

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 111/112 (1938)
Heft: 8

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Genauere Differenzengleichungen zur Berechnung gebogener Platten. — Zur Frage der Lüftung langer Autotunnel. — Öffentlich-keit und Basler Stadtplan. — Erwärmung kalten Wassers in Leitungen, die durch Räume höherer Temperatur führen. — Lokomotivtransport Winterthur-Bombay. — Mitteilungen: Ueber Physik der Raumheizung, Stahl-saitenbeton. Verstellpropeller «Rotol». Die Haltbarkeit von Verzinkungen gegen Korrosionsangriff. Achtzylindrige Kolbenpumpe ohne Kurbelwelle.

Rillenrohre für den Kesselbau. Der Einfluss der Fensterbauart auf den Luftdurchgang. Vom Prozess Hollands gegen Belgien wegen Wasserentnahme aus der Maas. Meliorationsprojekt für die rechtsseitige Linthebene. Kantonsbibliothek-Gebäude Aarau. Normalien und Normen für die Schiffs-fahrtsstrasse Basel-Bodensee. — Nekrologe: K. Grütter. — Wettbewerbe: Evangelisches Kirchgemeindehaus St. Gallen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 112

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 8

Genauere Differenzengleichungen zur Berechnung gebogener Platten

Von Dipl. Ing. E. AMSTÜTZ, Mitarbeiter von Prof. Dr. F. Stüssi, Zürich

Die strenge Berechnung biegsamer Platten stösst in der Praxis immer noch auf Schwierigkeiten. Reihenentwicklungen sind meist sehr umständlich zu handhaben, aber auch die Lösung mittels Differenzengleichungen wird durch die numerische Ausrechnung fast ebenso umfangreich.

Den Bedürfnissen der Praxis entspricht wohl am besten die Methode von Dr. H. Marcus.¹⁾ Darnach lässt sich die Differentialgleichung für die Plattendurchbiegung durch Systeme von Differenzengleichungen ersetzen, indem man die Platte durch ein Netz unterteilt und für jeden Netzknoten eine Differenzengleichung anschreibt. Die Genauigkeit des Verfahrens steigert sich mit engerer Netzteilung, zugleich nimmt aber auch die Zahl der Gleichungen und Unbekannten rasch zu. Um zum Beispiel eine quadratische Platte mit befriedigender Genauigkeit zu untersuchen, ist die Quadratseite in mindestens acht Felder zu teilen. Es sind also bei allgemeiner Belastung 49 Gleichungen mit 49 Unbekannten aufzulösen, die sich allerdings im Falle zweiseitiger Symmetrie auf 10 reduzieren lassen. Damit diese Theorie die in der Praxis noch oft verwendete aber gänzlich unzulängliche Streifenmethode verdrängen kann, ist es erforderlich, das Verfahren von H. Marcus soweit zu verbessern, dass selbst mit sehr weiter Netzteilung praktisch noch genaue Resultate erzielt werden. Dies ist das Ziel vorliegender Untersuchung.

Bezeichnen x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines Plattenpunktes, ζ die Durchbiegung der Platte unter der Belastung p und $N = \frac{m^2}{m^2-1} \cdot \frac{E d^3}{12}$ die Plattensteifigkeit, so lautet die Bestimmungsgleichung für die Durchbiegung der Platte:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{N}$$

$$\text{oder mit } Z = N \zeta \quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = p$$

Sie lässt sich durch Einführen einer Hilfsgrösse M in zwei Gleichungen aufspalten: $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -M$

Um diese Differentialgleichungen in Differenzengleichungen überzuführen, ersetzt Marcus im Bereiche des untersuchten Punktes die M -, bzw. z -Fläche durch ein Paraboloid. Ich will hingegen eine entsprechende Voraussetzung nicht für M und z selber, sondern für ihre zweiten Ableitungen nach den Koordinaten machen, wodurch die Genauigkeit des Verfahrens offensichtlich stark erhöht wird. Zu diesem Zweck verwende ich die bekannten Beziehungen²⁾ zwischen einer Grösse und ihrer zweiten Ableitung, die sich aus den Eigenschaften des Seilpolygons ergeben, wenn diese Grösse als Durchhang eines Seiles gedeutet wird, das unter dem Horizontalzug 1 steht und mit der zweiten

Ableitung der Grösse belastet ist (vergl. Abb. 1).

Die Seillinie z wird durch das Seilpolygon ersetzt, sofern die Knotenlast K , d. i. der Auflagerdruck der benachbarten Felder, als Belastung gewählt wird. Es ist daher

$$K_m = \frac{z_{m-1} - 2z_m + z_{m+1}}{\lambda}$$

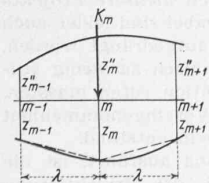


Abb. 1

Ich nehme an, dass die Belastungsfunktion z'' stetig sei und kann sie daher im Bereiche $m-1$ bis $m+1$ durch eine Parabel ersetzen (im Falle unstetiger Belastung wie Einzel- oder Streckenlasten wäre zweckmässiger linearer Verlauf anzunehmen). Es gilt somit andererseits auch

$$K_m = \frac{\lambda}{12} (z''_{m-1} + 10z''_m + z''_{m+1})$$

und wir gewinnen die Beziehung

$$\frac{12}{\lambda^2} (z_{m-1} - 2z_m + z_{m+1}) = z''_{m-1} + 10z''_m + z''_{m+1} \quad (1)$$

¹⁾ Dr. H. Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten.

²⁾ Dr. F. Stüssi: Baustatische Methoden, «SBZ» Band 107, Seite 277 (20. Juni 1936).

Diese Beziehung lässt sich für die 9 Punkte des Plattenabschnittes der Abb. 2 (unten) sechsmal anschreiben:

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_i - 2z_k + z_l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_i + 10z_k + z_l)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_n - 2z_k + z_m) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_n + 10z_k + z_m)$$

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_q - 2z_n + z_r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_q + 10z_n + z_r)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_o - 2z_m + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_o + 10z_m + z_p)$$

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_q - 2z_i + z_o) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_q + 10z_i + z_o)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_r - 2z_l + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_r + 10z_l + z_p)$$

Addiere ich die beiden zehnfach genommenen ersten Gleichungen mit den übrigen, so treten die zweiten Ableitungen nur noch in der Verbindung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ auf, wofür ich den Wert $-M$ einsetze und erhalte:

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (20z_k + 2z_m + 2z_n - 10z_i - 10z_l - z_o - z_p - z_q - z_r)$$

$$+ \frac{12}{\lambda_y^2} (20z_k + 2z_i + 2z_l - 10z_m - 10z_n - z_o - z_p - z_q - z_r)$$

$$= 100M_k + 10(M_i + M_l + M_m + M_n) + M_o + M_p + M_q + M_r \quad (2)$$

was sich symbolisch auch so schreiben lässt

$$\begin{bmatrix} -1 & +2 & -1 \\ \lambda_y & & \lambda_y \\ -1 & +2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ \lambda_x & & \lambda_x \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +10 & +1 \\ \lambda_y & & \lambda_y \\ +1 & +10 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +10 & +1 \\ \lambda_y & & \lambda_y \\ +1 & +10 & +1 \end{bmatrix} \cdot M$$

Für $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ gilt speziell:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & +20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{20z_k}{\lambda^2} = \begin{bmatrix} +1 & +10 & +1 \\ +10 & +100 & +1 \\ +1 & +10 & +1 \end{bmatrix} \cdot M$$

Entsprechende Gleichungen gelten zwischen M und p , wenn man z durch M und M durch p ersetzt.

Der frei aufliegende Rand einer Platte ist charakterisiert durch $M = 0$ und $z = 0$, und es gelingt daher in einer ersten Berechnungsstufe die Werte M zu ermitteln und daraus in der zweiten Stufe die elastische Fläche z , bzw. z festzulegen. Es bleibt noch die Aufgabe zu lösen, aus der elastischen Fläche die Beanspruchungen, insbesondere die Biegemomente der Platte zu ermitteln. Dazu greife ich auf die Gleichung (1) zurück, die ich für jeden Punkt einer Netzlinie anschreiben kann. Diese nur dreigliedrigen Gleichungssysteme sind mit geringem Aufwand nach z'' auflösbar, sodass anhand der bekannten Beziehung

$$m_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

die biegenden Momente berechnet werden können.

Von Interesse ist oft noch der Verlauf der Auflagerkräfte. Diese setzen sich zusammen aus der Rand-Scherkraft

$$v = \frac{\partial M}{\partial x}$$

und den zusätzlichen Auflagerkräften

$$v' = \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = -\frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

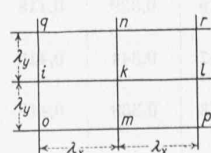


Abb. 2

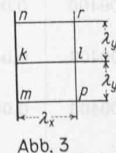


Abb. 3

die die Rand-Drillungsmomente ersetzen sollen (vergl. Abb. 3). Beachten wir, dass auf dem Rande nicht nur z und M , sondern auch ihre sämtlichen Ableitungen nach y zu Null werden, so folgen aus der Plattengleichung die weiteren Beziehungen: