

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 111/112 (1938)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Die Wirksamkeit der Vorspannung im einfach und im symmetrisch bewehrten Eisenbeton-Rechteckquerschnitt  
**Autor:** Senn, Albert  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49773>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Die Wirksamkeit der Vorspannung im einfach und im symmetrisch bewehrten Eisenbeton-Rechteckquerschnitt. — Verschleiss der Bogenschienenflanken. — Das Stuyvenberg-Spital in Antwerpen und das kreisrunde Krankenzimmer. — Die Bauaktion des «WIR» (Wirtschaftsring). — Mitteilungen: Eidg. Technische Hochschule. Ueberlandstrassen und Fussgänger. Bestimmung elastischer Konstanten mittels Ultraschall. Turboelektrische Lokomotive für 5000 PS. Von der Pragerstrasse. Gross-

bauten in Ingenieur-Holzbau. Gezeitenkraftwerk in U. S. A. Betonbrücken und Landschaft. Röntgenographischer Ferienkurs an der T. H. Berlin-Charlottenburg. «Holter»-Betonstrassenbeläge. — Nekrologe: Gottfried Keller. August Meyer. — Wettbewerbe: Bullingerdenkmal am Grossmünster in Zürich. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 111

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 6

## Die Wirksamkeit der Vorspannung im einfach und im symmetrisch bewehrten Eisenbeton-Rechteckquerschnitt

Von Dipl. Ing. ALBERT SENN, Zürich

Die Vorspannung der Armierung im Eisenbetonbau ist in den letzten Jahren in vermehrtem Masse zur Sprache gekommen. Sie bezweckt bekanntlich die Erzeugung von Betondruckspannungen in der späteren Beton-Zugzone, und damit eine Vermeidung der Rissbildung. Mit den folgenden Ableitungen soll gezeigt werden, in welchem Masse solche Vorspannungen im Eisenbetonquerschnitt durch die Eigenschaften des Betons, nämlich Schwinden und plastische Verformung (Kriechen), vermindert werden.

### 1. Verminderung der Eisenvorspannung und Erzeugung der Beton-Vorspannungen bei Auslösung der Armierungsvorspannung

Es bedeute in Abb. 1:

$\sigma^*$  = Vorspannung der Bewehrung,  
 $\sigma_{e'}$  = Bewehrungsspannung nach Auslösung der Vorspannung,  
 $\sigma_{b'}$  = Betonspannung in der Faser der Bewehrung nach Auslösung der Vorspannung.

Die nach der Auslösung der Vorspannung in der Armierung verbliebene Spannkraft  $N_{e'}$  =  $f_e \sigma_{e'}$  steht im Gleichgewicht mit den erzeugten Betonspannungen, die sich nach der Formel

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{Mx}{J}$$

berechnen, wobei  $x$  den Abstand der betr. Faser von der Schwer-Axe,  $F$  den Querschnitt und  $J$  das Trägheitsmoment des nicht-armierten Betonquerschnittes bedeuten. Die Betonspannung in der Faser der Bewehrung erreicht daher folgenden Wert:

$$\sigma_{b'} = \frac{N_{e'}}{bh} + \frac{N_{e'} \left( \frac{h}{2} - a \right)^2}{bh^3} = \frac{N_{e'}}{bh} \left( 4 - 12 \frac{a}{h} + 12 \frac{a^2}{h^2} \right)$$

$$\sigma_{b'} = \frac{N_{e'}}{bh} k \quad (1)$$

wobei  $k = 4 - 12 \frac{a}{h} + 12 \frac{a^2}{h^2}$  eine Querschnittskonstante ist, die für den symmetrisch bewehrten Querschnitt den Wert 1 hat. Aus der Abb. 1 folgt nun weiter für die Dehnungen:

$$\epsilon^* = \epsilon_{e'} + \epsilon_{b'}$$

also

$$\sigma^* = \sigma_{e'} + n \sigma_{b'} \quad (2)$$

Setzt man für  $N_{e'} = \mu b h \sigma_{e'}$  so erhält man aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\sigma^* = \sigma_{e'} + n \mu k \sigma_{e'}$$

$$\sigma_{e'} = \frac{\sigma^*}{1 + n \mu k} \quad (3)$$

woraus

und da  $\sigma_{b'} = \frac{\sigma^* - \sigma_{e'}}{n}$  so wird

$$\sigma_{b'} = \frac{\mu k \sigma^*}{1 + n \mu k} = \mu k \sigma_{e'} \quad (4)$$

Für den symmetrisch bewehrten Querschnitt ( $k = 1$ ) vereinfachen sich diese Formeln auf

$$\sigma_{b'} = \frac{\sigma^*}{1 + n \mu} \quad \text{und} \quad \sigma_{e'} = \frac{\mu \sigma^*}{1 + n \mu}$$

Für den einseitig bewehrten Querschnitt berechnen sich sodann die Randspannungen zu

$$\sigma_u \text{ (Druck)} = \frac{\frac{h}{2} + x'}{\frac{h}{2} + x' - a} \sigma_{b'} \quad \sigma_o \text{ (Zug)} = \frac{\frac{h}{2} - x'}{\frac{h}{2} + x' - a} \sigma_{b'}$$

wobei  $x'$  den Abstand der neutralen Faser von der Schweraxe bedeutet. Dieses  $x'$  folgt aus der Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{Mx'}{J} = 0 \quad \text{zu} \quad x' = \frac{h^2}{6h - 12a}$$

Da im Allgemeinen die Auslösung der Vorspannung zu einem Zeitpunkt erfolgen muss, da der Beton noch nicht seine volle Festigkeit erreicht hat, und daher auch das Elastizitätsmodul des Betons noch verhältnismässig klein ist, so muss bei der Be-

rechnung von  $\sigma_{e'}$  bzw.  $\sigma_{b'}$  für die Zahl  $n$  ein entsprechend hoher Wert eingesetzt werden, z. B.  $n = 20$  ( $E_b = 100\,000$ ).

In Tabelle I sind für einige Bewehrungsgehalte  $\mu$ , unter der Annahme  $n = 20$ , für  $a = 0,1h$  und für den symmetrischen Querschnitt die Reduktionskoeffizienten für  $\sigma_{e'}$  und  $\sigma_{b'}$  angegeben.

TABELLE I

$\mu$	für $a = 0,1h$		für $a = 0,5h$ (symmetrische Bewehrung)	
	$\sigma_{e'} =$	$\sigma_{b'} =$	$\sigma_{e'} =$	$\sigma_{b'} =$
0,005	0,77 $\sigma^*$	0,0112 $\sigma^*$	0,91 $\sigma^*$	0,0045 $\sigma^*$
0,010	0,63	0,0184	0,83	0,0083
0,015	0,53	0,0232	0,77	0,0115
0,020	0,46	0,0268	0,71	0,0142
0,025	0,41	0,0297	0,67	0,0167
0,030	0,36	0,0318	0,62	0,0186

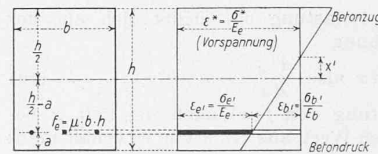


Abb. 1

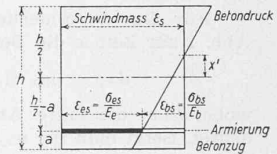


Abb. 2

### 2. Veränderung der Spannungen $\sigma_{e'}$ und $\sigma_{b'}$ infolge Schwinden des Betons

Durch das Schwinden des Betons entstehen Armierungs- und Betonspannungen nach dem selben Gesetz, wie bei der Auslösung der Vorspannung in der Armierung; nur entsteht durch das Schwinden in der Armierung eine Druckspannung  $\sigma_{es}$ , und in der Betonfaser längs der Armierung eine Zugspannung  $\sigma_{bs}$ , d. h. die Vorspannungen  $\sigma_{e'}$  und  $\sigma_{b'}$  werden um  $\sigma_{es}$  resp.  $\sigma_{bs}$  verkleinert.

Bezeichnet man (Abb. 2) mit  $\epsilon_s$  das Schwindmass des nicht-bewehrten Betons, so erhält man nun, entsprechend den Formeln (3) und (4) für die Armierung (Druck)

$$\sigma_{es} = \frac{\epsilon_s E_e}{1 + n \mu k} \quad (5)$$

und für die Betonfaser längs der Armierung (Zug)

$$\sigma_{bs} = \frac{\mu k \epsilon_s E_e}{1 + n \mu k} \quad (6)$$

Die nach dem Schwinden verbleibenden Vorspannungen in der Armierung und in der Betonfaser längs der Armierung betragen daher

$$\sigma_{e2} = \frac{\sigma^* - \epsilon_s E_e}{1 + n \mu k} \quad (7)$$

$$\sigma_{b2} = \mu k \sigma_{e2} \quad (8)$$

In Tabelle II sind für ein Schwindmass von  $\epsilon_s = 0,4 \text{ ‰} = 0,0004$  die Schwindspannungen in Armierung und Beton für die selben Querschnitte wie in Tabelle I berechnet.

TABELLE II

$\mu$	$\epsilon_s = 0,0004$		$\epsilon_s E_e = 800 \text{ kg/cm}^2$	
	für $a = 0,1h$		für $a = 0,5h$ (symmetrische Bewehrung)	
	$\sigma_{es}$ (Druck)	$\sigma_{bs}$ (Zug)	$\sigma_{es}$ (Druck)	$\sigma_{bs}$ (Zug)
0,005	620 kg/cm <sup>2</sup>	9 kg/cm <sup>2</sup>	727 kg/cm <sup>2</sup>	4 kg/cm <sup>2</sup>
0,010	510 „	14 1/2 „	667 „	7 „
0,015	426 „	18 1/2 „	615 „	9 „
0,020	370 „	21 1/2 „	570 „	11 1/2 „
0,025	325 „	24 „	533 „	13 1/2 „
0,030	290 „	25 1/2 „	500 „	15 „

**3. Verminderung der Vorspannungen infolge der plastischen Verformung des Betons unter Belastung (Kriechen)**

Man darf annehmen, dass unter gleichen Umständen die Grösse der plastischen Verformung des Betons proportional zur Grösse der betr. Betonspannung  $\sigma_b$  ist. Daher bleibt für das vorliegende Problem die neutrale Axe des Querschnittes die selbe.

Zur Zeit  $x$  betrage die plastische Deformation des Betons in der Faser längs der Armierung  $\varepsilon_x$ . Aus der Abb. 3 folgt nun, dass sich die Spannung in der Armierung um das Mass  $\varepsilon_x E_e$  vermindert hat. Dementsprechend haben sich auch die Betonspannungen des Querschnittes vermindert, trotz der grösseren Deformationen. Für die Spannkraft in der vorgespannten Armierung zur Zeit  $x$  gilt folgende Beziehung:

$$N_x = N_{e'} - \varepsilon_x E_e f_e$$

$$\sigma_{e'x} = \sigma_{e'} - \varepsilon_x E_e$$

und entsprechend Gl. (4)

$$\sigma_{bx} = \mu k (\varepsilon_{e'} - \varepsilon_x) E_e \dots (9)$$

Das Kriechmass des Betons wird im Allgemeinen für die Einheitsbelastung angegeben, also  $\varepsilon_{k'}$  für  $\sigma_b = 1 \text{ kg/cm}^2$ . Dieses Kriechmass ist eine Funktion der Zeit  $\varepsilon_{k'} = f(x)$ .

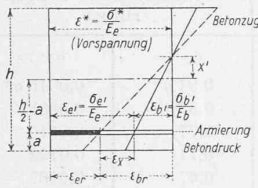


Abb. 3

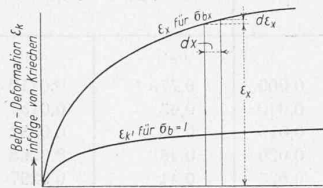


Abb. 4

Für eine veränderliche Belastung  $\sigma_{bx}$  ergibt sich aus der Abb. 4 zur Zeit  $x$  die Beziehung

$$d\varepsilon_x = \sigma_{bx} f'(x) dx \text{ also } \frac{d\varepsilon_x}{dx} = \sigma_{bx} f'(x) \dots (10)$$

wobei  $f'(x)$  die erste Ableitung von  $f(x)$  nach der Zeit  $x$  bedeutet. Setzt man für  $\sigma_{bx}$  den Wert aus Gl. 9 ein, so erhält man:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dx} = \mu k (\varepsilon_{e'} - \varepsilon_x) E_e f'(x)$$

$$\frac{d\varepsilon_x}{dx} + \varepsilon_x E_e \mu k f'(x) = \varepsilon_{e'} E_e \mu k f'(x)$$

woraus  $\varepsilon_x = e^{-E_e \mu k f(x)} \int e^{E_e \mu k f(x)} \varepsilon_{e'} E_e \mu k f'(x) dx$

wobei  $e =$  Napier'sche Zahl  $= 2,718 \dots$

$$\varepsilon_x = e^{-E_e \mu k f(x)} [\varepsilon_{e'} e^{E_e \mu k f(x)} + C]$$

da für  $x = 0: f(x) = 0, \varepsilon_x = 0$  so wird  $C = -\varepsilon_{e'}$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{e'} (1 - e^{-E_e \mu k f(x)})$$

oder, da  $f(x) = \varepsilon_{k'}$  = Kriechmass für  $\sigma_b = 1 \text{ kg/cm}^2$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{e'} (1 - e^{-\mu k \varepsilon_{k'} E_e}) \dots (11)$$

Die restliche Vorspannung in der Armierung wird nun:

$$\sigma_{e'x} = \varepsilon_{e'x} E_e = (\varepsilon_{e'} - \varepsilon_x) E_e$$

$$\sigma_{e'x} = \sigma_{e'} e^{-\mu k \varepsilon_{k'} E_e} \dots (12)$$

und in der Betonfaser längs der Armierung, entsprechend Gl. 4:

$$\sigma_{bx} = \mu k \sigma_{e'x} = \mu k \sigma_{e'} e^{-\mu k \varepsilon_{k'} E_e} \dots (13)$$

Für den symmetrisch bewehrten Querschnitt wird wiederum  $k = 1$ , d. h.  $k$  verschwindet aus den Formeln (12) und (13). Das Kriechmass  $\varepsilon_{k'}$  erreicht nach den Versuchen und Angaben verschiedener Forscher (Graf, Glanville, Shank) den Wert von etwa  $0,02 \text{ ‰}$ . Man muss bei der Berechnung der restlichen Vorspannungen in Bewehrung und Beton nach den Formeln (12) und (13) in Betracht ziehen, dass bei dem unter Vorspannung stehenden Eisenbetonkörper das Schwinden gleichzeitig mit dem Kriechen des Betons vor sich geht. Der Wert  $\sigma_{e'}$  der genannten Formeln wird daher während des Verformungsprozesses auf

TABELLE III

$\mu$	Kriechmass $\varepsilon_{k'} = 0,02 \text{ ‰}$		$\varepsilon_{k'} E_e = 40$	
	für $a = 0,1 h$		für $a = 0,5 h$ (symmetrische Armierung)	
	$\sigma_{e'x} =$	$\sigma_{bx} =$	$\sigma_{e'x} =$	$\sigma_{bx} =$
0,005	0,56 $\sigma_{e'}$	0,0082 $\sigma_{e'}$	0,82 $\sigma_{e'}$	0,0041 $\sigma_{e'}$
0,010	0,31	0,0090	0,67	0,0067
0,015	0,173	0,0076	0,55	0,0082
0,020	0,097	0,0057	0,45	0,0090
0,030	0,030	0,0026	0,30	0,0090

$\sigma_{e'x} - \sigma_{e's}$  vermindert, und man muss daher zweckmässig in den Formeln (12) und (13) nicht das  $\sigma_{e'}$  aus Formel (3), sondern einen Mittelwert, z. B.  $\sigma_{e'x} - \frac{\sigma_{e's}}{2}$  einsetzen.

In Tabelle III sind für verschiedene Bewehrungsgehalte  $\mu$  die Reduktionswerte  $e^{-\mu k \varepsilon_{k'} E_e}$  bzw.  $\mu k e^{-\mu k \varepsilon_{k'} E_e}$  zur Berechnung der restlichen Vorspannungen  $\sigma_{e'x}$  und  $\sigma_{bx}$  angegeben.

**Beispiel 1:** Der Armierung eines symmetrisch bewehrten Eisenbetonmastes, mit  $\mu = 2 \text{ ‰}$ , werde eine Vorspannung von  $\sigma^* = 5000 \text{ kg/cm}^2$  gegeben. Nach der Auslösung der Vorspannung betragen die verbliebenen Spannungen nach Tabelle I:

$$\sigma_{e'x} = 0,71 \cdot 5000 = 3550 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{bx} = 0,0142 \cdot 5000 = 71 \text{ kg/cm}^2$$

Infolge Schwindens des Betons um  $\varepsilon_s = 0,4 \text{ ‰}$  vermindern sich diese Vorspannungen gemäss Tabelle II um 570 bzw.  $11 \frac{1}{2} \text{ kg pro cm}^2$ . Durch die plastische Verformung des Betons vermindern sich die Vorspannungen, unter Voraussetzung eines Kriechmasses von  $\varepsilon_{k'} = 0,02 \text{ ‰}$  (Tabelle III) auf folgende Restspannungen:

$$\sigma_{e'x} = 0,45 \sigma_{e'x} = 0,45 \cdot \left( 3550 - \frac{570}{2} \right) = 1470 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{bx} = 0,009 \sigma_{e'x} = 0,009 \cdot 3265 = 29 \text{ kg/cm}^2$$

Die restliche Vorspannung von  $29 \text{ kg/cm}^2$  ist ausschlaggebend für die spätere Rissbelastung des Querschnittes. Im Vergleich zur angewandten Armierungsvorspannung von  $5000 \text{ kg/cm}^2$  ist das erreichte Resultat sehr klein.

**Beispiel 2:** Einfach armierter Rechteck-Querschnitt,  $a = 0,1 h$ , Armierungsgehalt  $\mu = 1 \text{ ‰}$ , Vorspannung  $\sigma^* = 5000 \text{ kg/cm}^2$ . Nach Tabelle I hat man nach Auslösung der Vorspannung:

$$\sigma_{e'x} = 3150 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{bx} = 92 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

Nach Tabelle II betragen die Schwindspannungen für  $\varepsilon_s = 0,4 \text{ ‰}$

$$\sigma_{e's} = 510 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)} \quad \sigma_{b's} = 14 \frac{1}{2} \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)}$$

Nach Tabelle III verbleiben nach der plastischen Verformung bei einem Kriechmass von  $\varepsilon_{k'} = 0,02 \text{ ‰}$  die folgenden Vorspannungen in der Armierung und im Beton längs der Armierung:

$$\sigma_{e'x} = 0,31 \cdot \left( 3150 - \frac{510}{2} \right) = 898 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{bx} = 0,009 \cdot 2895 = 26 \text{ kg/cm}^2$$

Die Betonrandspannungen berechnen sich nach Abb. 1 zu  $30,3$  für die untere und zu  $12,5 \text{ kg/cm}^2$  für die obere Faser.

Aus den beiden Beispielen ist deutlich zu ersehen, dass der grösste Teil der ursprünglich erreichten Betonvorspannung durch das Schwinden und Kriechen des Betons wieder verloren geht, nämlich im ersten Beispiel  $59 \text{ ‰}$  und im zweiten Beispiel sogar  $72 \text{ ‰}$ . Man kann daher nur mit einer sehr hohen Armierungsvorspannung ein einigermaßen befriedigendes Ergebnis erreichen.

**Verschleiss der Bogenschienenflanken**

Von Prof. Dr.-Ing. H. HEUMANN, Aachen

(Schluss von S. 53)

**Gleitgeschwindigkeit  $v$ .**

Nun wollen wir die Geschwindigkeit  $v$ , mit der der Spurranz des vorderen anlaufenden Rades im Punkt  $\mathcal{M}$  momentan an der Innenflanke der ruhenden Aussenschiene abgleitet, ihrer Grösse und Richtung nach ermitteln. Zu dem Zweck ist in Abbildung 10 der unter dem Anlaufwinkel  $\alpha$  an der Aussenschiene anlaufende Vorder-Radsatz schematisch in verschiedenen Ansichten dargestellt mit den drei Komponenten  $v_x, v_y$  und  $v_z$  von  $v$ ,  $v_x$  in Fahrzeuglängs-,  $v_y$  in Fahrzeugquerrichtung und  $v_z$  senkrecht. Der Berührungspunkt  $\mathcal{M}$  liegt um das kleine Stück  $x$  vor der «Meridianebene» des Radsatzes, d. h. der durch die Radsatzdrehachse gehenden und senkrecht auf der Geleiseebene stehenden Ebene und um  $c$  unter dem Aufstandspunkt  $A$  des anlaufenden Rades, der angenähert in der Meridianebene liegt.  $x$  ist bekanntlich  $= (r + c) \alpha \text{tg } \beta^5$ .  $\alpha$  ist im Bogenmass gemessen. Der Berührungswinkel  $\beta$  sei wie gesagt  $60^\circ$ ,  $c$  ist ebenfalls geometrisch festgelegt durch das Profil von Rad und Schiene; in unserer Rechnung sei es  $9 \text{ mm}$ ; diesen Wert hat es sehr oft bei Vollbahnen.

Die wirkliche Momentanbewegung des Radsatzes können wir zusammengesetzt denken aus einer Momentandrehung des Radsatzes als Ganzen um eine durch den Krümmungsmittelpunkt  $C$  gehende senkrechte Axe mit der bekannten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z = \frac{v}{R}$  und aus einer Momentandrehung des Radsatzes um

seine Eigen-Drehachse mit der noch unbekanntem Winkelgeschwindigkeit  $\omega_x = \frac{v}{R}$

<sup>5)</sup> Siehe z. B. Heumann: Leitschienenführung von Geleisefahrzeugen in Geleisebögen, «Glaser's Annalen», 1935, S. 92.