

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103/104 (1934)
Heft: 4

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber eine nicht-harmonische Schwingung. — Der Studio-Neubau des „Radio-Zürich“. — Fernsehen mit Kathodenstrahlen. — Mitteilungen: Der Grossfunksender Berlin. Drahtlose Kurzwellen-Verbindung über die Meerenge von Calais. Der Schweizerische Wasserwirtschaftsverband. „Goudron fillerisè“. Die Reklame

an der Landstrasse. Deselektische Motorwagenzüge in Holland. Die Bauten für die Weltausstellung in Brüssel 1935. Wasserbaulaboratorium in Leningrad. Das Corsotheater in Zürich. — Nekrologe: Emil Usteri-Faesi. — Literatur: Schiess- und Sprengstoffe. Eingegangene Werke.

Band 104

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Verbandsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 4

Ueber eine nicht-harmonische Schwingung.

Von Prof. Dr. ERNST MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Unter dem Titel: „Ueber einige Methoden der Nicht-Linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz“ ist kürzlich hier¹⁾ eine Arbeit von Kryloff und Bogoliuboff erschienen, die sich u. a. mit der näherungsweise Lösung einer Differentialgleichung befasst, wie sie bei Schwingungen mit nicht-linearem Elastizitätsgesetz auftritt.

In den nachfolgenden Zeilen will ich zeigen, dass die von mir entwickelte graphische Integrationstheorie²⁾ sich sehr gut eignet, die Lösung herzustellen, zu überblicken und Näherungsausdrücke dafür anzugeben.

1. Die Eigenschwingungen.

Es handelt sich darum, die Funktion $x(t)$ zu bestimmen aus der Beziehung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + P(x) = 0$$

wo $P(x)$ ein nicht lineares Kraftgesetz nach Art der Abb. 1 ist. Man hat also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = \begin{cases} -h & \text{wenn } x > 0 \\ +h & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Durch

$$u = nt$$

wird ein neues Zeitmass eingeführt, und es werden Ableitungen nach u mit Strichen bezeichnet. Es geht $x(t)$ in eine Funktion $p(u)$ über, und man hat

$$\begin{aligned} p'' + p &= -\frac{h}{n^2} = -\delta & \text{wenn } p > 0 \\ p'' + p &= +\delta & \text{wenn } p < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Es gilt jetzt, das Linienbild dieser Funktion zu konstruieren. Aber $p'' + p = \rho$ bedeutet gerade dessen Krümmungsradius. Die Beziehungen (1) sagen also einfach aus, dass dieser streckenweise konstant ist und jedesmal sein Vorzeichen wechselt, wenn p durch Null geht, d. h. wenn vom Anfangspunkt O aus eine Tangente an das Linienbild gezogen werden kann. Dem entsprechend setzt es sich aus einer Reihe von Kreisbögen vom Halbmesser δ zusammen und wird folgendermassen konstruiert:

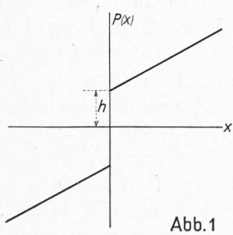


Abb. 1

1) SBZ, Band 103, S. 255* und 267* (Nr. 22, 23 vom 2. und 9. Juni 1934).

2) SBZ, Band 62, Nr. 15 und 16 (11./18. Oktober 1913); Bd. 84, Nr. 23 und 24 (6./13. Dez. 1924); Bd. 98, Nr. 23 und 26 (5./26. Dezember 1931); Bd. 99, Nr. 3, 4 und 13 (16./23. Januar und 26. März 1932), (auch im Sonderdruck erschienen).

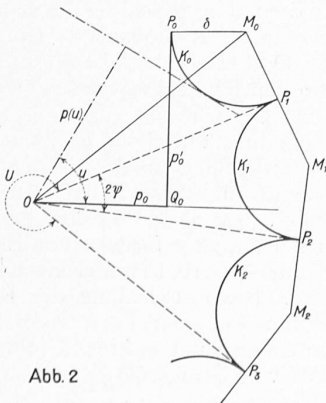


Abb. 2

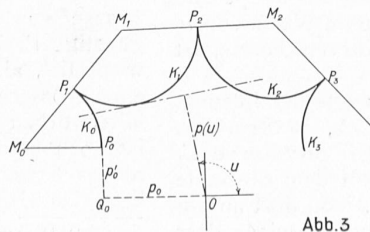


Abb. 3

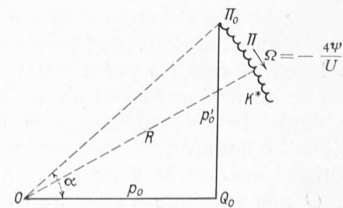


Abb. 4

Für $u = 0$ seien p_0 und p'_0 die vorgeschriebenen Anfangswerte. Dadurch ist (Abb. 2) der Anfangspunkt P_0 des Linienbildes bestimmt ($OQ_0 = p_0$; $Q_0P_0 = p'_0$). Unter der Annahme $p > 0$ ist jetzt der Krümmungsradius $\rho = -\delta$ und der Kreis K_0 mit M_0 als Zentrum ist zunächst Linienbild und zwar bis zur Tangente OP_1 von O aus, wo $p = 0$ wird. Hier wechselt mit p auch ρ das Vorzeichen, und wir erhalten als Fortsetzung den Kreis K_1 mit M_1 als Mittelpunkt ($P_1M_1 = \delta$). Dieser gilt, bis p zum zweiten Male gleich null wird (in P_2), worauf der Krümmungsradius wieder sein Vorzeichen wechselt und so fort.

Das Linienbild besteht also aus den Kreisbögen $P_0P_1P_2P_3$. Demnach ist für alle Anfangsbedingungen die Lösung periodisch, und die Periode U ist die Ergänzung zu 2π vom Doppelten des Winkels 2ψ , unter dem der Bogen P_1P_2 von O aus gesehen wird. Die Periode ist demnach von der Lage von O zum Diagramm, d. h. von den Anfangsbedingungen abhängig.

Man hat

$$\begin{aligned} \psi &= \arcsin \frac{P_1M_0}{OM_0} = \arcsin \frac{\delta}{\sqrt{(p_0 + \delta)^2 + p_0'^2}} \\ &= \arcsin \frac{h}{\sqrt{(p_0 n^2 + h)^2 + n^4 p_0'^2}}, \quad U = 2\pi - 4\psi \end{aligned}$$

also

$$U = 4 \arcsin \frac{\delta}{\sqrt{(p_0 + \delta)^2 + p_0'^2}}$$

Für $p_0 = A$; $p'_0 = 0$ folgt der im erwähnten Aufsatz angegebene Wert. Da der Winkel 2ψ der zwei von O ausgehenden Kreistangenten kleiner als π ist, so ist

$$0 < 4\psi < 2\pi, \text{ ebenso } 0 < U < 2\pi \text{ und } n < \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Die Abb. 3 zeigt, wie das Linienbild im Fall $p_0 < 0$ aussieht. Der erste der Kreisbögen ist nach der entgegengesetzten Seite offen. Zu bemerken bleibt, dass für die anfängliche Ruhelage ($p_0 = 0$; $p'_0 = 0$) die Lösung nicht definiert ist, wie es der Unbestimmtheit der Restitutionskraft für diesen Fall entspricht (Abb. 1).

2. Die Näherungslösung.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Grösse δ klein ist gegen den Ausdruck $\sqrt{p_0^2 + p_0'^2}$. Wir haben es alsdann mit heftigen Schwingungen zu tun. Das Linienbild hat jetzt die Form eines fein gezähnten Kreises (Abb. 4). Man kann die Makrostruktur des Integrals erfassen, wenn man jeden der kleinen Zähne durch einen mittleren Punkt II ersetzt, vorausgesetzt, dass man die Werte von u auf ein Intervall der Grösse U beschränkt. Für das nächstfolgende Intervall U wäre alsdann der Punkt II um zwei Zähne nach rückwärts zu verlegen. Es ist deshalb möglich, die Näherungslösung auf jeden Wert von u auszudehnen. Man hat nur den Punkt II auf dem Kreise K^* von Zahn zu Zahn gleichförmig rückwärts laufen zu lassen, und zwar muss