

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 22

**Artikel:** Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz  
**Autor:** Kryloff, Niklaus / Bogoliuboff, Niklaus  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83220>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz. — Eisen-Beton-Verbundkonstruktionen Alpha. — Das neue Krankenhaus von Colmar. — Theoretische Wartefristen bei einer Bausparkasse. — Mitteilungen: Die neue deutsche Wettbewerbsordnung. Der Braunkohlen-Abbau in Hostens bei Bordeaux. Neue Wege zu billiger

Spitzenkraft. Eisenbahnfedern und ihre Fertigung. Autofähre über den Firth of Forth, Schottland. — Nekrologe: Max Carstanjen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Lignum schweizerische Arbeitsgemeinschaft für das Holz. — Elektrotechnische Abteilung der E. T. H. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 103

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 22

## Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz.

Von Prof. Dr. NIKLAUS KRYLOFF u. Dr. NIKLAUS BOGOLIUBOFF, (Kiew.<sup>1)</sup>)

Schwingungsfähige Systeme, bei denen die „elastische“ Kraft nicht dem Hooke'schen Gesetz gehorcht, oder die Reibung der Geschwindigkeit nicht proportional ist, erlangen in der Technik immer grössere Bedeutung. Der folgende Aufsatz ist ein erster Versuch, die von den Verfassern zur Untersuchung derartiger Schwingungen ausgearbeiteten Methoden der Nicht-linearen Mechanik anhand des einfachsten Falls eines harmonischen Störungen unterworfenen nicht-linearen Systems von einem Freiheitsgrad zu popularisieren. Es werden Verfahren angegeben zur Auffindung der ungedämpften Eigenschwingungen solcher Systeme, sowie der erzwungenen Schwingungen in der Nähe der Resonanz. Diese tritt nicht nur, wie im linearen Fall, bei Uebereinstimmung der Eigenfrequenz mit der Störfrequenz selber ein, sondern zudem bei Koinzidenz mit einem Unterton der harmonischen Störung. Für die stationären Lösungen wird eine Stabilitätsbedingung hergeleitet. Die Wichtigkeit der folgenden Merkmale wird erläutert: steigende und fallende Reibungscharakteristik, aktive und passive Nicht-Linearität. Verschiedene „krumme Resonanzen“ werden gezeigt. Als Anwendungsbeispiel wird zum Schluss auf einen Flugmotor hingewiesen, dessen Kurbelwelle, mit der Propellerwelle durch eine „LZ“-Kupplung verbunden, gefährlichen Dreherschwingungen ausgesetzt sein kann.

§ 1. Die nicht-linearen, in verschiedenen Problemen der Technik angetroffenen Schwingungen ziehen in der letzten Zeit besondere Aufmerksamkeit auf sich.<sup>2)</sup> Dies ist einer Reihe von Umständen zu verdanken, wie z. B. der Verwendung von elastischen Systemen in der Technik, bei denen die rücktreibende Kraft der Deformation nicht proportional ist. Elastische Systeme solcher Art mit „nicht-linearer“ Charakteristik treten bei der Verwendung von Stoffen auf, die dem Hooke'schen Gesetz offenkundig nicht gehorchen (Gummi, Beton, Gusseisen usw.), ferner bei der Einführung spezieller Konstruktionen, die in die Charakteristiken ein Element der Nicht-Linearität tragen (z. B. die sog. nicht-linearen Federn) usw. Ausserdem erscheint die Nicht-Linearität mechanischer Systeme oft als nicht-lineare Abhängigkeit der Reibungskräfte von der Geschwindigkeit (trockene Reibung).

Die Eigenschaften der nicht-linearen mechanischen Systeme sind im allgemeinen sehr wenig erforscht, was die Möglichkeiten ihrer praktischen Anwendung einengt. Dies gilt besonders hinsichtlich eines so wichtigen technischen Phänomens, wie der Resonanz, die bei nicht-linearen Systemen unter völlig anderen Bedingungen verläuft und sich tief von der Resonanz linearer Systeme unterscheidet.

Der Grund für die verhältnismässig geringe Erforschtheit der nicht-linearen Schwingungen liegt am Fehlen eines passenden mathematischen Apparates, was sich seinerseits aus den Schwierigkeiten erklärt, die bei den Versuchen einer auch nur qualitativen Auflösung der nicht-linearen Differentialgleichungen auftauchen, denn die bezüglichen numerischen und graphischen Verfahren sind im Allgemeinen aus verständlichen Gründen nicht zu gebrauchen.

Die Ausarbeitung von dieser schwierigen und wichtigen Frage angemessenen mathematischen Methoden erscheint deshalb unerlässlich, umsomehr als auch die experimentelle Erforschung gestützt auf eine vorgängige Theorie produktiver wird, die es erlaubt, das zu untersuchende Phänomen, wenn auch nur grosso modo, vorherzusehen. Diese Methoden sind von den Verfassern des vorliegenden Aufsatzes in einer Reihe von (teilweise noch ungedruckten) Arbeiten<sup>3)</sup> gegeben worden. Zusammen machen sie die

Darstellung der Lehre aus, der die Verfasser die Bezeichnung „Nicht-Lineare Mechanik“ darum beilegen, weil diese Methoden speziell im Hinblick auf nicht-lineare Schwingungen verschiedener Art geschaffen worden sind und deshalb in einer Reihe von angewandten Wissenschaften Verwendung finden.

Es ist klar, dass diese Methoden auch auf verschiedene Probleme der Bau-Mechanik anwendbar sind, insbesondere auf die Theorie der Fundamente, das Studium von Rahmenkonstruktionen usw. In diesem Aufsatz werden die Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihrer Anwendung auf Systeme von einem Freiheitsgrad auseinandergesetzt, wobei die Darstellung, für Ingenieure bestimmt, als ein Versuch der Popularisierung dieser Methoden erscheint und darum recht elementar gehalten ist, mitunter sogar zum Schaden der mathematischen Strenge.

§ 2. Indem wir uns dem Studium der Resonanzerscheinungen in Systemen mit einem Freiheitsgrade zuwenden, wollen wir uns der Einfachheit halber auf den Fall einer harmonischen Störungsfunktion (einer sinusoidalen äusseren Kraft) beschränken. Dann wird der Gegenstand unserer Untersuchung eine Differentialgleichung der folgenden allgemeinen Gestalt sein<sup>4)</sup>:

$$\ddot{x} + p(x) = F \cos \alpha t - f(\dot{x}), \dots \dots (1)$$

worin  $p(x)$  die rücktreibende Kraft und  $f(\dot{x})$  die Reibung — irgend eine Funktion der Geschwindigkeit — bedeuten. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall, wo im Augenblick des Störbeginns das System sich in einem der Ruhe nahen Zustand befindet, d. h. wo die anfänglichen Werte von  $x, \dot{x} \dots$  sehr klein sind.<sup>5)</sup> Wie aus den Untersuchungen der Verfasser hervorgeht, findet (wie auch physikalisch einleuchtet) Resonanz bei „annähernder“ Uebereinstimmung der Störfrequenz und der Frequenz einer der Harmonischen der Eigenschwingung statt, d. h. wenn  $\omega$  (die Eigenfrequenz) sich  $\alpha/p$  nähert, wo  $p$  eine ganze Zahl ist. Der linearen Theorie zufolge, auf die man sich in Ermangelung eines passenden mathematischen Apparates häufig beschränkt, tritt Resonanz nur bei  $p = 1$  auf.

Indessen hat die Praxis trotzdem gewisse Vorstellungen über das Auftreten von Resonanz beim Zusammenfallen der Störfrequenz mit Frequenzen der höheren Harmonischen.<sup>6)</sup> Dieser, übrigens streng begründbare Vorgang wird durch die Bemerkung unmittelbar klar, dass die von der Störkraft geleistete Arbeit von der Form

$$\dot{x}(t) F \cos \alpha t dt \dots \dots (2)$$

ist, sodass die über eine hinreichend lange Zeitspanne gemittelte zugeführte Arbeit nur dann von Null verschieden ist und so den Reibungsverlust nur dann zu kompensieren vermag, wenn  $\alpha$  angenähert mit einer der harmonischen Frequenzen der Funktion  $x(t)$  zusammenfällt. In der Tat wird, wenn  $x(t) = \sum_n A_n \sin(\lambda_n t + \varphi_n)$ , offenbar

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \cos \alpha t dt = \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n - \alpha)T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n - \alpha)T} + \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n + \alpha)T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n + \alpha)T}$$

<sup>4)</sup> Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

<sup>5)</sup> Es wird sich eine stabile Amplitude einstellen, auch wenn diese Anfangsbedingungen nicht erfüllt sind. Sind sie erfüllt, so wird sich die kleinste stabile Amplitude einstellen (siehe weiter unten). Der Beweis dieser Behauptung würde hier zu viel Raum beanspruchen.

<sup>6)</sup> Davon spricht z. B. J. Baker, Transactions A.S.M.E., 1. c. S. 162.

<sup>1)</sup> Aus dem Russischen übersetzt von K. H. Grossmann.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. den Aufsatz „Forced vibrations with non-linear spring constants“ von J. P. Den Hartog und S. J. Mikina, Transactions A. S. M. E. 1932, APM-54-15, S. 157 fg.

<sup>3)</sup> Vgl. den Literaturnachweis am Ende des Aufsatzes.

Infolgedessen kann bei grossem  $T$  der „mittlere“ Wert des Ausdrucks (2), d. h.

$$\frac{F}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \cos \alpha t dt,$$

nur dann nicht sehr klein sein, wenn  $\alpha$  sich einer der Frequenzen  $\lambda_n$  nähert. Wenn also nicht eine dieser Frequenzen wenigstens annähernd mit der Störungsfrequenz zusammenfällt, d. h. bei Abwesenheit von Resonanz, wird im Mittel jene Arbeitszufuhr nicht vorhanden sein, die im Resonanzfall das Anwachsen der Schwingungsamplitude ermöglicht.

Sagen wir nun, im Hinblick auf die Untersuchung der Gl. (1), Einiges über die ungedämpften Eigenschwingungen

$$\ddot{x} + p(x) = 0 \quad (3)$$

In vielen praktisch wichtigen Fällen<sup>7)</sup> bietet die Untersuchung solcher Schwingungen keine Schwierigkeit und ist bekannt.

§ 3. Nehmen wir z. B. den in der Praxis sehr häufigen Fall, wo die Störkraft mit genügender Genauigkeit durch ein kubisches Polynom dargestellt werden kann:

$$p(x) = n^2 x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad (4)$$

Mit den Ansatz  $x = z(w)$ ,  $w = \omega t + \psi$ ,  $\psi = \text{konst}$ , wobei die Funktion  $z(w)$  hinsichtlich der Variablen  $w$  die Periode  $2\pi$  besitze, bekommen wir offenbar:

$$\omega^2 z'' + p(z) = 0 \quad (5)$$

Benutzen wir zur Bestimmung der Funktion  $z$  und der Frequenz  $\omega$  die folgenden Zerlegungen:

$$z = a z_0 + a^2 z_1 + a^3 z_2 + \dots; \quad \omega^2 = \nu_0 + a \nu_1 + a^2 \nu_2 + \dots \quad (6)$$

wobei wir den Funktionen  $z_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), die Bedingung der Periodizität (mit der Periode  $2\pi$ ) auferlegen. Bei Einsetzung der Reihen (6) in der Gl. (5) und Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von  $a$  erhalten wir die folgenden Beziehungen:

$$\nu_0 z_0'' + n^2 z_0 = 0, \quad (7)$$

$$\nu_0 z_1'' + n^2 z_1 = -\beta z_0^2 - \nu_1 z_0'' \quad (8)$$

Der Gleichung (7) genügen  $z_0 = \cos w$ ;  $\nu_0 = n^2$ .

Eingesetzt in (8):  $(z_1'' + z_1)n^2 = -\frac{\beta}{2}(1 + \cos 2w) + \nu_1 \cos w$ .

Dieser Beziehung genügen die Werte:  $z_1 = -\frac{\beta}{2n^2} + \frac{\beta}{6n^2} \cos 2w$ ,  $\nu_1 = 0$ .

Auf diese Weise kann man beliebig viele Glieder der Reihen (6) bestimmen. Hört man z. B. bei der dritten Potenz von  $a$  auf, bekommt man:

$$x = -\frac{\beta}{2n^2} a^2 + a \cos(\omega t + \psi) + \frac{\beta}{6n^2} a^2 \cos 2(\omega t + \psi) + \left(\frac{\gamma}{32n^2} + \frac{\beta}{48n^4}\right) a^3 \cos 3(\omega t + \psi), \quad (9)$$

worin

$$\omega^2 = n^2 + \left(\frac{3}{4}\gamma - \frac{5}{6}\frac{\beta^2}{n^2}\right) a^2, \quad \psi = \text{konst} \quad (10)$$

Analog verfährt man offenbar, wenn  $p(x)$  ein Polynom von höherem als dritten Grade ist.

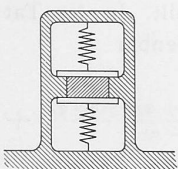


Abb. 1

§ 4. In andern, praktisch wichtigen Fällen erscheint  $p(x)$  als eine gebrochene Linie.  $p(x)$  hat z. B. für die in Abb. 1 skizzierte nicht-lineare Feder den in Abb. 2 gezeichneten Verlauf. Es ist

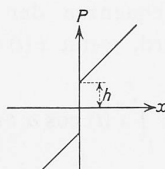


Abb. 2

für  $x > 0$ :  $p(x) = h + n^2 x$ , für  $x < 0$ :  $p(x) = -h + n^2 x$ , und aus der Differentialgl. (3) der ungedämpften Eigenschwingung wird:

<sup>7)</sup> Die von den Verfassern ausgearbeiteten Methoden sind auf freie Schwingungen allgemeiner Art anwendbar, worauf hier jedoch nicht eingetreten werden kann.

$$\ddot{x} + n^2 x = \begin{cases} -h, & x > 0 \\ +h, & x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Zur Zeit  $t_0$  nehme  $x$  den positiven Höchstwert  $A$  an. ( $t = t_0$ :  $x = A$ ,  $\dot{x} = 0$ ). Dann schreibt sich die Lösung von (11):

$$x = -\frac{h}{n^2} [1 - \cos n(t - t_0)] + A \cos n(t - t_0), \text{ solange } \cos n(t - t_0) \geq \frac{h}{A n^2 + h},$$

d. h. solange  $-s_n \leq t - t_0 \leq s_n$ ,  $s_n = \frac{1}{n} \arccos \frac{h}{A n^2 + h}$ .

Für  $x < 0$  ist die Bewegung offenbar ein Spiegelbild derjenigen für  $x > 0$ :

$$x(t) = -x(2s_n + 2t_0 - t).$$

$x$  ist also eine periodische Funktion von  $t$  mit folgender Periode  $T$  und Frequenz  $\omega$ :

$$T = 4s_n = \frac{4}{n} \arccos \frac{h}{A n^2 + h}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi n}{2 \arccos \frac{h}{A n^2 + h}}$$

Nun sei die Funktion  $y(w, a)$  folgendermassen definiert:

$$y(w, a) = x\left(t_0 + \frac{w}{\omega}\right).$$

$y$  ist also eine periodische Funktion von  $w$  mit der Periode  $2\pi$ . Offenbar gilt:  $y(w, a) > 0$ , für  $-\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}$ ;

$y(w, a) < 0$ , für  $\frac{\pi}{2} < w < \frac{3\pi}{2}$ ;  $y(w, a) = -y(\pi - w, a)$ .

Bemerken wir noch, dass

$$y(w, a) = y(-w, a) \quad (12)$$

und

$$\max |y(w, a)| = y(0, a) = A, \quad 0 \leq w \leq 2\pi \quad (13)$$

Da der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  auch so formuliert werden kann:

$$x(t) = y(\omega t + \psi, a), \quad \psi = -\omega t_0,$$

so wird aus (11)<sup>8)</sup>:

$$\omega^2 y''(w, a) + h^2 y(w, a) = \begin{cases} -h, & -\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2} \\ h, & \frac{\pi}{2} < w < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (14)$$

Betrachten wir nun die Fourier-Entwicklung von  $y(w, a)$ . Wegen (12) enthält sie nur cosinus-Terme:

$$y(w, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^{\pi} y(w, a) \cos m w dw \right) \cos m w.$$

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten multiplizieren wir Gl. (14) mit  $\cos m w$ . Partielle Integration ergibt, da  $y'(0, a) = y'(\pi, a) = 0$ :

$$(n^2 - m^2 \omega^2) \int_0^{\pi} y \cos m w dw = -h \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos m w dw - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos m w dw \right\} = -\frac{2h}{m} \sin \frac{m\pi}{2}$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos w dw = a$

setzen:

$$\omega^2 = n^2 + \frac{4h}{\pi a} \quad (15)$$

und

$$y = a \cos w + \frac{4}{\pi} h \sum_{m=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cos m w}{m(m^2 \omega^2 - n^2)} \quad (16)$$

Die Eigenfrequenz  $\omega$  ist somit grösser als  $n$  und nimmt mit wachsendem  $a$  monoton ab.

Nach (13) nimmt  $y$  den maximalen Wert  $A$  für  $w=0$  an.  $A$  lässt sich daher unmittelbar aus (16) unter Berücksichtigung von (15) berechnen, oder, einfacher, aus der Beziehung:

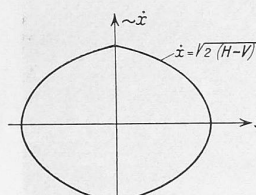
$$\frac{h}{A n^2 + h} = \cos \frac{\pi n}{2\omega},$$

die aus dem Verschwinden von  $x$  für  $t = t_0 + T/4$  folgt.

<sup>8)</sup> Striche bedeuten Ableitungen nach  $w$ .

$$\therefore A = \frac{h}{n^2} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\pi n}{2\omega}} - 1 \right\} = \frac{h}{n^2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi n}{2\omega}} \right\} \quad (17)$$

Ohne bei den ungedämpften Eigenschwingungen zu verweilen, deren Erforschung durch die in Abb. 3 erläuterte Energiegleichung



$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = H = \text{konst.} \quad (18)$$

$$V(x) = \int_0^x p(x) dx \quad \dots (18)$$

besonders erleichtert wird, wollen wir jetzt zum Grundthema dieses Aufsatzes, dem Studium der nicht-linearen Resonanz, übergehen.

§ 5. Hierbei werden wir voraussetzen, dass die Eigenschwingungen schon bekannt und durch bestimmte Ausdrücke folgender Gestalt gegeben sind:

$$x = y(\omega t + \psi, a), \quad \omega = \omega(a), \quad \dots (19)$$

wo  $y(w, a)$  durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden kann:

$$y(w, a) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(a) \cos mw \quad \dots (20)$$

Es empfiehlt sich, den Parameter  $a$  positiv und so zu wählen, dass die positiv grösste Abweichung von der Gleichgewichtslage

$$A = A(a) = \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi} |y(w, a)|$$

mit wachsendem  $a$  wächst und zusammen mit  $a$  verschwindet. Z. B. ist für die nicht-lineare Feder von Abb. 1 nach (17) und (15) in der Tat  $A(0) = 0, \frac{\partial A}{\partial a} > 0$ .

Natürlich steht uns die Wahl des in Gl. (19) figurierenden Parameters durchaus frei; statt des einen können wir einen andern Parameter nehmen, der mit dem ersten irgendwie verknüpft ist. In gewissen Fällen ist es z. B. zweckmässig, als Parameter direkt die Schwingungsamplitude zu wählen.

Diese Bemerkung betrifft insbesondere jene in praxi häufig vorkommenden Fälle, wo man die Eigenschwingung mit genügender Annäherung als harmonisch ansehen kann:

$$y = a \cos(\omega t + \psi) \quad \dots (21)$$

Betrachten wir kurz diese wichtigen Fälle, die wir aus verständlichen Gründen quasi-linear nennen wollen.

Sei  $n^2 y$  das lineare Anfangsglied in dem Ausdruck für die rücktreibende Kraft  $p(y)$ . Man kann offenbar schreiben<sup>9)</sup>:

$$\omega^2 y_{w''} + n^2 y = n^2 y - p(y) \quad \dots (22)$$

Benützen wir diese Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenz  $\omega$  und nebstbei auch zur Präzisierung von Formel (21), indem wir auf (22) das Mittel der sukzessiven Approximationen anwenden. Der Grundidee dieses Verfahrens entsprechend setzen wir auf der rechten Seite von (20) die erste Approximation ein:  $y = a \cos w$ .

Zur Bestimmung der zweiten Annäherung erhalten wir dann die folgende Beziehung:  $\omega^2 y_{w''} + n^2 y = n^2 a \cos w - p(a \cos w)$ .

Setzen wir darin  $y = a \cos w + g_0 + g_2 \cos 2w + g_3 \cos 3w \dots$ , so bekommen wir offenbar:

$$(-\omega^2 + n^2) a = n^2 a - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(a \cos w) \cos w dw, \quad (23)$$

$$n^2 g_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(a \cos w) dw,$$

$$(-\omega^2 k^2 + n^2) g_k = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(a \cos w) \cos kw dw.$$

In zweiter Annäherung wird sonach

$$y = a \cos w - \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^\pi p(a \cos w) dw + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kw}{k^2 \omega^2 - n^2} \int_0^\pi p(a \cos w) \cos kw dw, \quad (24)$$

worin wegen (23)

$$\omega^2 = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi p(a \cos w) \cos w dw \quad \dots (25)$$

Uebrigens liefern die Formeln (24) und (25), auf den oben behandelten Fall der nicht-linearen Feder von Abb. 1 angewandt, unmittelbar die Lösungen (16) und (15). Ebenso liefert die Anwendung der Formel (24) auf den Fall der polynomischen Charakteristik (4) direkt die oben abgeleitete Reihe (9).

§ 6. Wenden wir uns nach allen diesen Vorbemerkungen über die Eigenschaften der ungedämpften Eigenschwingungen der Betrachtung der fundamentalen Differentialgleichung (1) zu, und zwar unter Voraussetzung angenäherter Resonanz ( $\omega \cong a/p$ ). Dabei nehmen wir einen geeigneten Wechsel der Veränderlichen vor, indem wir statt  $x$  und  $\dot{x}$  die beiden Grössen  $\Theta$  und  $a$  als neue unbekannt Zeitfunktionen durch folgende Definitionsgleichungen einführen:

$$x = y(w, a), \quad \dots (26)$$

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{p} y_{w'}(w, a), \quad \dots (27)$$

$$w = \frac{at + \Theta}{p} \quad \dots (28)$$

Hierin bezeichnet  $y(w, a)$  die in der als bekannt vorausgesetzten ungedämpften Eigenschwingung (19) auftretende Funktion von der Gestalt (20).

Physikalisch bedeutet dieser Wechsel der Veränderlichen, dass wir die „erzwungene“ Schwingung in die Form der ungedämpften Eigenschwingung kleiden, deren Amplitude und Phase wir als unbekannt Funktionen der Zeit ansehen; dabei ersetzen wir die Eigenfrequenz durch einen Unterton der Erregerfrequenz.

Unter Benutzung der differenzierten Gl. (27) erscheint Gl. (1) in folgender Gestalt:

$$\frac{\alpha}{p} y_{w''} \left( \frac{1}{p} \dot{\Theta} + \frac{\alpha}{p} \right) + \frac{\alpha}{p} y_{wa''} \dot{a} + p(y) = F \cos at - f \left( \frac{\alpha}{p} y_{w'} \right) \quad (29)$$

Da  $y(w, a)$  andererseits definitionsgemäss Gl. (22) befriedigt, folgt hieraus:

$$\frac{\alpha}{p^2} y_{w''} \dot{\Theta} + \frac{\alpha}{p} y_{wa''} \dot{a} = (\omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2}) y_{w''} + F \cos at - f \left( \frac{\alpha}{p} y_{w'} \right) \quad (30)$$

Ferner ergibt der Vergleich der differenzierten Gl. (26) mit (27):

$$\frac{1}{p} y_{w'} \dot{\Theta} + y_{a'} \dot{a} = 0 \quad \dots (31)$$

Lösen wir (30) und (31) nach  $\dot{\Theta}$  und  $\dot{a}$  auf:

$$\left. \begin{aligned} (y_{w'} y_{wa''} - y_{w''} y_{a'}) \frac{\alpha}{p^2} \dot{\Theta} = \\ - \left\{ \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) y_{w''} + F \cos at - f \left( \frac{\alpha}{p} y_{w'} \right) \right\} y_{a'} \\ (y_{w'} y_{wa''} - y_{w''} y_{a'}) \frac{\alpha}{p} \dot{a} = \\ \left\{ \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) y_{w''} + F \cos at - f \left( \frac{\alpha}{p} y_{w'} \right) \right\} y_{w'} \end{aligned} \right\} (32)$$

Auf diese Gleichungen sind die Methoden der nicht-linearen Mechanik anwendbar. Da sich der gegenwärtige Aufsatz jedoch an Ingenieure wendet, werden wir ein nicht ganz strenges Verfahren einschlagen, das im Ergebnis die nämlichen Formeln liefert wie die mit Hilfe jener Methoden erhaltene erste Approximation. (Schluss folgt.)

<sup>9)</sup> Striche bedeuten von nun an, je nach dem beigefügten Index, Ableitungen nach  $w$  oder  $a$ .