (4)  $H_t^*$  berechnet, worauf man in einem Koordinatensystem  $H$  als Abszissen und die Differenz  $d = H - H_t^*$  als Ordinaten aufträgt. Der Punkt  $d = 0$  (Schnittpunkt der Kurve mit der Abszissenachse) bestimmt den gesuchten Wert. (Falls im gegebenen Gewölbe keine Zugspannungen auftreten, also sowohl im Scheitel wie im Kämpfer  $e < h/6$ , ergibt sich für alle Werte von  $H$  zwischen 0 und  $H_t$  die Differenz  $d$  stets vom gleichen Vorzeichen; der wirklich vorhandene Horizontalschub  $H_t^*$  ist in diesem Falle gleich dem nach Gleichung (1) berechneten  $H_t$ .)

Die wirklich auftretenden Spannungen (Druckspannungen) erhält man, indem man zuerst nach Gleichung (2), unter Einführung von  $H_t^*$  an Stelle von  $H$ , die dem homogenen Querschnitt entsprechenden virtuellen Spannungen  $\sigma_{0u}$  berechnet. Treten Zugspannungen auf, so bestimmt man die Grösse der Resultierenden und deren Exzentrizität  $e = \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \cdot \frac{h}{6}$  und konstruiert die dreieckförmige Druckspannungsverteilung, unter Vernachlässigung der Zugfestigkeit des Materials, oder man bestimmt die maximale Druckspannung direkt analytisch nach

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_0 + \sigma_u}{3 \left( \frac{h}{2} - e \right)} h; \quad \sigma_{\min} = 0.$$

Der für die Bestimmung der maximalen Druckspannung in die Rechnung einzuführende Wert  $H_t^*$  wird für jeden zu untersuchenden Gewölbequerschnitt ein anderer sein, da er (nach Gl. 2) u. a. auch von  $\sigma_s(p)$  und  $\sigma_k(p)$  abhängt, welche Werte wiederum von der Verkehrslast abhängen, die man für jeden zu untersuchenden Gewölbeschnitt in der jeweils ungünstigsten Stellung und Verteilung einführen wird. Die Rechnung ist also für jeden Querschnitt gesondert durchzuführen.

Auf keinen Fall kann  $H_t^*$  den durch Gl. (1) oder eine andere gleichwertige Berechnungsart gegebenen Grenzwert überschreiten; erreicht wird dieser Grenzwert immer dann, wenn in allen Gewölbeschnitten nur Druckspannungen auftreten (oder, selbstverständlich, wenn das Material homogen ist und auch Zugspannungen aufnehmen kann).

Im Vorstehenden wurde die Lage des Schwerpunktes der elastischen Gewichte als unveränderlich vorausgesetzt, was in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist<sup>3)</sup>, ebensowenig wäre es streng genommen zulässig, die virtuellen Spannungswerte  $\sigma(g)$  und  $\sigma(p)$  als unveränderlich vorzusetzen, während die Temperaturspannungen als von den ihrerseits durch die Zugrisse beeinflussten Trägheitsmomenten abhängig angenommen werden. Es lässt sich aber zeigen, dass durch diese vereinfachenden Annahmen die Ergebnisse nicht stark beeinflusst werden.

Ein Zahlenbeispiel soll die praktische Anwendung der Methode erläutern. Der zu untersuchende Bogen sei nach der Stützlinie aus Eigengewicht geformt und habe volle Erdüberschüttung. Seine Hauptabmessungen seien  $L = 12,0$  m,  $f = 3,0$  m,  $h_s = 0,50$  m,  $h_k = 0,80$  m,  $\cos \varphi = 0,62$ .

Es soll ein Gewölbestreifen von der Breite 1 betrachtet werden, sodass  $J_s = 0,0104$  m<sup>4</sup>,  $J_k = 0,0426$  m<sup>4</sup>,  $n = 0,393$ .

Unter der Voraussetzung homogener Gewölbequerschnitte seien folgende Spannungen aus Eigengewicht und Verkehrslast ermittelt worden (wobei auch für die  $\sigma_k(p)$  die für den Scheitel ungünstigste Stellung der Verkehrslast angenommen wurde, entsprechend der Aufgabe, die wirklich vorhandene Maximaldruckspannung im Scheitel zu ermitteln):

	Scheitel		Kämpfer	
	$\sigma_0$	$\sigma_u$	$\sigma_0$	$\sigma_u$
Eigengewicht	+ 3,49	+ 1,75	+ 1,42	+ 3,88 kg/cm <sup>2</sup>
Verkehrslast ( $p = 1200$ kg/m <sup>2</sup> )	+ 3,48	- 1,80	+ 3,40	- 1,71 "
Total	+ 6,97	- 0,05	+ 4,82	+ 2,17 "

Es soll eine Temperaturdifferenz von  $\pm 10^0$ , und der Einfluss des Schwindens soll durch eine weitere Temperaturerniedrigung von  $10^0$  berücksichtigt werden. Für den Scheitel gilt also als ungünstigster Fall  $\Delta t = -20^0$ .

Dann würde sich nach Gleichung (1) ergeben:

$$H_t = \frac{56}{3 \cdot 0,393 + 2} \cdot \frac{0,0104}{3^2} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-5} (-20) = -8,14 \text{ t.}$$

Unter der üblichen Voraussetzung homogener Querschnitte würden sich im Scheitel folgende Spannungen aus Temperatur und Schwinden ergeben:

$$\sigma_s^{(0u)} = \frac{H}{F_s} + \frac{Hc}{W_s} = \frac{-8,14}{0,5} + \frac{-8,14 \cdot 0,654}{0,0416} = \begin{cases} \sigma_s^{(0)} = + 112 \text{ t/m}^2 \\ \sigma_s^{(u)} = - 144 \text{ t/m}^2 \end{cases}$$

$c =$  Abstand des Schwerpunktes der elastischen Gewichte vom Scheitel  $= 0,654$  m,  $W_s =$  Widerstandsmoment des Scheitelquerschnittes  $= 0,0416$  m<sup>3</sup>.

Die Gesamtspannungen im Scheitel ergeben sich zu:

$$\sigma_0 = + 6,97 + 11,2 = 18,17 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_u = - 0,05 - 14,4 = - 14,45 \text{ "}$$

Da die Zugspannung den zulässigen Wert überschreitet, muss mit Zugrisen, d. h. unter Vernachlässigung der Zugfestigkeit des Materials gerechnet werden; die grösste Druckspannung ergäbe sich als unendlich, weil

$$e = \frac{18,17 + 14,45}{18,17 - 14,45} \cdot \frac{50}{6} = 73,1 \text{ cm} > \frac{h}{2}$$

Um die Grössenordnung der in Wirklichkeit auftretenden grössten Druckspannung im Scheitel zu berechnen, gehen wir nach den vorstehenden Ausführungen wie folgt vor. Wir berechnen nach Gl. (3)  $J'$ , und nach Gl. (4)  $H_t$ , z. B. für  $H = 0, -1, -2, -3, -4, -6, -8, 14$  t.

Wir bestimmen zunächst die in den Ausdruck (2) einzuführenden Hilfswerte  $\sigma_t^{(0u)}$  für  $H_t = 1$

Scheitel:  $\sigma_t^{(0)} = - 13,8 \text{ t/m}^2$ ,  $\sigma_t^{(u)} = + 17,7 \text{ t/m}^2$

Kämpfer:  $\sigma_t^{(0)} = + 24,0$ ,  $\sigma_t^{(u)} = - 20$  "

Die weitere Rechnung erfolgt am zweckmässigsten in tabellarischer Form wie untenstehend.

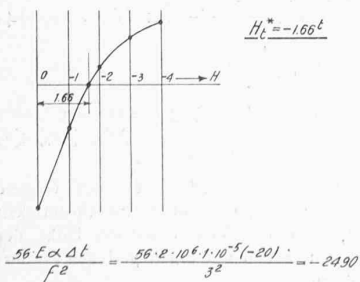
Die in Wirklichkeit vorhandene maximale Druckspannung im Scheitelquerschnitt ergibt sich demnach wie folgt:  $\sigma_{H=-1,66}^{(0u)} = H_t^* \sigma_t^{(0u)}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{H=-1,66}^{(0)} &= + 2,29 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{H=-1,66}^{(u)} &= - 2,94 \text{ "} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(virtuelle Spannungen aus} \\ \text{Temperatur)} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}^{(0)} &= + 6,97 + 2,29 = 9,26 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{\text{tot}}^{(u)} &= - 0,05 - 2,94 = - 2,99 \text{ "} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(virtuelle Ge-} \\ \text{samtspann.)} \end{array}$$

$$e = \frac{9,26 + 2,99}{9,26 - 2,99} \cdot \frac{50}{6} = 16,3 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{9,26 - 2,99}{3(25 - 16,3)} \cdot 50 = 12,0 \text{ kg/cm}^2.$$



H	Scheitel				Kämpfer				Scheitel ( $J = \frac{27}{8} = 0,035$ )				Kämpfer ( $J = \frac{27}{8} = 0,144$ )				$n'$	$3n+2$	$H_t^* = -24.90 \frac{J_s}{3n+2}$	$d = H - H_t^*$	
	$\sigma_0^{(0)}$	$\sigma_u^{(0)}$	$\sigma_0^{(u)}$	$\sigma_u^{(u)}$	$\sigma_0^{(0)}$	$\sigma_u^{(0)}$	$\sigma_0^{(u)}$	$\sigma_u^{(u)}$	$\sigma_0^{(0)}$	$\sigma_u^{(0)}$	$\sigma_0^{(u)}$	$\sigma_u^{(u)}$	$J_s'$	$\sigma_0^{(0)}$	$\sigma_u^{(0)}$	$\sigma_0^{(u)}$					$\sigma_u^{(u)}$
0	0	0	+697	-0.5	0	0	+48.2	+21.7	+11.2	+63.2	0.343	0.657	0.00992	+26.5	+69.9	0.0444	0.0426	0.375	3.125	-7.91	+7.91
-1	+13.8	-17.7	+83.5	-18.2	-24.0	+20.0	+24.2	+41.7	+101.7	+65.3	0.526	0.474	0.00373	-17.5	+65.9	0.0894	0.0426	0.441	2.423	-3.83	+2.83
-2	+27.6	-35.4	+167.0	-36.4	-48.0	+40.0	+41.4	+83.4	+203.4	+130.6	0.729	0.271	0.00174	-35.0	+131.8	0.1388	0.0426	0.628	2.094	-0.88	-1.02
-3	+41.4	-53.1	+250.5	-54.6	-72.0	+60.0	+61.7	+124.7	+305.7	+195.9	0.927	0.073	0.00093	-52.5	+199.3	0.1982	0.0426	0.815	1.767	-0.004	-2.996
-4	+55.2	-70.8	+334.0	-71.3	-96.0	+80.0	+81.7	+166.7	+391.7	+247.1	1.12	negativ	0	-69.0	+268.3	0.2676	0.0426	1.000	1.500	0	-4
-6	+82.7	-106.2	+501.0	-106.7	-144.0	+120.0	+121.7	+248.7	+558.7	+345.7	"	0	"	"	"	0.4152	0.0426	1.250	1.250	0	"
-8	+110.2	-144.0	+668.0	-146.0	-192.0	+160.0	+161.7	+326.7	+716.7	+451.7	"	0	"	"	"	0.5504	0.0426	1.500	1.500	0	"