

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Die günstigste Form von Kesselböden  
**Autor:** Schultz-Grunow, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83184>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Die günstigste Form von Kesselböden. — Das neue Schlachthaus von Aarau. — Von der Zürcher Kunstgewerbeschule. — Mitteilungen: Die Elektrifizierung der italienischen Bahnen. Elektrisch beheizter Beton im Tiefbau. Meisterprüfungen im Gewerbe. Elbebrücke Tangermünde. Ueber die elektrisch geschweisste

Naht im Eisenbetonbau. Die Arbeitslosigkeit in den technischen Berufen. Basler Rheinhafenverkehr. Note II relative au coup de bélier et à son influence sur le réglage automatique des turbines par Charles Jaeger. — Nekrologe: Jakob Nold. — Literatur. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 103

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 12

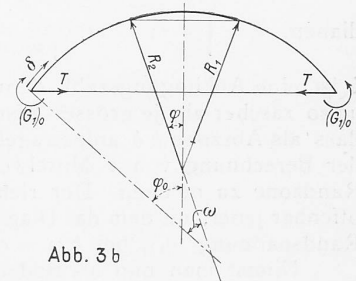
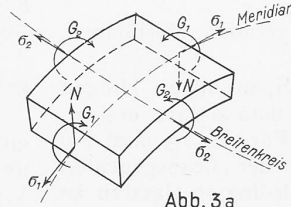
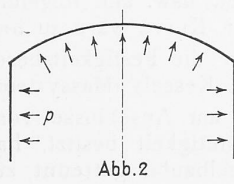
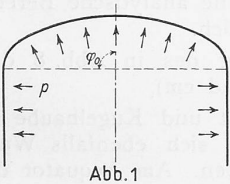
Die günstigste Form von Kesselböden.

Von Dr. sc. techn. FRITZ SCHULTZ-GRUNOW, Kassel.

[Entwicklung einer Methode zur Bestimmung der günstigsten Bodenform von Kesseltrommeln, deren Anwendung auf einen bestimmten Fall und Berechnung der hierbei auftretenden Spannungen.]

Als günstigste Bodenform in Bezug auf Materialausnutzung wird bis jetzt das abgeplattete Drehellipsoid mit dem Axenverhältnis 2:1 (Abb. 1) angesehen, denn bei dieser Form sollen sowohl im Boden als auch im Zylinder gleich hohe Maximalspannungen auftreten. Zu dieser Aussage gelangte Geckeler<sup>1)</sup> mit Hilfe seiner leistungsfähigen Näherungstheorie des Elastizitätsproblems dünner, axensymmetrischer Schalen. Inzwischen ist diese Theorie weiter entwickelt worden<sup>2)</sup>, wodurch sich neue Einblicke in die Festigkeit von Böden ergeben, welche die genannte Form nun nicht mehr als die günstigste erscheinen lassen.

Für die Festigkeitsrechnung sieht man nach dieser Theorie jeden Breitenkreis, in dem eine Unstetigkeit in der Wandstärke, Krümmung oder in der Richtung der Meridiantangente auftritt, als Schalenrand an, d. h. man denkt sich die Schale längs dieses Kreises aufgeschnitten. Bei Kesseln tritt eine Unstetigkeit in der Krümmung am Uebergang vom Zylinder zum Boden auf (Abb. 1), an welchem der Meridiankrümmungsradius R<sub>1</sub> von dem Werte unendlich im Zylinder auf den endlichen Wert im Boden sprunghaft übergeht, und bei dem Kessel in Abb. 2 tritt noch eine Unstetigkeit in der Richtung der Meridiantangente am Uebergang hinzu. Demnach hat man sich den Boden vom Zylinder abgetrennt zu denken.



Die Festigkeitsberechnung setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen: Zuerst errechnet man die Membranspannungen aus den bekannten Formeln<sup>3)</sup>

sigma\_1^\* = p \* R\_2 / (4h) ; sigma\_2^\* = sigma\_1^\* \* (2 - R\_2 / R\_1) . . . (1)

sigma\_1 bedeute Meridian-, sigma\_2 Ringspannung, h die halbe Wandstärke, R\_1 den Meridiankrümmungsradius, R\_2 den zweiten Hauptkrümmungsradius (Abb. 3a, b). Man erhält die Formeln unter Vernachlässigung der Biegung rein aus den Gleichgewichtsbedingungen für eine allseits geschlossene, durch den Druck p belastete Schale, die einen einfach zusammenhängenden Raum bildet, und deren Meridian keinen Wendepunkt besitzt. Am Kesselboden, der eine nicht geschlossene Schale dieser Art darstellt, erfordert dieser Spannungszustand die Randspannung sigma\_1^\*, denn dann ist er ebenso belastet wie als Teil einer geschlossenen. Entsprechend ist auch am Zylinderrande die Spannung sigma\_1^\* anzubringen. Der Membranspannungszustand verlangt also eine ganz bestimmte Randbedingung, nämlich die alleinige Wirkung der genannten Randspannung. Am Kessel ist sie aber nicht erfüllt, denn unter der Wirkung des Druckes p und der Randspannung sigma\_1^\* (Abb. 4) würde sich der Bodenrand um

Längeneinheit des Randes wurde im Falle des tangentialen Anschlusses die Formel

T = (sigma\_2I^\* - sigma\_2II^\*) / (8h sin phi\_0 [sqrt(3/4 \* (1 - nu^2)) \* (sqrt(R\_2/h))\_0 - nu/2 \* ctg phi\_0])

abgeleitet<sup>2)</sup>, ferner die Beziehung

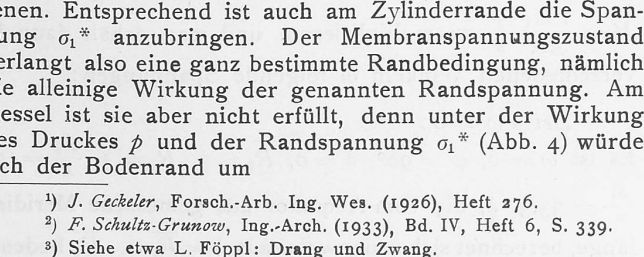
(sigma\_2)\_0 = (sigma\_2I^\* - sigma\_2II^\*) / (2 - nu \* (ctg phi\_0 / sqrt(3/4 \* (1 - nu^2)) \* (sqrt(h/R\_2))\_0)) . . . (2)

welche die von T verursachte Randspannung sigma\_2 liefert. Es bedeutet nu den reziproken Wert der Querdehnungszahl m; Index o kennzeichnet jene Randgrößen, die an den anschliessenden Rändern gleiche Werte haben.

Im zweiten Teile der Festigkeitsrechnung hat man dann die Spannungen, die T verursacht, zu errechnen

4) Diese Bodenform ist bereits von J. Geckeler, jedoch unrichtig, berechnet worden.

1) J. Geckeler, Forsch.-Arb. Ing. Wes. (1926), Heft 276.
2) F. Schultz-Grunow, Ing.-Arch. (1933), Bd. IV, Heft 6, S. 339.
3) Siehe etwa L. Föppl: Drang und Zwang.



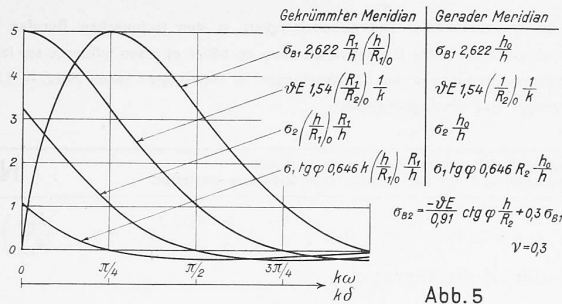


Abb. 5

und über die Membranspannungen zu superponieren. Dies geschieht mit Hilfe des in Abb. 5 dargestellten Spannungsdiagrammes, das bereits den Verlauf aller Spannungen, die *T* erzeugt, längs eines abgewinkelten Meridianes darstellt. Das Diagramm ergab sich<sup>2)</sup> aus den Eigenschaften des Spannungsverlaufes, dass jede Spannungskurve die gleiche Funktion bis auf Masstabsfaktoren darstellt und dass die Phasenverschiebungen der einzelnen Kurven untereinander stets gleich sind. Man erkennt auch im Diagramm das charakteristische rasche Abklingen der Spannungen, die daher nur in einer schmalen Randzone auftreten. *T* beansprucht also *nur* diese Zone. Zeichnet man in das Diagramm den richtigen Ordinatenmasstab ein, so können sofort die einzelnen Spannungen, die *T* verursacht, abgelesen werden, denn an jeder Kurve ist angeschrieben, welchen Wert sie darstellt. Die Abszisse *kω* bezieht sich auf gekrümmte, die Abszisse *kδ* auf gerade Meridiane. Es bedeutet dort (vgl. Abb. 3 b) *δ* die vom Rande aus gemessene Bogenlänge des Meridians,  $\omega = \varphi_0 - \varphi$ ,  $\sigma_{B1}$  die maximale Biegungsspannung in einem Schnitt durch einen Breitenkreis,  $\sigma_{B2}$  desgleichen in einem Meridianschnitte,  $\vartheta$  die Verdrehung der Meridiantangente infolge der De-

formation,  $k = \sqrt[4]{\frac{3}{4}(1 - \nu^2)} \frac{R_1}{\sqrt{R_2 h}}$  bei krummlinigen Meridianen,  $k = \sqrt[4]{\frac{3}{4}(1 - \nu^2)} \frac{1}{\sqrt{R_2 h}}$  bei geraden Meridianen.

*k* ist eine Abklingungszahl, denn die Spannungen klingen umso rascher ab, je grösser *k* ist, was man daraus ersieht, dass als Abszisse *kδ* aufgetragen ist. Für *R*<sub>1</sub>, *R*<sub>2</sub> sind bei der Berechnung von *k* Mittelwerte in der beanspruchten Randzone zu nehmen. Der richtige Ordinaten-Masstab ist offenbar jener, mit dem das Diagramm die aus (2) errechnete Randspannung ( $\sigma_2$ )<sub>0</sub> bei *kω* = 0 angibt.

Nimmt man nun als Bodenform das Drehellipsoid mit dem Axenverhältnis 2:1 so besteht der Einwand<sup>5)</sup>, dass bei der verhältnismässig grossen Krümmung an seinem Aequator die Belastung durch Druck *p* und die Randspannung  $\sigma_1^*$  eine Biegungsbeanspruchung bewirkt, die nicht mehr vernachlässigbar ist. Es ist also fraglich, ob der Membranspannungszustand eine genügend gute Annäherung ist, und ob deshalb in Wirklichkeit nicht höhere Spannungen auftreten, als sie *Geckeler* errechnete. Daher wird hier eine neue günstigste Bodenform entwickelt, bei der dieser Einwand nicht besteht. Das erfolgt in der Weise, dass der Boden aus Schalen zusammengesetzt wird, in denen die Belastung durch Druck *p* und Randspannungen  $\sigma_1^*$  tatsächlich den Membranspannungszustand hervorruft. Die Meridianformen solcher Schalen genügen der Gleichung<sup>6)</sup>

$$\text{ctg } \varphi \left( t + \frac{3}{t} - 4 \right) = t'$$

wo  $t = \frac{R_2}{R_1}$  und  $t' = \frac{dt}{d\varphi}$  bedeutet. Von konstanten Werten

<sup>5)</sup> Hierauf, wie auch auf die nachfolgende Methode zur Ermittlung der günstigsten Bodenform, wurde ich von Herrn Prof. E. Meissner, Zürich, freundlichst aufmerksam gemacht.

<sup>6)</sup> R. Zoelly: Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Diss. E. T. H., Zürich 1915.

genügen *t* = 1 (Kugel) und *t* = 3 dieser Relation. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$\left( \frac{\sin \varphi}{c \sin \varphi_0} \right)^2 = \frac{(t-3)^3}{t-1} \dots \dots \dots (3)$$

Die Konstante *c* bestimmt sich aus dem vorgegebenen Randwerte von *t*. Mit Ausnahme der Kugel haben diese Schalen den Nachteil, dass sie im Scheitel zur Platte ausarten, die unverhältnismässig höher als eine Schale beansprucht wird, wie schon die Anschauung sagt und wie ich an der angeführten Stelle in einer numerischen Berechnung gezeigt habe. Es soll deshalb eine dieser Schalen den Wulst des Bodens bilden und eine tangential anschliessende Kugelhaube die Mitte des Bodens (s. Abb. 8). Praktischen Ausführungen entsprechend soll die Höhe des Bodens etwa halb so gross als der Radius seines Aequators sein. Ferner wird  $\frac{a}{h} = 100$  vorausgesetzt (*a* = Kesselradius).

Es sei gleich vorweggenommen, dass man der günstigsten Bodenform, bei der in Zylinder, Wulst und Kugel gleiche Höchstwerte der Spannungen auftreten, genügend nahe kommt, wenn der Meridian des Wulstes das einfache Gesetz *t* = 3 befolgt, wie sich durch Probieren ergab. Die Abb. 8 zeigt diese Form für den Kesselradius *a* = 3 cm. Sie wurde in der Weise konstruiert, dass man vom Aequator aus fortschreitend Bogenstücke der Krümmungskreise aneinander fügte. Am Aequator wurde zunächst ein Kreis-

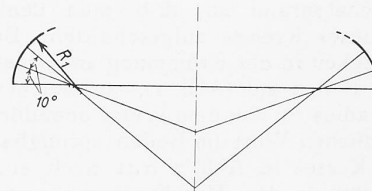


Abb. 6

bogenstück mit *R*<sub>1</sub> = 1 cm gezeichnet (s. Abb. 6) im Winkelraum von 10°. Am Ende desselben wurde *R*<sub>2</sub> abgegriffen, mit dem erhaltenen Werte aus der Relation  $\frac{R_2}{R_1} = 3$  dann *R*<sub>1</sub> ermittelt, mit dem neuen Werte von *R*<sub>1</sub> das zweite Bogenstück gezeichnet, usw. alle folgenden. Eine analytische Berechnung der Kurve wäre zu umständlich.

Nun die Festigkeitsberechnung des in Abb. 8 dargestellten Kessels (Masssystem kg und cm).

Da am Anschlusse von Wulst und Kugelhaube *R*<sub>1</sub> eine Unstetigkeit besitzt, hat man sich ebenfalls Wulst und Kugelhaube getrennt zu denken. Am Aequator des Wulstes ( $\varphi = 90^\circ$ ) errechnet man mit  $\nu = 0,3$

$$k = 0,909 \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \frac{R_1}{h}} = 3,03 ;$$

an seinem oberen Rande ( $\varphi = 40^\circ$ ) ist *R*<sub>1</sub> = 4,1 und *k* = 3,52. *k* ändert sich demnach längs des Meridianes wenig. Es wird mit dem arithmetischen Mittel *k* = 3,27 gerechnet.

Zunächst sollen die vom Aequator aus abklingenden Spannungen im *Wulste* ermittelt werden. Aus (2) kann man die Spannung ( $\sigma_2$ )<sub>0</sub> am Aequator errechnen. Da bei  $\varphi = 90^\circ$  nach (1) im Zylinder  $\sigma_2^* = p \frac{1,5}{h}$ , im Wulste  $\sigma_2^* = -0,75 \frac{p}{h}$  ist, folgt ( $\sigma_2$ )<sub>0</sub> = 1,127  $\frac{p}{h}$ . Wie gesagt, gibt das Diagramm in Abb. 5 den gesuchten Spannungszustand an, wenn dessen Ordinatenmasstab so gewählt wird, dass bei *kω* = 0<sup>0</sup> die  $\sigma_2$ -Kurve den eben errechneten Wert annimmt. Im vorliegenden Fall sind die Ordinaten des Diagramms mit  $M = \frac{1,127}{3,24} \frac{p}{h}$  zu multiplizieren, und man erhält dann bei verschiedenen Winkeln  $\omega$  folgende Spannungen:

Bei *kω* = 0:

Es ist  $\omega = 0$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\delta = 0$ , *R*<sub>2</sub> = 3, *R*<sub>1</sub> = 1,  $\frac{R_2}{h} = 100$ ,  $\frac{R_1}{h} = 33,3$ .  $\delta$ , die vom Aequator aus gemessene Meridianlänge, berechnet sich zonenweise aus  $\delta = \bar{R}_1 \omega$ .  $\bar{R}_1$  bedeutet

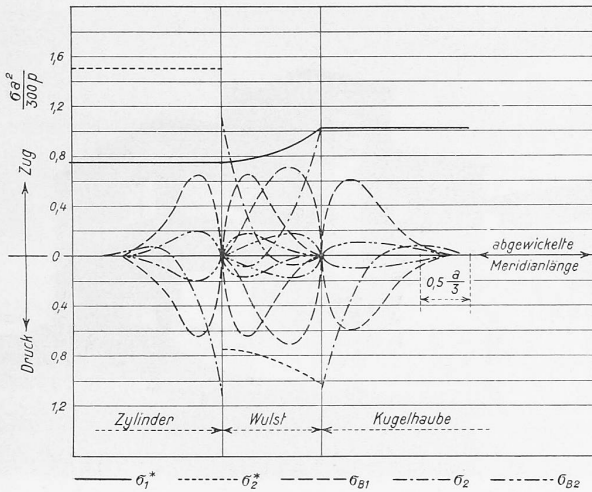


Abb. 9

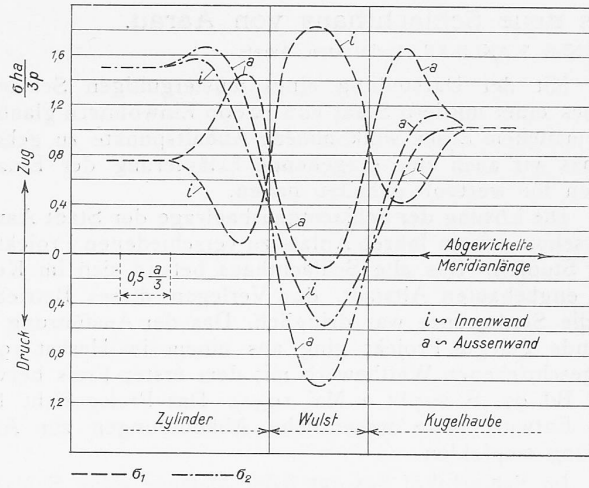


Abb. 10

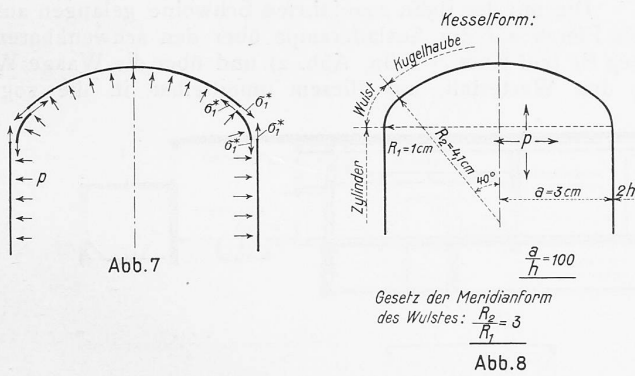


Abb. 7

Gesetz der Meridianform des Wulstes:  $\frac{R_2}{R_1} = 3$   
Abb. 8

hier das arithmetische Mittel der  $R_1$ -Werte am Anfang und Ende der zu  $\delta$  gehörenden Winkelzone. In Abb. 5 liest man nun ab:

$$\sigma_2 = 1,127 \frac{p}{h}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_{B1} = 0, \quad \sigma_{B2} = 0.$$

Ferner erhält man aus den Formeln (1)

$$\sigma_1^* = 0,75 \frac{p}{h}, \quad \sigma_2^* = -0,75 \frac{p}{h}.$$

Bei  $k\omega = \pi/4$

$$\text{ist } \omega = 13,8^\circ \quad \varphi = 76,2^\circ \quad R_2 = 3,07 \quad R_1 = 1,02$$

$$\frac{R_2}{h} = 102 \quad \frac{R_1}{h} = 34 \quad \bar{R}_1 = 1,01 \quad \delta = 0,242$$

$\text{ctg } \varphi_0 = 0,246.$

Der Wert von  $R_2$  wurde einer genauen Zeichnung des Bodens entnommen und  $R_1$  aus der Beziehung  $\frac{R_2}{R_1} = 3$  bestimmt. Der Abb. 6 entnimmt man:

$$\sigma_2 = 0,359 \frac{p}{h}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_{B1} = 0,65 \frac{p}{h}, \quad \vartheta E = 7,2 \frac{p}{h},$$

$$\sigma_{B2} = 0,175 \frac{p}{h}, \quad \sigma_1^* = 0,752 \frac{p}{h}, \quad \sigma_2^* = -0,752 \frac{p}{h}$$

Bei  $k\omega = \pi/2$

erhält man auf dem gleichen Wege

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_{B1} = 0,396 \frac{p}{h}, \quad \vartheta E = 2,34 \frac{p}{h},$$

$$\sigma_{B2} = 0,107 \frac{p}{h}, \quad \sigma_1^* = 0,81 \frac{p}{h}, \quad \sigma_2^* = -0,81 \frac{p}{h}.$$

Die Spannungen sind bereits so weit abgeklungen, dass sich die Rechnung für höhere Werte von  $k\omega$  erübrigt.

Die im Zylinder, in der Kugelhaube und vom oberen Wulstrand abklingenden Spannungen ergeben sich auf die gleiche Weise.

Den errechneten Spannungen ist noch das richtige Vorzeichen zu geben. Hierzu betrachte man Abb. 7, in welcher die getrennt gedachten Schalenteile durch Druck  $p$  und Randspannungen  $\sigma_1^*$  belastet und in dem zugehörigen deformierten Zustande gezeichnet sind. Danach dehnt sich der Zylinder, und zwar nach (1) um  $\epsilon_2^* = \frac{1,3}{E} \frac{p}{h}$ , der Wulst zieht sich zusammen, am Äquator um  $\epsilon_2^* = \frac{0,975}{E} \frac{p}{h}$ , am oberen Rande um  $\epsilon_2^* = \frac{1,33}{E} \frac{p}{h}$  und der Kugelrand

dehnt sich um  $\epsilon_2^* = \frac{0,717}{E} \frac{p}{h}$ . Die zu überlagernden, von  $T$  verursachten Spannungen gleichen den Unterschied dieser Randdehnungen aus. Daher ist am Zylinderrande  $\sigma_2$  eine Druckspannung, ebenfalls  $\sigma_{B1}$  an der Zylinderrinnenwand, da der Rand nach innen gebogen wird. An der Aussenwand ist also  $\sigma_{B1}$  eine Zugspannung. Der aus  $\sigma_{B1}$  sich bestimmende Teil von  $\sigma_{B2}$  hat nach der Formel in Abb. 5 das gleiche Vorzeichen wie  $\sigma_{B1}$ , der aus  $\vartheta$  sich bestimmende das entgegengesetzte. In den Wulstrandern ist  $\sigma_2$  eine Zugspannung, und ebenfalls  $\sigma_{B1}$  an der Innenwand des Wulstes.  $\sigma_1$  ist am Wulstrand ebenfalls eine Zugspannung, wenn dies, wie die Theorie aussagt, auch  $\sigma_2$  ist. Am Kugelrande ist  $\sigma_2$  wieder eine Druckspannung, infolgedessen auch  $\sigma_1$  und an der Kugelinnenwand  $\sigma_{B1}$ . Die oben errechneten Werte sind mit dem richtigen Vorzeichen versehen im Diagramm der Abb. 9 aufgezeichnet. Man erkennt dort, dass im Wulste die von einem Rande aus abklingenden Spannungen am anderen Rande bereits verschwinden, wie in der Rechnung schon vorausgesetzt wurde. Durch Superposition dieser Spannungen und der aus (1) sich bestimmenden erhält man die in Abb. 10 aufgezeichneten totalen Spannungen. Es bestätigt sich dort, dass die untersuchte Bodenform der günstigsten recht nahe kommt, da in allen drei Schalenteilen praktisch gleich hohe Maximalspannungen auftreten. Sie überschreiten die Kesselringsspannung  $\sigma_3^* = \frac{a}{2h}$  um 22 %. Dieses Resultat gilt für jeden geometrisch ähnlichen Kessel. Die Koordinaten des Diagrammes in Abb. 9 sind so bezeichnet, dass die Spannungen für alle derartigen Kessel abgelesen werden können. Für andere Verhältnisse  $\frac{a}{h}$  kann man auf die genannte Art von Fall zu Fall ebenfalls günstigste Kesselbodenformen entwickeln.

Wenn Geckeler angibt, dass bei seiner günstigsten Bodenform die Kesselringsspannung um 13 % überschritten wird, so dürfte dieser Wert nach obigen Resultaten zu niedrig sein, da diese Form am Äquator schärfer gekrümmt ist ( $\frac{R_1}{a} = \frac{0,75}{3}$ ) als die neue Bodenform ( $\frac{R_1}{a} = \frac{1}{3}$ ) und sich unter der Druckbelastung in eine Meridianform zu verbiegen trachtet, die der Gl. (3) genügt.