

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe  
**Autor:** Malkin, I.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83139>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe. — Der spezifische Energieverbrauch von Eisenbahn-Schnelltriebwagen in Stromlinienform. — Neuere Stahlkonstruktionen im Hochbau. — Die Riss-Sicherheit von Eisenbetonkonstruktionen. — Wettbewerb für das Bundesbrief-Archiv in Schwyz. — Die Rohrbruch-Katastrophe am Schwarzsee. — Mitteilungen: Die Rohr-Anlage des Hooverdamm-Kraftwerks am Colorado-River. Verderbnis der Bücher von Bibliotheken in

Industriegebieten. Glasseide und -Watte. Basler Rheinhavenverkehr. Grundwasserabsenkung beim Bau des Trockendocks Southampton. Dr. h. c. H. Behn-Eschenburg. Hochfrequenztechnik. Völlig geschweisster Wasserbehälter. Induktive Zugsicherung System „Signum“. Eidgen. Technische Hochschule. — Wettbewerbe: Bebauungsplan Lenzburg. — Nekrologe: Bada Braegger. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 103

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 2

### Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, South Philadelphia Works, Philadelphia, Pa.

Der nachstehende Artikel bringt zwei neue Scheibenprofile mit den zugehörigen Spannungsverteilungen, gekennzeichnet durch Einfachheit der erforderlichen Rechenarbeit.

1. Einleitung. Obwohl die Anzahl der bisher bekannten und in der Praxis allgemein benutzten teils graphischen, teils analytischen Verfahren zur Festigkeitsberechnung und Konstruktion von Dampfturbinen-Lauftragscheiben nicht gering ist, sieht man sich durch Erwägungen mannigfacher Natur häufig doch gezwungen, nach neuen Lösungen zu forschen. Ausschlaggebend ist hierbei die Forderung, die sonst umständlichen Rechnerarbeiten möglichst auf ein Minimum zu reduzieren und zu normalisieren, d. h. auf wenige elementare Operationen mit ein für allemal berechneten Normal-Zahlentabellen zurückzuführen. Im Nachstehenden werden zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe entwickelt, die der genannten Forderung in hohem Masse genügen. Beide Verfahren sind mit vergleichenden Beispielen belegt.

2. Die analytische Form des Problems. Das Problem der rotierenden Scheibe in der von A. Stodola herrührenden Näherungsgestalt ist verschiedener Darstellungsformen fähig.<sup>1)</sup> Einige von ihnen sollen sogleich aufgeführt werden.

Zunächst mögen die Bezeichnungen gelten:  $r$  = Radius,  $y$  = halbe Scheibendicke,  $u$  = Radialverschiebung,  $\sigma_r$  = Radialspannung,  $\sigma_t$  = Tangentialspannung,  $\nu$  = Poissonsche Konstante,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $\mu$  = spezifische Masse,  $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit.

Dann hat man als erste Darstellungsform des Problems das Differentialsystem

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dr}\right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left[\frac{2 + \nu}{y} \frac{dy}{dr} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr}\right)\right] \frac{\sigma_r}{r} + (3 + \nu) \mu \omega^2 = 0 \dots (1)$$

$$\frac{d(r y \sigma_r)}{dr} - y \sigma_t + \mu \omega^2 r^2 y = 0 \dots (2)$$

Eine äquivalente Form ergibt sich, wenn man die Spannungen durch die Radialverschiebung vermöge der Gleichungen

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r}\right), \quad \sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) \dots (3)$$

ausdrückt. Durch Einsetzen in (2) folgt dann nämlich

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r}\right) \frac{u}{r} + \frac{\mu \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} r = 0 \dots (4)$$

Eine dritte Darstellungsart ergibt sich, wenn man Gl. (2) mit der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} = (1 + \nu) \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} \dots (5)$$

kombiniert. Führt man dann eine gewisse Funktion  $S$  durch die Beziehungen

$$y \sigma_r = \frac{S}{r}, \quad y \sigma_t = \frac{dS}{dr} + \mu \omega^2 y r^2 \dots (6)$$

ein, so ist Gl. (2) identisch erfüllt, während Gl. (5) die Form

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dr}\right) \frac{dS}{dr} + \left(\frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r}\right) \frac{S}{r} + (3 + \nu) \mu \omega^2 y r = 0 \dots (7)$$

annimmt.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Siehe A. Stodola, Dampf- und Gas-Turbinen, 5. u. 6. Auflage, Abschnitte 74 und 181.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. A. Föppl, Vorl. über Techn. Mech. Bd. V.

Die Gleichungssysteme (3) und (4) einerseits und (6) und (7) andererseits mögen nun folgender Behandlung unterworfen werden:

Die variablen Koeffizienten der Grundgleichung in einer der Formen (4) oder (7) sind von der zu ermittelnden Funktion ( $\sigma_r$  bzw.  $S$ ) frei. Gesetzt, diese Koeffizienten seien durch eine Beziehung miteinander verknüpft, die eine Integrabilitätsbedingung der in Frage stehenden Differentialgleichung (4) bzw. (7) ist. Da die Koeffizienten nun, wie gesagt, von der zu ermittelnden Funktion frei sind, so ist die Integrabilitätsbedingung nichts anderes als eine Definitionsgleichung für  $y$ . Lässt sich diese integrieren, so hat man eine Lösung des Problems.

Diese Methode erweist sich als die Quelle zweier wichtiger Berechnungsverfahren, die nachstehend entwickelt werden.

3. Das Erste Exponentialprofil. Eine Integrabilitätsbedingung der bezeichneten Art ergibt sich unter Benutzung der folgenden elementaren Integrationsmethode von linearen Differentialgleichungen.<sup>3)</sup>

Greifen wir zunächst Gl. (4) ins Auge, so mögen folgende abkürzende Bezeichnungen gelten. Es seien  $P_2, P_1, P_0, P$  die Koeffizienten von  $d^2u:dr^2, du:dr, u$  und des von  $u$  und dessen Ableitungen freien Gliedes der Differentialgleichung (4):

$$P_2 = 1; \quad P_1 = \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}; \quad P_0 = \left(\frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r};$$
$$P = \frac{\mu \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} r.$$

Wird nun die Gleichung (4) nach den Regeln der partiellen Integration gliedweise integriert, so folgt

$$\int P dr + \int (P_0 - P_1' + P_2'') u dr + (P_1 - P_2') u + P_2 u' = 0$$

worin  $P_1' = dP_1:dr$ , usw. Somit ist die Ordnungszahl der Gl. (4) um die Einheit erniedrigt, falls  $P_0 - P_1' + P_2'' = 0$ , oder

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr}\right) = \frac{\nu}{r} \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr}\right)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Profilkurve  $y$ . Die Lösung lautet

$$y = a e^{-\beta r^{1+\nu}} \dots (8)$$

worin  $a$  und  $-\beta$  die beiden Integrationskonstanten sind. Für diese Profilkurve nimmt die ursprüngliche Differentialgleichung (4) die Gestalt

$$P_2 u' + (P_1 - P_2') u + \int P dr = 0$$

oder

$$\frac{du}{dr} + \frac{1 - (1 + \nu) \beta r^{1+\nu}}{r} u + \frac{\mu \omega^2 (1 - \nu^2)}{2 E} r^2 = C$$

an, wenn man mit  $C$  eine willkürliche Integrationskonstante bezeichnet.

Betrachtet man nun die reduzierte Gleichung

$$\frac{du}{dr} + \frac{1 - (1 + \nu) \beta r^{1+\nu}}{r} u - C = 0$$

und setzt für den Augenblick  $C = 0$ , so findet man eines der zwei Integrale der reduzierten Gleichung (4). Dieses erste Integral lässt sich leicht ermitteln zu

$$D \frac{e^{-\beta r^{1+\nu}}}{r} \dots (9)$$

worin  $D$  wiederum eine Integrationskonstante ist.

Das partikuläre Integral, das dem Gliede mit  $\omega^2$  in der ursprünglichen Differentialgleichung entspricht, ergibt sich jetzt durch Variation der Konstanten  $D$  im Integral (9). Dieses partikuläre Integral erscheint in endlicher Form,

<sup>3)</sup> Siehe A. Forsyth, Differentialgleichungen, Braunschweig, 1912, p. 101.

falls die Konstante  $\nu$  gleich 1:3 eingeführt wird; dann drückt sich nämlich dieses Integral durch

$$\frac{\mu\omega^2}{3E} r^3 \left[ \frac{1}{\beta r^{4/3}} + \frac{2}{(\beta r^{4/3})^2} + \frac{2}{(\beta r^{4/3})^3} \right] \dots \quad (10)$$

aus. Unter Benutzung der Gl. (3) ergeben sich auch die Spannungskomponenten, wie weiter unten angegeben. Das letzte der vorübergehend fortgelassenen Konstanten  $C$  entsprechende Integral wird wie folgt ermittelt.<sup>4)</sup>

Man betrachte die Differentialgleichung (1) in reduzierter Form, nämlich

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + r \left( 3 + r \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left[ (2 + \nu) r \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) \right] \sigma_r = 0 \dots \quad (11)$$

Wir dürfen uns auf die reduzierte Form der Gleichung beschränken, da das der Grösse  $\omega^2$  entsprechende partikuläre Integral in der Form (10) bereits bestimmt worden ist. Nun führen wir das Profil (8) in die Gl. (11) ein. Hierbei werde  $z = \beta r^{4/3}$  als neue unabhängige Variable angesehen. Mit den Beziehungen

$$r \frac{d}{dr} = \frac{4}{3} z \frac{d}{dz}, \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} = \frac{16}{9} \left( z^2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{4} z \frac{d}{dz} \right)$$

erhält man die Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dz^2} + \frac{1}{4} z (10 - 4z) \frac{d\sigma_r}{dz} - 2z \sigma_r = 0 \dots \quad (12)$$

anstatt der Gl. (11). Die Behandlung dieser Gleichung in verallgemeinerter Gestalt ist Gegenstand eines bekannten und theoretisch gründlich durchgearbeiteten Problems.<sup>5)</sup> Danach setzen wir das gesuchte zweite Integral als unendliche Reihe an:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (13)$$

Funktionentheoretischen Sätzen zufolge ist der Konvergenzbereich dieser Reihe durch den dem Punkte  $z = 0$  nächstliegenden „singulären“ Punkt bestimmt, für den der Koeffizient von  $d^2 \sigma_r / dz^2$  in der Gl. (12) verschwindet. Da dieser Koeffizient gleich  $z^2$  ist, so ist der Konvergenzradius gleich  $\infty$ : Die Reihe (13) konvergiert in der ganzen Ebene, d. h. für jeden endlichen Wert von  $z = \beta r^{4/3}$ . In der Tat, führt man die Reihe (13) in (12) ein, so folgt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{n+1}{n+3/2} \dots \quad (14)$$

Dies beweist, dass unsere Reihe (13) schneller konvergiert als diejenige für die Exponentialfunktion  $e^z$ , bei der das Verhältnis  $a_n : a_{n-1}$ , der Koeffizienten gegeben ist durch

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n}$$

Da die Exponentialreihe in der ganzen Ebene konvergiert, so gilt das Gleiche von unserer Reihe (13) erst recht. Führt man nun  $n = 1, 2, 3, \dots$  in Gl. (14) ein, so folgt

$$a_1 = \frac{4}{5} \frac{1}{1!}; \quad a_2 = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} \frac{1}{2!}; \quad a_3 = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{1}{3!};$$

$$a_4 = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \frac{1}{4!}; \quad \dots$$

Dementsprechend erhalten wir das dritte Integral für  $\sigma_r$  in der Form

$$\varphi_2 = 1 + \frac{4}{5} \frac{z}{1!} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} \frac{z^2}{2!} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{z^3}{3!} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (15)$$

Substituiert man diese Reihe in Gl. (2), so erhält man den Ausdruck

$$\frac{4 \cdot 6 \dots 2n \cdot (2n+2)}{5 \cdot 7 \dots (2n+3)} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} \right] \frac{z^n}{n!}$$

als allgemeines Glied der Reihe, die das dritte Integral für  $\sigma_t$  darstellt, sodass dieses dritte Integral die Form

$$\psi_2 = 1 + \frac{4}{5} \frac{z}{3} \frac{1}{1!} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} \frac{5}{9} \frac{z^2}{2!} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{1}{2} \frac{z^3}{3!} +$$

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \frac{7}{15} \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (16)$$

besitzt. Führt man ferner die Integrale (9) und (10) für die Verschiebung  $u$  in die Beziehungen (3) ein, so ergibt

<sup>4)</sup> Siehe Forsyth, 1. c., p. 573.

<sup>5)</sup> Siehe Forsyth, 1. c.

sich mit den erhaltenen Ausdrücken und unter Benutzung von (15) und (16) die Gesamtlösung in der Gestalt

$$\sigma_r = \frac{\mu\omega^2}{12} r^2 f(z) + K \varphi_1(z) + L \varphi_2(z) \dots \quad (17)$$

$$\sigma_t = \frac{\mu\omega^2}{12} r^2 g(z) + K \psi_1(z) + L \psi_2(z) \dots \quad (18)$$

worin  $K$  und  $L$  aus den Randbedingungen zu bestimmende Integrationskonstanten sind, während  $\mu$  die spezifische Masse und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bedeuten,

$$f(z) = \frac{9}{z} + \frac{6}{z^2} - \frac{6}{z^3} \quad g(z) = \frac{7}{z} + \frac{10}{z^2} + \frac{6}{z^3}$$

$$\varphi_1(z) = e^z \frac{2z-1}{z^{3/2}} \quad \psi_1(z) = e^z \frac{z+1}{z^{3/2}}$$

und die Funktionen  $\varphi_2$  und  $\psi_2$  oben angegeben sind; die Profilkurve ist durch (8) bestimmt.

4. Schema des Verfahrens beim Entwurf einer Scheibe des Ersten Exponentialprofils. Die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes können wie folgt zusammengestellt werden:

Für eine Scheibe des Profils

$$y = a e^{-z} \quad z = \beta r^{4/3} \dots \quad (19)$$

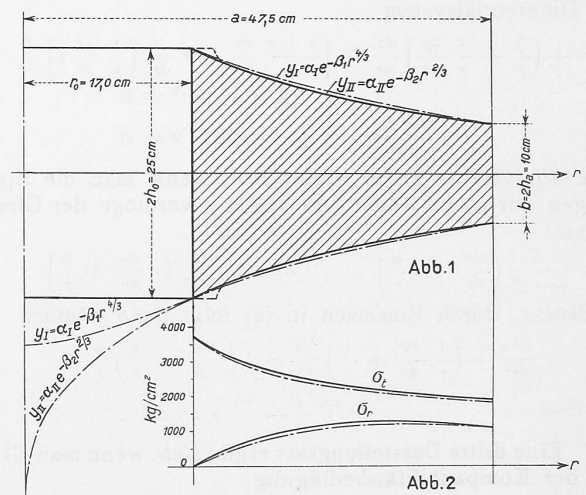
sind die Radialspannung  $\sigma_r$  und die Tangentialspannung  $\sigma_t$  durch die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{12} \mu \omega^2 r^2 f(z) + K \varphi_1(z) + L \varphi_2(z), \\ \sigma_t &= \frac{1}{12} \mu \omega^2 r^2 g(z) + K \psi_1(z) + L \psi_2(z) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

gegeben, worin (siehe Abb. 1)

$$\beta = \frac{2 \cdot 303}{a^{4/3} - r_0^{4/3}} \log_{10} \left( \frac{h_0}{h_a} \right) \dots \quad (21)$$

ist, während  $\mu$  die spezifische Masse und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bedeuten;  $K$  und  $L$  sind Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen zu ermitteln sind (siehe unten unter 4); endlich sind die Funktionen  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$ ,  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  einer ein für allemal zu berechnenden Normal-Tabelle zu entnehmen. Eine solche Tabelle findet der Leser in einem demnächst in den „Transactions of the American Society of Mechanical Engineers“ erscheinenden Artikel des gleichen Verfassers.



Das allgemeine Verfahren beim Entwurf einer Scheibe wird demnach in den folgenden Einzeloperationen bestehen:

a) Aus den Werten von  $r_0$ ,  $a$  und  $h_a$ , die beim praktischen Entwurf gewöhnlich gegeben sind, und  $h_0$ , das angenommen und variiert wird, folgt die Konstante  $\beta$  nach Gl. (21);

b) Mit der Konstanten  $\beta$  ergeben sich die Werte von  $z$  an der Bohrung ( $r = r_0$ ) und am Aussenrand ( $r = a$ ) nach Gl. (19); wir haben dann  $z_0 = \beta r_0^{4/3}$ ,  $z_a = \beta a^{4/3}$ ;

c) Für diese zwei Werte von  $z$  werden die entsprechenden Werte der Funktionen  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$ ,  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  der Normal-Tabelle entnommen und in die Formeln (20) eingesetzt;

d) Aus den zwei Randbedingungen  $\sigma_r = 0$  (bezw.  $\sigma_r = -p_0$ , worin  $p_0$  ein verhältnismässig kleiner Betrag ist, siehe das Beispiel im fünften Abschnitt) an der Bohrung ( $r = r_0$ ), und  $\sigma_r = \sigma_a$ , worin  $\sigma_a$  ein gegebener Betrag ist, bestimmt durch den Zentrifugalzug der Schaufeln, für  $r = a$ , ergeben sich mit Hilfe von (20) die Konstanten  $K$  und  $L$ ;

e) Mit den so gefundenen Werten von  $K$  und  $L$  lassen sich die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  leicht berechnen für jeden Punkt  $z$  mit Hilfe der Gl. (20) und der Normal-Tabelle.

Einige weitere praktische Regeln werden im nachstehenden Abschnitt gegeben.

Wir bemerken ferner, dass es für praktische Zwecke von gewissem Vorteil wäre,  $r^2 = z^{3/2} \beta^{-3/2}$  in die Glieder  $\frac{1}{12} \mu \omega^2 r^2 f(z)$  und  $\frac{1}{12} \mu \omega^2 r^2 g(z)$  der Gl. (20) einzuführen.

Dann nehmen diese Glieder die Form  $\frac{1}{12} \mu \omega^2 \beta^{-3/2} F(z)$

bzw.  $\frac{1}{12} \mu \omega^2 \beta^{-3/2} G(z)$  an, worin  $F$  und  $G$  Funktionen von  $z$  allein sind.

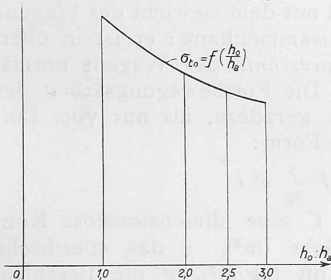
5. *Beispiel.* Es sei eine Scheibe für  $r_0 = 17,0$  cm und  $a = 47,5$  cm zu berechnen, falls die Randbreite  $b = 2h_a$ , durch die Schaufelabmessungen bestimmt, gleich 10,0 cm vorgeschrieben wird; die Arbeitsgeschwindigkeit möge  $n = 3600$  Uml/min betragen, die Radialspannung am Rande  $r = a$  der Scheibe, durch den Zentrifugalzug der Schaufelung ausgeübt, sei gleich 910 kg/cm<sup>2</sup> bei 20 % Uebergeschwindigkeit, die der Rechnung zugrundegelegt werden soll.

Nach Punkt 1 des oben gegebenen Schemas findet man  $\beta = 0,0179 \lg_{10} (2h_0 : 10,0)$

Für das Verhältnis  $2h_0 : 10,0$  setze man nun der Reihe nach die Werte 2,0; 2,5; 3,0 ein. Mit den entsprechenden Werten von  $\beta$  ergeben sich dann nach Punkt b) des Schemas diejenigen von  $z_0$  und  $z_a$ , und mit den Randbedingungen  $\sigma_{r0} = 0$  bzw.  $\sigma_{ra} = 910$  kg/cm<sup>2</sup> für  $n_0 = 1,2 \cdot 3600 = 4320$  führt dann die Rechnung nach obigem Schema auf Tangentialspannungen  $\sigma_t$  an der Bohrung, die gleich sind

4100 kg/cm <sup>2</sup>	für $2h_0 : 10,0 = 2,0$
3650 "	" $2h_0 : 10,0 = 2,5$
3450 "	" $2h_0 : 10,0 = 3,0$

Abb. 3



Die hierdurch gegebene Abhängigkeit der Tangentialspannung an der Bohrung vom Verhältnis  $2h_0 : 10,0$  ist in Abb. 3 graphisch dargestellt. Für  $2h_0 : 10,0 = 1,0$  ist die Ordinate des Diagramms aus den bekannten Formeln für die Scheibe konstanter Dicke berechnet worden.

An Hand dieses Diagramms hat man sich für das Verhältnis  $h_0 : h_a$  zu entscheiden. Im vorliegenden Beispiel nehmen wir  $2h_0 : 10,0 = 2,5$  an, was auf  $\beta = 0,00713$  führt. Mit diesem Werte ist nun die Spannungsverteilung der Scheibe zu berechnen. Während aber die Berechnung des Diagramms Abb. 3 unter Zuhilfenahme von Interpolationen geschehen darf, empfiehlt es sich, bei der endgültigen Spannungsberechnung genauer vorzugehen. Bei der Benutzung der erwähnten Interpolationen nämlich werden die dadurch eingeführten Fehler im Laufe der Rechnungen mit grossen Zahlen multipliziert. Dies beeinträchtigt die Genauigkeit der Resultate erheblich. Daher ist es besser, die gegebenen Randbedingungen derart etwas abzuändern, dass die in der Normal-Tabelle gegebenen Zahlenwerte ohne irgendwelche Interpolationen gebraucht werden können. Die hierbei entstehenden Abweichungen vom gesuchten Resultat sind im allgemeinen kleiner, als die durch Interpolationen erzeugten Fehler. Ausserdem sind diese durch ungenaue Erfüllung der Randbedingungen verursachten

Differenzen auch aus dem Grunde vernachlässigbar, weil in der Praxis die Bedingungen am Rande sowieso nicht genau formuliert werden können.

Die auf dieser Grundlage durchgeführte Rechnung ergibt die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

r cm	y cm	$\sigma_r$ atm	$\sigma_t$ atm
16,50	12,90	-35	3680
27,80	9,55	975	2400
37,70	7,06	1105	1980
43,80	5,80	1030	1770
48,10	4,98	910	1645

Das Profil und die Spannungen sind danach in den Abb. 1 und 2 dargestellt.

6. *Das Zweite Exponentialprofil.* Wendet man die Methode der Integrabilitätsbedingung auf Gl. (7) an, so erhält man eine neue Lösung, gekennzeichnet durch die Profilkurve

$$y = a e^{-z} \quad z = \beta r^{3/2} \quad \dots (22)$$

die wir als „das Zweite Exponentialprofil“ bezeichnen wollen. Die Spannungen sind mit  $\nu = 1:3$  durch die Ausdrücke

$$\sigma_r = \frac{3L}{z^3} + M \frac{e^z}{z^3} (-6 + 6z - 3z^2) + \frac{\mu \omega^2}{12 \beta^3} (60 + 45z + 18z^2) \quad \dots (23)$$

$$\sigma_t = -\frac{L}{z^3} (3 + 2z) + M \frac{e^z}{z^3} (6 - 2z - z^2) + \frac{\mu \omega^2}{12 \beta^3} (60 + 35z + 12z^2) \quad \dots (24)$$

gegeben, worin  $L$  und  $M$  die zwei willkürlichen Integrationskonstanten sind, während  $\beta$  durch das Verhältnis  $h_0 : h_a$  bestimmt ist, wenn man mit  $h_0, h_a$  die Werte von  $y$  an der Bohrung ( $r = r_0$ ) bzw. am Aussenrande ( $r = a$ ) bezeichnet.

Diese Lösung ist dadurch bemerkenswert, dass bei ihr die Spannungen sowohl als auch das Profil durch geschlossene Ausdrücke gegeben erscheinen. Dies verbürgt erhebliche praktische Vorteile. Erstens kann diese Lösung auch für solche Scheibenteile benutzt werden, die durch steilere Profilkurven charakterisiert sind. Für solche Teile nämlich, wie sie in der Verbindung zwischen eigentlichem Rad und dem Radkranz vorkommen, nimmt  $\beta$  einen grossen negativen Wert an; die Formeln des „Ersten Exponentialprofils“ können dann nicht benutzt werden, da die entsprechenden Reihen zur Berechnung der Spannungen in der Umgebung grossen  $\beta$ -Werte sehr langsam konvergieren. Ein derartiger Einwand ist natürlich ausgeschlossen bei der Lösung (23), (24). Es ist allerdings zu bemerken, dass das ganze der Berechnung zugrundeliegende Näherungsverfahren desto ungenauer wird, je steiler die Profilkurve ist. Zweitens aber lassen sich diese in (23), (24) vorkommenden geschlossenen Funktionen sehr viel leichter berechnen und tabulieren, und zwar in solcher Intervalleinteilung, dass das prinzipiell immer unerwünschte Interpolieren unnötig wird. Die Normal-Tabelle dieser Funktionen soll später veröffentlicht werden. Es sind dies die Funktionen

$$\begin{aligned} f(z) &= 60 + 45z + 18z^2; & \varphi_1(z) &= \frac{3}{z^3}; \\ g(z) &= 60 + 35z + 12z^2; & \psi_1(z) &= -\frac{3+2z}{z^3}; \\ \varphi_2(z) &= \frac{e^z}{z^3} (-6 + 6z - 3z^2); \\ \psi_2(z) &= \frac{e^z}{z^3} (6 - 2z - z^2), \end{aligned}$$

mit deren Hilfe alle Berechnungen genau in der gleichen Weise ausgeführt werden können, wie beim „Ersten Exponentialprofil“.

Selbstverständlich ist der Vergleich beider Profile miteinander von praktischem Interesse. Es mögen die beiden Profilkurven

$$y_I = \alpha_I e^{-\beta_I r^{4/3}} \quad y_{II} = \alpha_{II} e^{-\beta_{II} r^{2/3}}$$

die zwei Punkte  $r = r_0, y = y_0$  und  $r = a, y = y_a$

miteinander verbinden. Dann ist

$$\alpha_I e^{-\beta_I r_0^{4/3}} = \alpha_{II} e^{-\beta_{II} r_0^{2/3}}$$

und  $\alpha_I e^{-\beta_I a^{4/3}} = \alpha_{II} e^{-\beta_{II} a^{2/3}}$ .

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$y_{II} : y_I = e^{\beta_{II}(a^{2/3} - r^{2/3})} (r_0^{2/3} - r^{2/3})$$

Diese letzte Gleichung zeigt, dass  $y_{II}$  stets kleiner ist als  $y_I$ , wenn sich die beiden Kurven in den Randpunkten  $r = r_0$  und  $r = a$  schneiden. Die Profilkurve I (Erstes Exponentialprofil) hat in  $r = 0$  eine Horizontaltangente (Abb. 1), die Profilkurve II hat daselbst eine Vertikaltangente (Abb. 1).

Als Beispiel behandeln wir hier die gleiche Aufgabe, wie im Abschnitt 5, unter Verwendung des neuen Profils. Das Verfahren ist das gleiche wie dem Schema des Abschnitts 4 für das Erste Exponentialprofil entsprechend. So finden wir für  $h_0 : h_a = 2,5$ :

$$\beta = \frac{2,303}{47,5^{2/3} - 17,0^{2/3}} \lg_{10} \left( \frac{2h_0}{10,0} \right) = 0,263$$

Nach der Formel  $z = \beta r^{2/3}$  ergeben sich die Werte von  $z$  an der Bohrung ( $r = r_0$ ) und am Aussenrand ( $r = a$ ). In die weiteren Rechnungen führen wir nun die abgerundeten Werte  $z_0 = 0,93$  und  $z_a = 1,86$  ein den praktischen Regeln entsprechend, die wir oben angegeben haben. Mit  $\sigma_{r_0} = -20 \text{ kg/cm}^2$  für  $z = z_0 = 0,93$  und  $\sigma_{r_a} = 925 \text{ kg/cm}^2$  für  $z = z_a = 1,86$  erhalten wir aus unseren Gl. (23), (24)  $L = 3740 \text{ kg/cm}^2$   $M = 2070 \text{ kg/cm}^2$

Unter Benutzung dieser Werte von  $L$  und  $M$  und desjenigen von  $\beta$  ergibt sich die folgende Tabelle für das Profil bzw. die Spannungsverteilung:

r cm	y cm	$\sigma_r$ atm	$\sigma_t$ atm
16,90	12,90	-20	3730
18,85	12,05	327	3340
26,35	7,29	965	2550
34,55	9,35	1200	2160
43,50	5,66	1100	1870
47,85	5,08	930	1725

Das errechnete Profil und die Spannungsverteilung sind gleichfalls in den Abb. 1 und 2 dargestellt.

### Der spezifische Energieverbrauch von Eisenbahn-Schnelltriebwagen in Stromlinienform.

Von Professor Dr. W. KUMMER, Ingenieur, Zürich.

Dass die von der elektrischen Zugförderung in Gebrauch gebrachte Kennziffer des spezifischen Arbeitsverbrauchs von Eisenbahnen, die in üblicher Weise in Wattstunden pro Tonnenkilometer (Wh/tkm) ausgedrückt wird, nicht für alle Typen des Bahnverkehrs zweckmässig ist, zeigten wir vor etwa fünf Jahren am Beispiel der eigentlichen Bergbahnen, für die sich leicht eine besser geeignete Kennziffer aufstellen liess.<sup>1)</sup>

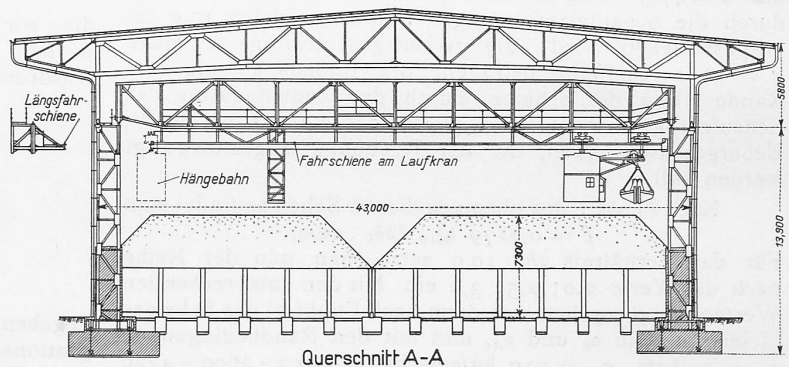
Auch für Eisenbahn-Schnelltriebwagen in Stromlinienform ist die übliche Kennziffer unzureichend, indem sie ebenfalls der Bedingung relativer Invarianz zu wenig entspricht. Verlangt doch die übliche, in Wh/tkm ausgedrückte Kennziffer  $a$  eine Bezugnahme der, in kg/t gegebenen,

<sup>1)</sup> Vgl. S. 293 von Bd. 93 (am 15. Juni 1929).



Abb. 3. Teilansicht des Laufkrans.

Abb. 4 (unten). Querschnitt der Halle. 1 : 500.



Widerstandszahl  $w$  auf das *Zugsgewicht*, wobei dann, wenn der Einfachheit halber eine Fahrt auf gerader und horizontaler Bahn, mit konstanter Geschwindigkeit, vorausgesetzt ist,  $a = 2,724 w$  gilt. Für Eisenbahn-Schnelltriebwagen in Stromlinienform ist jedoch der, bei gegebener konstanter Geschwindigkeit zu überwindende Widerstand mit dem Gewicht des Wagens nur noch in mittelbarem Zusammenhang; er ist in überwiegendem Masse an den *Querschnitt* des Wagens normal zur Fahrtrichtung gebunden. Die Fortbewegungsarbeit des Wagens (Wh) kann nämlich geradezu, als nur vom Luftwiderstand bestimmt, in der Form:

$$A = CF \frac{\gamma}{2g} v^2 l$$

geschrieben werden, wobei  $C$  eine dimensionslose Konstante,  $F$  die Querschnittfläche ( $m^2$ ),  $\gamma$  das spezifische Gewicht der umgebenden Luft ( $kg/m^3$ ),  $g$  die Beschleunigung der Erdschwere ( $m/sec^2$ ),  $v$  die Wagensgeschwindigkeit ( $m/sec$ ) und  $l$  die Bahnlänge ( $km$ ) bedeuten. Nun stellt

$$\frac{\gamma}{2g} v^2 = p$$

den sog. *Staudruck* der verdrängten Luft ( $kg/m^2$ ) dar.

Beziehen wir die Arbeit:

$$A = CF p l$$

auf das Produkt  $p l$ , dem wir die Bezeichnung „Staudruck-Kilometer“ geben dürfen, so erhalten wir eine spezifische Energieverbrauchsziffer:

$$a = \frac{A}{p l} = CF \left( \frac{Wh}{km \text{ kg/m}^2} \right)$$

die für Schnelltriebwagen in Stromlinienform, wo  $C$  für aerodynamisch richtige Wagenform und  $F$  für gegebene Spurweite der Bahn, kaum erheblichen Veränderungen ausgesetzt sind, in genügend weiten Grenzen den Charakter der relativen Invarianz besitzen dürfte.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Vgl. zu dieser Frage unseren Bericht „Ueber den Luftwiderstand von Fahrzeugen“, Bd. 102, S. 297\* (9. Dezember 1933). Red.