

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 4

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. — Wettbewerb für ein Schulhaus in Seebach. — Natürlicher und künstlicher Umlauf bei Wasser-Zentralheizungen. — Mitteilungen: Hallengebäude in Budapest. Vorortverkehr mit Gleichstrom von 3000 V Fahrspannung. Schiffsreisen für italienische Seeschiffe.

Eidgenössische Technische Hochschule. Geschweisste Stahlnetze als Betonbewehrung. Mount Vernon Memorial Highway. Das Kraftwerk Kardaun am Eisack. Bauausstellung in Holland. — Nekrologe: Otto Stadler. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 4

Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Fortsetzung von Seite 30.)

9. Erzwungene Schwingungen bei periodischer Störung. Theorie der Resonanz.

Wir untersuchen nunmehr den Fall, wo in der Differentialgleichung

$$p'' + p = F(u)$$

$F(u)$ eine periodische Funktion ist. Ihre Periode sei U . Es ist also

$$F(u + U) \equiv F(u)$$

Die Zeichnung des Linienbildes C aus den Krümmungsradien erhält jetzt die Eigentümlichkeit, dass sich alles periodisch wiederholt, wenn die Konstruktion einmal über das Intervall U weggegangen ist. Hat man das Intervall U etwa in die Teilintervalle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eingeteilt und dementsprechend die Kreisbogen $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{n-1} P_n$ aneinandergereiht, so hat man jetzt an den letzten Bogen $P_{n-1} P_n$ wieder den ersten Bogen $P_0 P_1$ anzureihen, an diesen den zweiten usw. Das Linienbild C ergibt sich so als eine Folge kongruenter Kurvenstücke $P_0 P_n, P_n P_{2n}, P_{2n} P_{3n}, \dots$ die jeweiligen stetig und mit stetiger Tangente aneinandergefügt sind (Abb. 27). Es kann sich in Ausnahmefällen schliessen, wird sich jedoch im allgemeinen um einen mittlern Punkt beliebig oft herumwinden.

Die Bedeutung dieses Punktes wird klar, wenn jetzt die Frage nach der *eigentlichen erzwungenen Schwingung* d. h. nach der *periodischen Lösung der Differentialgleichung* gestellt wird. Um sie zu finden, sind die Anfangsbedingungen so zu wählen, d. h. es ist graphisch der Ursprungspunkt so zu verlegen, dass die Bedingungen $p(0) = p(U)$ und $p'(0) = p'(U)$ erfüllt werden. Denn aus der Differentialgleichung und den weiteren Gleichungen, die man durch deren Differenzieren erhält, folgt dann, dass alle höheren Ableitungen für 0 und U übereinstimmen, was die Periodizität garantiert.

Der neue Anfangspunkt O^* ergibt sich eindeutig, solange U kein ganzzahliges vielfaches von π ist, als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden h_1 der Tangenten $g(0)$ und $g(U)$ mit der Winkelhalbierenden h_2 der Normalen $g'(0)$ und $g'(U)$. Von den zwei Winkelhalbierenden der Geraden g bzw. g' ist dabei jene gemeint, die nicht durch den Winkelraum geht, der von den positiven (mit Pfeil versehenen) Halbstrahlen begrenzt wird (Abb. 27).

Ist U ein ungerades Vielfaches von π , so ist der Punkt O^* der Mittelpunkt des von den erwähnten Tangenten und Normalen gebildeten Rechtecks. Nur wenn U ein ganzzahliges Vielfaches der Periode 2π der Eigenschwingung ist, versagt die Konstruktion; O^* liegt dann unendlich fern (Resonanz). Abgesehen von dieser Ausnahme liegt O^* im Endlichen und man erhält jetzt das Linienbild C , indem man den einmal konstruierten Bogen $P_0 P_n$ um den Punkt O^* um die Winkel $U, 2U, 3U$, usw. dreht. Die Kurve liegt somit in ihrem ganzen Verlauf innerhalb eines leicht angebbaren Kreises um O^* , bleibt also im Endlichen. Freilich wird dieser Kreis sehr gross, wenn nahezu der Ausnahmefall vorliegt, da dann O^* sehr

weit weg fällt. Das periodische Integral zeigt alsdann sehr starke Schwankungen und das selbe gilt für alle andern Lösungen, die ja einfach zu andern Ursprungspunkten gehören.

Unsere Darstellung hat im übrigen den Vorzug, dass der Einfluss der Anfangsbedingungen auf den Verlauf des Integrals übersichtlich und einfach zum Ausdruck kommt.

Ebenso klar und einfach tritt auch der Ausnahmefall der Resonanz in Erscheinung. Es ist dann $U = 2\pi z$, wo z eine ganze Zahl bedeutet. O^* fällt ins Unendliche und die Kurvenstücke $P_n P_{2n}, P_{2n} P_{3n}, P_{3n} P_{4n}, \dots$ entstehen aus dem ersten Kurvenbogen $P_0 P_n$ durch *Parallelverschiebung*, die an Stelle der früheren Drehung tritt (Abb. 28). Sie entfernen sich daher mehr und mehr ins Unendliche, und dementsprechend verläuft auch der Schwingungsvorgang mit Ausschlägen, die regelmässig mehr und mehr anwachsen. Da die erwähnte Parallelverschiebung durch den Vektor $P_0 P_n$ bestimmt ist, so erkennt man auch, dass die Schnelligkeit des Anwachsens der Schwingung mit deren Grösse proportional geht. Ist er Null, so schliesst sich die Kurve C nach z Schläufen und die Bewegung bleibt

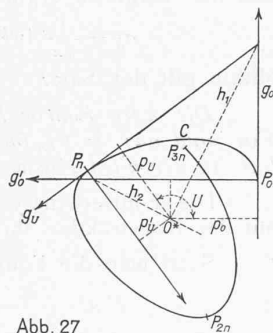


Abb. 27

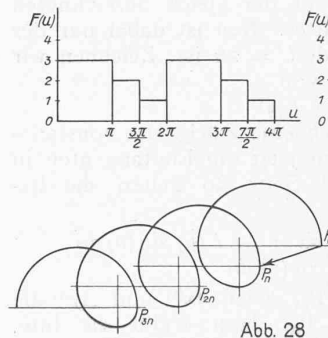


Abb. 28

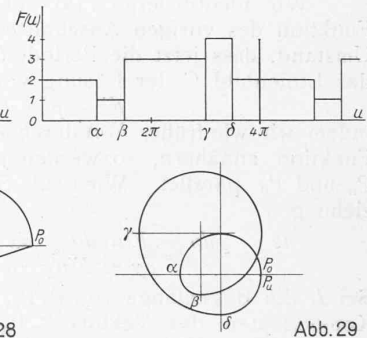


Abb. 29

ganz im Endlichen, trotzdem die Resonanzbedingung erfüllt ist. Die Lösung ist alsdann für beliebige Anfangsbedingungen periodisch, und die Periode ist $U = 2\pi z$ (Abb. 29, wo der Fall $z = 2$ dargestellt ist).

10. Graphische Fourier-Analyse einer periodischen Funktion.

Bestimmung ihrer Fourier-Koeffizienten.

Die übliche Behandlung der Theorie der erzwungenen Schwingungen besteht darin, dass man die periodische Funktion $F(u)$ durch ihre Fourier-Entwicklung ersetzt, also durch eine Reihe, die nach $\cos$ - und $\sin$ -Funktionen der ganzzahligen Vielfachen des Argumentwinkels fortschreitet. Allein dadurch wird ein fremdes Element eingeführt, und es ist nicht zum Vornherein einzusehen, warum gerade die ganzen Zahlen hier eine ausschlaggebende Rolle spielen. Auch kann man die Lösung zwar wohl als Fourierreihe hinschreiben, aber sie wird nicht immer überall gut konvergieren, und, um sich auch nur einigermaßen eine Uebersicht über den tatsächlichen Verlauf der Lösung zu verschaffen, wären umfangreiche Berechnungen dieser Reihe nötig. Alle diese Nachteile haften der graphischen Lösung nicht an.

Der am Schluss des letzten Abschnittes erwähnte Ausnahmefall, wo trotz Erfüllung der Resonanzbedingung