Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 103/104 (1934)
Heft: 22

Inhaltsverzeichnis

Band 103

Nr. 22

Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz.

Von Prof. Dr. NIKLAUS KRYLOFF u. Dr. NIKLAUS BOGOLIUBOFF, Kieff.[1])

Schwingungsfähige Systeme, bei denen die „elastische“ Kraft nicht dem Hooke-schen Gesetz gehorcht, oder die Reibung der Geschwindigkeit nicht proportional ist, erlangen in der Technik immer grössere Bedeutung. Der folgende Aufsatz ist ein erster Versuch, die von den Verfassern zur Untersuchung derartiger Schwingungen ausgearbeiteten Methoden der Nicht-linearen Mechanik anhand des einfachsten Falls eines harmonischen Störungen unterworfenen nicht-linearen Systems von einem Freiheitsgrad zu popularisieren. Es werden Verfahren angegeben zur Auffindung der ungedämpften Eigenschwingungen solcher Systeme, sowie der erzwungenen Schwingungen in der Nähe der Resonanz. Diese tritt nicht nur, wie im linearen Fall, bei Uebereinstimmung der Eigenfrequenz mit der Störfrequenz selber ein, sondern zudem bei Koinzidenz mit einem Unterton der harmonischen Störung. Für die stationären Lösungen wird eine Stabilitätsbedingung hergeleitet. Die Wichtigkeit der folgenden Merkmale wird erläutert: steigende und fallende Reibungscharakteristik, aktive und passive Nicht-Linearität. Verschiedene „krumme Resonanzen“ werden gezeigt. Als Anwendungsbeispiel wird zum Schluss auf einen Flugmotor hingewiesen, dessen Kurbelwelle, mit der Propellerwelle durch eine „LZ“-Kupplung verbunden, gefährlichen Drehschwingungen ausgesetzt sein kann.

§ 1. Die nicht-linearen, in verschiedenen Problemen der Technik angetroffenen Schwingungen ziehen in der letzten Zeit besondere Aufmerksamkeit auf sich.[2]) Dies ist einer Reihe von Umständen zu verdanken, wie z. B. der Verwendung von elastischen Systemen in der Technik, bei denen die rücktreibende Kraft der Deformation nicht proportional ist. Elastische Systeme solcher Art mit „nicht-linearer“ Charakteristik treten bei der Verwendung von Stoffen auf, die dem Hooke'schen Gesetz offenkundig nicht gehorchen (Gummi, Beton, Gusseisen usw.), ferner bei der Einführung spezieller Konstruktionen, die in die Charakteristiken ein Element der Nicht-Linearität tragen (z. B. die sog. nicht-linearen Federn) usw. Ausserdem erscheint die Nicht-Linearität mechanischer Systeme oft als nicht-lineare Abhängigkeit der Reibungskräfte von der Geschwindigkeit (trockene Reibung).

Die Eigenschaften der nicht-linearen mechanischen Systeme sind im allgemeinen sehr wenig erforscht, was die Möglichkeiten ihrer praktischen Anwendung einengt. Dies gilt besonders hinsichtlich eines so wichtigen technischen Phänomens, wie der Resonanz, die bei nicht-linearen Systemen unter völlig anderen Bedingungen verläuft und sich tief von der Resonanz linearer Systeme unterscheidet.

Der Grund für die verhältnismässig geringe Erforschtheit der nicht-linearen Schwingungen liegt am Fehlen eines passenden mathematischen Apparates, was sich seinerseits aus den Schwierigkeiten erklärt, die bei den Versuchen einer auch nur qualitativen Auflösung der nicht-linearen Differentialgleichungen auftauchen, denn die bezüglichen numerischen und graphischen Verfahren sind im Allgemeinen aus verständlichen Gründen nicht zu gebrauchen.

Die Ausarbeitung von dieser schwierigen und wichtigen Frage angemessenen mathematischen Methoden erscheint deshalb unerlässlich, umsomehr als auch die experimentelle Erforschung gestützt auf eine vorgängige Theorie produktiver wird, die es erlaubt, das zu untersuchende Phänomen, wenn auch nur grosso modo, vorherzusehen. Diese Methoden sind von den Verfassern des vorliegenden Aufsatzes in einer Reihe von (teilweise noch ungedruckten) Arbeiten[3]) gegeben worden. Zusammen machen sie die Darstellung der Lehre aus, der die Verfasser die Bezeichnung „Nicht-Lineare Mechanik“ darum beilegten, weil diese Methoden speziell im Hinblick auf nicht-lineare Schwingungen verschiedener Art geschaffen worden sind und deshalb in einer Reihe von angewandten Wissenschaften Verwendung finden.

Es ist klar, dass diese Methoden auch auf verschiedene Probleme der Bau-Mechanik anwendbar sind, insbesondere auf die Theorie der Fundamente, das Studium von Rahmen-Konstruktionen usw. In diesem Aufsatz werden die Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihrer Anwendung auf Systeme von einem Freiheitsgrad auseinandergesetzt, wobei die Darstellung, für Ingenieure bestimmt, als ein Versuch der Popularisierung dieser Methoden erscheint und darum recht elementar gehalten ist, mitunter sogar zum Schaden der mathematischen Strenge.

§ 2. Indem wir uns dem Studium der Resonanzerscheinungen in Systemen mit einem Freiheitsgrade zuwenden, wollen wir uns der Einfachheit halber auf den Fall einer harmonischen Störungsfunktion (einer sinusoidalen äusseren Kraft) beschränken. Dann wird der Gegenstand unserer Untersuchung eine Differentialgleichung der folgenden allgemeinen Gestalt sein[4]):

$$\ddot{x} + p(x) = F \cos \alpha t - f(\dot{x}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

worin $p(x)$ die rücktreibende Kraft und $f(\dot{x})$ die Reibung — irgend eine Funktion der Geschwindigkeit — bedeuten. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall, wo im Augenblick des Störbeginns das System sich in einem der Rube nahen Zustand befindet, d. h. wo die anfänglichen Werte von x, $\dot{x}$ ... sehr klein sind.[5]) Wie aus den Untersuchungen der Verfasser hervorgeht, findet (wie auch physikalisch einleuchtet) Resonanz bei „annähernder“ Uebereinstimmung der Störfrequenz und der Frequenz einer der Harmonischen der Eigenschwingung statt, d. h. wenn ω (die Eigenfrequenz) sich α/p nähert, wo p eine ganze Zahl ist. Der linearen Theorie zufolge, auf die man sich in Ermangelung eines passenden mathematischen Apparates häufig beschränkt, tritt Resonanz nur bei $p = 1$ auf.

Indessen hat die Praxis trotzdem gewisse Vorstellungen über das Auftreten von Resonanz beim Zusammenfallen der Störfrequenz mit Frequenzen der höheren Harmonischen.[6]) Dieser, übrigens streng begründbare Vorgang wird durch die Bemerkung unmittelbar klar, dass die von der Störkraft geleistete Arbeit von der Form

$$\dot{x}(t) F \cos \alpha t \, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist, sodass die über eine hinreichend lange Zeitspanne gemittelte zugeführte Arbeit nur dann von Null verschieden ist und so den Reibungsverlust nur dann zu kompensieren vermag, wenn α angenähert mit einer der harmonischen Frequenzen der Funktion $x(t)$ zusammenfällt. In der Tat wird, wenn $x(t) = \sum_n A_n \sin(\lambda_n t + \varphi_n)$, offenbar

$$\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}(t) \cos \alpha t \, dt = \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n - \alpha) T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n - \alpha) T} + \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n + \alpha) T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n + \alpha) T}.$$

[1]) Aus dem Russischen übersetzt von K. H. Grossmann.

[2]) Vgl. z. B. den Aufsatz „Forced vibrations with non-linear spring constants“ von J. P. Den Hartog und S. J. Mikina, Transactions A. S. M. E. 1932, APM-54-15, S. 157 fg.

[3]) Vgl. den Literaturnachweis am Ende des Aufsatzes.

[4]) Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

[5]) Es wird sich eine stabile Amplitude einstellen, auch wenn diese Anfangsbedingungen nicht erfüllt sind. Sind sie erfüllt, so wird sich die *kleinste* stabile Amplitude einstellen (siehe weiter unten). Der Beweis dieser Behauptung würde hier zu viel Raum beanspruchen.

[6]) Davon spricht z. B. J. Baker, Transactions A. S. M. E., l. c. S. 162.