Band 100 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 23

Die Biegungslinie sehr schlanker Stäbe in graphischer Darstellung.

Von Privatdozent Dr. Ing. RICHARD SABATHIEL, Budapest.

Die Formänderung von Stäben, die innerhalb der Elastizitätsgrenze übermässig grosse Durchbiegungen erleiden können, kann durch die genaue Erörterung der allgemeinen Biegungsgleichung

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

bestimmt werden, wonach die Winkeländerung $d\alpha$ der Endquerschnittsebenen eines Stabelementes bezogen auf seine Länge ds proportional mit dem Moment M der äusseren Kräfte auf das Element und umgekehrt proportional mit dem Trägheitsmoment J des Querschnittes ist und der Proportionalitätsfaktor der reziproke Wert des Elastizitätsmoduls E ist; diese Winkeländerung, Krümmungsmass genannt, und der Krümmungshalbmesser des ursprünglich geraden Stabes sind reziproke Werte.

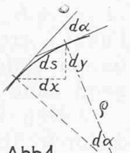


Abb.1

Mit den in Abb. 1 angegebenen Bezeichnungen wird diese Gleichung, in rechtwinklige Koordinaten umgesetzt,

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{EJ}{M} \quad . \quad . \quad (b)$$

bei kleinen Formänderungen so vereinfacht, dass der Wert $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha$ gegen 1 vernachlässigt wird. Wenn wir nun bei starken Krümmungen, wo $(\mathrm{tg}\,\alpha)^2$ nicht vernachlässigt werden kann, die Differentialgleichung (b) in Funktion der rechtwinkligen Koordinaten auflösen wollen, so kommen wir im einfachsten Falle auf komplizierte, schwer handliche sogenannte elliptische Integrale. In folgendem werden wir eine Konstruktionsmethode einführen, mit der die Form der stark gebogenen Stäbe übersichtlich und sehr genau gezeichnet werden kann. — Auch wird diese Konstruktion zu graphischen Lösungen ähnlicher analytischer Funktionen dienen.

Wir behandeln den einfachsten Fall des stark gebogenen Stabes, wenn am freien Ende des eingespannten schlanken Stabes eine Kraft P angreift und zwar erstens, wenn die Kraft P senkrecht auf die Einspannungsebene ist, und zweitens, wenn sie senkrecht auf die ursprüngliche gerade Axe des Stabes wirkt. (Siehe Abb. 2).

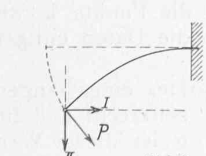
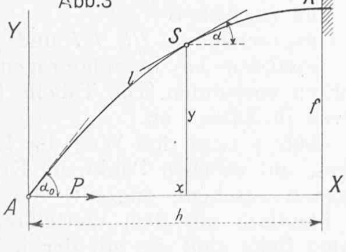


Abb.2

Abb.3



I. Am freien Ende des eingespannten schlanken Stabes greift eine Kraft senkrecht zur Einspannungsebene an.

Wir nehmen als Koordinaten-Axenmittelpunkt des nach Abb. 3 gebogenen Stabes den freien Endpunkt A. So ist die Grundgleichung der Biegung

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{Py}{EJ} = \frac{1}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die beiden Seiten mit dy multipliziert gibt:

$\frac{dy}{ds}\,d\alpha = -\frac{Py}{EJ}\,dy$; da aber $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$ ist und der Ausdruck der physikalischen Grössen $\frac{P}{EJ}$ durch $\frac{2}{p^2}$ vereinfacht werden kann, wonach also

$$p^2 = \frac{2EJ}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist und p die physikalische Länge genannt werden kann, so ist die geometrische Form der Differentialgleichung:

$$\sin\alpha\, d\alpha = -\frac{2y}{p^2}\,dy$$

Nach Integration ist

$$-\cos\alpha = -\frac{y^2}{p^2} + C \text{ oder } \cos\alpha = \frac{y^2}{p^2} - C$$

Im Punkt A ist $y = 0$; $\cos\alpha_0 = -C$ also

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 + \frac{y^2}{p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In K (Firstpunkt) ist $\cos\alpha = 1$ und $y = f$ wonach

$$\cos\alpha_0 = 1 - \frac{f^2}{p^2} \text{ oder } p^2 = \frac{f^2}{1 - \cos\alpha_0} \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Form der Biegungslinie ist durch α_0, den Neigungswinkel der Endtangente A charakterisiert und nach Gleichung (3) bestimmt.

Diese Gleichung veranschaulichen wir in Abb. 4. Aus dem Einspannungspunkt K ziehen wir die Linie mit der Neigung α_0; um deren Schnittpunkt mit der Kraftlinie P zeichnen wir den Halbkreis mit dem Radius $r = OK$. Diesen Kreis nennen wir den Richtungskreis. Der innere Schnittpunkt F des Kreises mit der $x \equiv P$-Axe liegt vom Fusspunkt B der Vertikalen K $\overline{BF} = r(1 - \cos\alpha_0)$ entfernt und nach Gleichung (4) ist

$$(1 - \cos\alpha_0) = \frac{f^2}{p^2}; \ \overline{BF} = r(1 - \cos\alpha_0)$$

Zeichnen wir noch die horizontalaxige Parabel mit dem Scheitel B und den Punkt G, wo $KG = BF = r\frac{f^2}{p^2}$.

Ist S ein beliebiger Punkt des gebogenen Stabes mit der Ordinate y und wird der Punkt horizontal auf die Parabel projiziert, weiter dieser Punkt S_2 vertikal auf den Kreis, so wird der Kreispunkt S_3 die Richtlinie OS_3 der

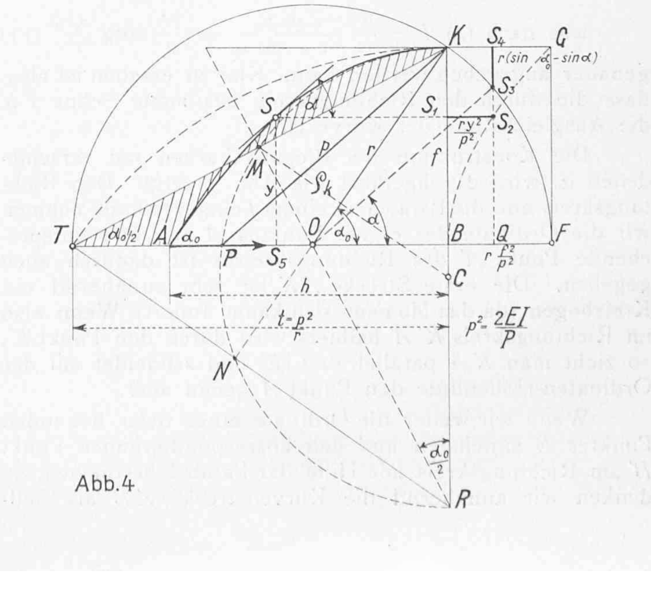


Abb.4