Band 103 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 23

Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz.

Von Prof. Dr. NIKLAUS KRYLOFF u. Dr. NIKLAUS BOGOLIUBOFF, Kieff.

(Schluss von Seite 257.)

§ 7. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den für die Anwendungen besonders wichtigen quasilinearen Fall und machen wir ausserdem folgende in praktischen Problemen gewöhnlich erfüllten Voraussetzungen: Die äussere erregende Kraft und die Reibungskraft sind so klein (oder dann die Frequenz α/p so gross), dass im Laufe einer Zeitspanne von der Grössenordnung $\frac{2\pi p}{\alpha}$ die Grössen Θ und a sich nur sehr wenig verändern können, da ja unter der gemachten Voraussetzung $\omega \sim \frac{\alpha}{p}$ auch die auf der rechten Seite von (32) figurierende Differenz $\omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2}$ klein ist.

Dank der Quasi-Linearität haben wir in erster Annäherung $y = a\cos w$, sodass wir in den Gl. (32)

$$y_w' \, y_{wa}'' - y_{w^2}'' \, y_a' = a$$

setzen können. Mitteln wir nun die Gl. (32) über den Zeitabschnitt $\frac{2\pi p}{\alpha}$, indem wir (auf Grund der getroffenen Annahme) bei der Integration die Grössen a, Θ, $\dot a$, $\dot\Theta$ als konstant behandeln:

$$a\frac{\alpha}{p^2}\dot\Theta = -\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}}\left\{\left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)y_{w^2}''+F\cos\alpha t-f\left(\frac{\alpha}{p}y_w'\right)\right\}y_a'\,dt,$$

$$a\frac{\alpha}{p}\dot a = \frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}}\left\{\left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)y_{w^2}''+F\cos\alpha t-f\left(\frac{\alpha}{p}y_w'\right)\right\}y_w'\,dt.$$

Tauschen wir die Integrationsvariable t gegen $w = \frac{\alpha t+\Theta}{p}$ und beachten wir die folgenden, aus (20) fliessenden Beziehungen:

$$\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_w'\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_{w^2}'' \, y_w'\,dw = 0,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_a'\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_{w^2}'' \, y_a'\,dw = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi} y_w'^2\,dw,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_a' \, F\cos\alpha t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_a' \, F\cos(pw-\Theta)\,dw = \frac{F}{2}\frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\cos\Theta,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_w' \, F\cos\alpha t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_w' \, F\cos(pw-\Theta)\,dw = -\frac{F}{2}\,p\,g_p(a)\sin\Theta.$$

Berücksichtigen wir noch, dass im Rahmen der quasilinearen Theorie

$$\frac{\alpha}{2\pi p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} f\left(\frac{\alpha}{p}y_w'\right)y_a'\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha}{p}y_w'\right)y_a'\,dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(-\frac{\alpha}{p}a\sin w\right)\cos w\,dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial w}\left[\int_0^{\sin w} f\left(-\frac{\alpha}{p}a\,\zeta\right)d\zeta\right]dw = 0,$$

so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot\Theta &= \left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi} y_w'^2\,dw - F\frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\cos\Theta \\ 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot a &= -F g_p(a)\sin\Theta - \frac{\Phi(a)}{p} \end{aligned}\right\}\quad (33)$$

wobei

$$\Phi(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha}{p}y_w'\right)y_w'\,dw \quad . \quad . \quad (34)$$

Immer im Rahmen der quasi-linearen Theorie kann man ausserdem $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi} y_w'^2\,dw = a$ und

$$\Phi(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{\alpha}{p}a\sin w\right)a\sin w\,dw \quad . \quad . \quad (35)$$

setzen. Die Gl. (32) nehmen dann folgende endgültige Form an:

$$\left.\begin{aligned} 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot\Theta &= \left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)a - F\frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\cos\Theta \\ 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot a &= -\left\{F g_p(a)\sin\Theta + \frac{\Phi(a)}{p}\right\} \end{aligned}\right\}\quad (36)$$

Da $y(w, a)$ definitionsgemäss Gl. (22) befriedigt, gelten dabei die oben abgeleiteten Formeln:

$$g_1(a) = a,\ g_{\substack{p\\p=2,3\ldots}}(a) = \frac{1}{p^2\omega^2-n^2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(a\cos w)\cos p\,w\,dw \cong$$

$$\frac{1}{(p^2-1)\,n^2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(a\cos w)\cos p\,w\,dw.$$

Indem wir zur Ermittlung der stationären Lösungen in den Gleichungen (36) $a =$ konst, $\Theta =$ konst. setzen, erhalten wir:

$$\left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)a - F\frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\cos\Theta = 0 \quad . \quad . \quad (37)$$

$$F\,p\,g_p(a)\sin\Theta + \Phi(a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Die diesen Lösungen entsprechenden stationären Schwingungen erscheinen demnach, wie oben angezeigt, in der Gestalt ungedämpfter Eigenschwingungen von der Frequenz α/p, deren Amplitude und Phase sich aus (37) und (38) bestimmen. Wir sehen also, dass die stationären Schwingungen mit einem Unterton der erregenden Frequenz synchronisiert sind und demgemäss die Perioden $2\pi p/\alpha$ besitzen.

Bemerken wir übrigens, dass in Gl. (38) die Grösse

$$W_1 = -\pi\,p\,g_p\,F\sin\Theta = \int_0^{2\pi} F\cos(p\,w-\Theta)\,y_w'(w, a)\,dw =$$

$$\frac{\alpha}{p}\int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} F\cos\alpha t\cdot y_w'\left(\frac{\alpha t+\Theta}{p},\ a\right)dt = \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} F\cos\alpha t\cdot\dot x\,dt$$

die von der erregenden Kraft während der Schwingungsperiode geleistete Arbeit ist.