Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 103/104 (1934)
Heft: 17

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Band 104 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 17**

Zur Berechnung der Grundschwingungszahl vollwandiger Träger.

Von Dr. sc. techn. FRITZ STÜSSI, Obering. der Eisenbaugesellschaft Zürich.

1. Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingungszahl, die den Ausgangspunkt für die dynamische Untersuchung von Tragwerken darstellt, sind für die Praxis Annäherungsverfahren ausgearbeitet worden. So hat Pohlhausen[1]) für Fachwerkträger ein Berechnungsverfahren aufgestellt, bei dem aus der wiederholten Bestimmung von Verschiebungsgrössen die Eigenfrequenz mit fortgesetzter Annäherung ermittelt wird. Die praktische Eignung des Verfahrens beruht auf der guten Konvergenz der der Reihe nach zu bestimmenden Schwingungszahlen gegen den genauen Wert. Eine Uebertragung der Methode von Pohlhausen auf Vollwandträger rührt von F. Bleich[2]) her. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Grundschwingungszahl sich hier einfacher direkt aus dem Vergleich von angenommener und daraus berechneter Formänderungskurve ergibt, wodurch das Verfahren Pohlhausen-Bleich im Wesentlichen in das graphische Verfahren von Stodola[3]) übergeht.

Ein anderer Weg zur Bestimmung der Eigenschwingungszahl beruht auf der Betrachtung der Energieverhältnisse während des Schwingungsvorganges.[4]) Wie nachstehend gezeigt werden soll, ergibt sich aus der Kombination der ersterwähnten Berechnungsart (Stodola) mit einer Energiebetrachtung ein sehr einfaches Berechnungsverfahren, das in einem Rechnungsgang die Grundschwingungszahl mit praktisch meistens genügender Genauigkeit liefert. Da hierbei zwei Werte für die Schwingungszahl erhalten werden, lässt sich die Güte der Approximation abschätzen.

2. Aus der Schwingungsgleichung des elastischen Stabes:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E J \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{q}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in der z die von der statischen Gleichgewichtslage aus gemessenen Schwingungsausschläge, q die Trägerbelastung und g die Erdbeschleunigung bedeuten, folgt unter Beachtung, dass die zu betrachtenden Eigenschwingungen harmonische sind, also:

$$z = y(x)\, \sin p\, t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E J \frac{d^2 y}{dx^2}\right) - \frac{q}{g} p^2 y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die den örtlichen Verlauf der Schwingungsausschläge y umschreibt. p bedeutet die Kreisfrequenz. Gl. 3 sagt aus, dass die durch die Belastung

$$u = \frac{q}{g} p^2 y$$

hervorgerufene Biegungslinie y_1 des Balkens wieder mit y übereinstimmen muss. Damit ist der zur Bestimmung der Kreisfrequenz p, bzw. der sekundlichen Eigenschwingungszahl ν

$$\nu = \frac{p}{2\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

einzuschlagende Weg gegeben: man berechnet zu einer angenommenen Ausbiegungslinie y die Belastungskurve u und daraus die Biegungslinie y_1. Diese ergibt sich am bequemsten, insbesondere bei veränderlicher Belastung, veränderlichen Trägerquerschnitten und bei beliebigen Einspannverhältnissen, mit den bekannten Mitteln der Baustatik: aus der Belastung u folgt die Momentenfläche als Seilkurve, wobei die Schlusslinie entsprechend den Auflagerbedingungen einzulegen ist, während die Seilkurve zur durch EJ dividierten Momentenfläche die Ausbiegungskurve y_1 liefert. Aus der Gleichsetzung von y und y_1 für irgend eine Trägerstelle, z. B. für Balkenmitte, ergibt sich ein erster Näherungswert von p^2. Da das Verfahren gut konvergiert, ist ein genügend genauer Wert von p bzw. ν mit wenigen Wiederholungen dieses Rechnungsganges zu erreichen.[5]) Zur Bestimmung der niedrigsten Eigenfrequenz, also der Grundschwingungszahl, ist diejenige Ausbiegungskurve y anzunehmen, die die grössten Formänderungen ergibt.

3. Wir betrachten nun die Energieverhältnisse während des Schwingungsvorganges: die kinetische Energie eines Balkenelementes der Länge dx beträgt

$$dE_k = \frac{1}{2}\frac{q}{g}\, dx \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{g}\, dx\, (p\, y\, \cos p\, t)^2, \quad . \quad (5)$$

wenn wir den zeitlichen Verlauf der Ausschläge z wieder nach Gl. 2 einführen. Beim Durchgang durch die statische Gleichgewichtslage ($\sin p\, t = 0$, $\cos p\, t = 1$) ist dE_k und damit die kinetische Energie des Balkens von der Länge l ein Maximum:

$$\max E_k = \frac{p^2}{2g}\int_0^l q\, y^2\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Gleichzeitig ist die potentielle Energie gleich null.

Wenn die Ausbiegungen z ihren Grösstwert y erreichen, ist die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie gleich null. Dagegen erreicht die potentielle Energie ihren Grösstwert. Dieser ist gleich der Arbeit, die zur Erreichung der maximalen Ausbiegung y aufgewendet werden musste, also für ein Balkenelement dx:

$$\max dE_p = \frac{1}{2} M\, d\alpha = \frac{1}{2}\frac{M^2\, dx}{E J} = \frac{E J}{2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx, \quad . \quad (7a)$$

oder für die Balkenlänge l:

$$\max E_p = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\, dx}{E J} = \frac{1}{2}\int_0^l E J \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx \quad . \quad . \quad (7b)$$

Während des Schwingungsvorganges muss, abgesehen von Reibungsverlusten, die wir hier vernachlässigen, die Energiesumme konstant sein:

$$E_k + E_p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dies bedeutet, dass die Beträge von $\max E_k$ und $\max E_p$ einander gleich sein müssen. Daraus folgt:

$$p^2 = \frac{\int_0^l \frac{M^2}{E J}\, dx}{\frac{1}{g}\int_0^l q\, y^2\, dx} = \frac{\int_0^l E J \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx}{\frac{1}{g}\int_0^l q\, y^2\, dx} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In Gl. (7) wurde die potentielle Energie des ausgebogenen Stabes als Formänderungsarbeit eingeführt. Diese ist aber gleich der äusseren Arbeit, d. h. der Arbeit der Belastung u bis zur Durchbiegung y, also für ein Balkenelement dx

$$\max dE_p = \frac{1}{2} u\, y\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7c)$$

[1]) *Pohlhausen:* „Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke". Z. a. M. u. M. 1921.

[2]) *F. Bleich:* „Stahlhochbauten I", Berlin 1932.

[3]) *A. Stodola:* „Dampf- und Gasturbinen", 6. Aufl., Berlin 1922. (zit. nach Timoshenko).

[4]) Eine ausgezeichnete Darstellung dieser Energiemethoden gibt *S. Timoshenko* („Schwingungsprobleme der Technik", Berlin 1932), der an ihrer Aufstellung massgebend beteiligt ist.

[5]) Auf dem gleichen Prinzip der fortgesetzten Annäherung an die genaue Ausbiegungskurve beruht das Verfahren von *Vianello* zur Bestimmung der Knicklast gedrückter Stäbe. In ähnlicher Weise ist es dem Verfasser gelungen, die Kipplast von auf Biegung beanspruchten Balken zu berechnen.