Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 113/114 (1939)

Heft: 14

Inhaltsverzeichnis

Band 114 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 14

Abgekürzte Berechnung von Festpunktabständen und Uebergangszahlen an Rahmentragwerken

Von Dipl. Ing. HANS VOGT, G.E.P., Rio de Janeiro

Einleitung. Der im Folgenden dargelegte vereinfachte Rechnungsvorgang soll es ermöglichen, die im Titel genannten Rahmenfestwerte mit Hilfe von je einer übersichtlichen und leicht zu behaltenden Formel zu ermitteln. Die Abweichung der so berechneten Näherungswerte von den genauen Werten ist, wie noch gezeigt werden wird, sehr gering, und bewegt sich meistens innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit.

Der Hauptvorteil des Verfahrens liegt aber vor allem darin, dass es möglich ist, *irgend einen Knotenpunkt* des Tragwerkes für sich herauszugreifen, und die sämtlichen ihm benachbarten Festpunkte und zugehörigen Uebergangszahlen *in einem Rechnungsgang* zu ermitteln.

Die Anzahl der am Knoten anschliessenden Stäbe kann beliebig sein, ebenso können die Trägheitsmomente unter sich verschieden sein, sollen aber einen über die ganze Stablänge konstanten Wert besitzen. Selbstverständliche Voraussetzung ist, dass das Tragwerk, wenn auch nötigenfalls nur vorübergehend, so gestützt ist, dass die Knotenpunkte sich wohl drehen, aber nicht verschieben können.

I. Festpunktabstände

Wie in Abb. 1 dargestellt, sollen im Knotenpunkt A die Stäbe 1, 2, .. $n-1$, n zusammenlaufen und biegungsfest angeschlossen sein. Es lässt sich nun für den Festpunktabstand a_n bezw. b_n folgende Beziehung aufstellen:

$$a_n = \frac{l_n}{v_{a_n}}\,; \quad b_n = \frac{l_n}{v_{b_n}} \tag{1}$$

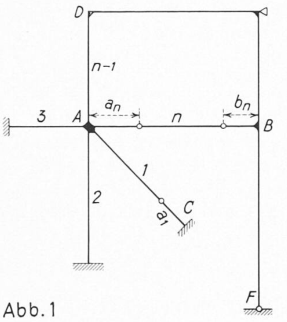

Abb. 1

Der Nennerwert v ist eine vom Verdrehungswiderstand des Knotens abhängige Grösse. Um dies besser zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir v in folgender Form:

$$v_n = 3 + k_n \tag{2}$$

Man erkennt sofort, dass der Wert k_n den eigentlichen Maßstab bildet für den genannten Verdrehungswiderstand, d. h. den Grad der Einspannung des Stabes l_n am Knoten oder Auflager. Bekanntlich ist für:

$$\text{Volle Einspannung: } a = \frac{l_n}{3}, \text{ somit } v = 3, \; k = 0$$

$$\text{Gelenkige Lagerung: } a = 0 = \frac{l_n}{\infty}, \; v = \infty \text{ und } k = \infty$$

Damit sind die Grenzen von k festgestellt. Da mit der Ermittlung von k auch v bezw. a bekannt sind, genügt es, wenn anstatt einer Formel zur direkten Ermittlung von a eine solche für den Wert k_n abgeleitet wird. Dies soll im Folgenden mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Elemente der «Festpunktmethode» in möglichster Kürze geschehen.

Der die Einspannung des Stabes n bedingende Verdrehungswiderstand des Knotens A wird gebildet durch das Zusammenwirken sämtlicher in A anschliessenden 1, 2, ... $n-1$ Stäbe. Durch Kombination dieser Gesamtsteifigkeit mit der Eigensteifigkeit des Stabes n erhält man die aus der «Festpunktmethode» bekannte, für konstantes Trägheitsmoment geltende Formel für den Festpunktabstand a_n bezw. b_n:

$$a_n = \frac{l_n}{3 + \frac{\varepsilon_A}{\beta_n}}\,; \quad b_n = \frac{l_n}{3 + \frac{\varepsilon_B}{\beta_n}} \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (3) ist sofort ersichtlich, dass die obenerwähnten k_n Werte identisch sind mit dem Quotienten ε/β_n. Darin bedeutet ε_A den gemeinsamen Drehwinkel der Stäbe 1, 2, 3, ... $n-1$ am Knoten A infolge eines vom Stabe n her an diesem Knoten wirkenden Momentes $M_{A_n} = 1$. β_n ist der Auflagerdrehwinkel bei A des frei aufliegend gedachten Stabes n infolge eines in B angreifenden Momentes $M_{B_n} = 1$ und hat für konstantes J_n den für beide Auflager gleichen Wert:

$$\beta_n = \frac{l_n}{6\,E J_n} \tag{4}$$

Der Winkel ε_A ist durch folgende Beziehung mit den anschliessenden Stäben in Verbindung gebracht:

$$\frac{1}{\varepsilon_A} = \frac{1}{\tau_{A_1}} + \frac{1}{\tau_{A_2}} + \frac{1}{\tau_{A_3}} + \ldots . \frac{1}{\tau_{A_{n-1}}} = \frac{1}{\sum\limits_{1}^{n-1} \frac{1}{\tau_A}} \tag{5}$$

Darin bedeutet z. B. τ_{A_1} den Drehwinkel bei A des in A gelenkig gelagerten und in C elastisch eingespannten Stabes 1. Sein Reziprokwert ist gegeben durch folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{\tau_{A_1}} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{l_1 - a_1}{2\,l_1 - 3\,a_1} \tag{6}$$

Durch Division des zweiten Faktors durch a_1 geht (6) über in

$$\frac{1}{\tau_{A_1}} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{\frac{l_1}{a_1} - 1}{2\,\frac{l_1}{a_1} - 3}$$

da aber $l_1 / a_1 = v_{a_1} = k_{a_1} + 3$ erhält man durch Einsetzung dieses Wertes:

$$\frac{1}{\tau_{A_1}} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{2 + k_{a_1}}{3 + 2 k_{a_1}} \tag{7}$$

Der Faktor $\frac{2 + k_{a_1}}{3 + 2\,k_{a_1}}$ soll mit m_{a_1} bezeichnet werden. Sodann führen wir in Gl. (5) die sämtlichen Werte gemäss (7) ein, sodass (5) übergeht in:

$$\frac{1}{\varepsilon_A} = \frac{m_{a_1}}{\beta_1} + \frac{m_{a_2}}{\beta_2} + \ldots \frac{m_{a_{n-1}}}{\beta_{n-1}} = \sum_{1}^{n-1} \frac{m_a}{\beta} \tag{8}$$

Wir multiplizieren (8) nun noch mit β_n und führen die entsprechenden Werte $1/6EJ$ ein, sodass wir erhalten:

$$\frac{\beta_n}{\varepsilon_A} = \frac{l_n}{6\,E J_n} \cdot \frac{6\,E J_1}{l_1} \cdot m_{a_1} + \ldots . . \text{ usw.} \tag{9}$$

$$\frac{\beta_n}{\varepsilon_A} = \frac{l_n}{J_n} \cdot \frac{J_1}{l_1} \cdot m_{a_1} + \frac{l_n}{J_n} \cdot \frac{J_2}{l_2} \cdot m_{a_2} + \ldots \frac{l_n}{J_n} \cdot \frac{J_{n-1}}{l_{n-1}} \cdot m_{a_{n-1}}$$

Das Verhältnis Trägheitsmoment durch Spannweite $= J/l$ sei mit c bezeichnet. Sodann bilden wir den reziproken Wert der Gl. (9), sodass die folgende, allgemeingültige Hauptformel für k_n entsteht:

$$k_n = \frac{c_n}{c_1\,m_1 + c_2\,m_2 + \ldots c_{n-1}\,m_{n-1}} = \frac{c_n}{\sum\limits_{1}^{n-1} c \cdot m} \tag{10}$$

Die in Formel (10) auftretenden Werte $c_1, \ldots . c_{n-1}$ sind ihrer Definition gemäss für jeden Stab bekannte Festwerte. Deren Grössenordnung im allgemeinen und ihr Einfluss auf k_n werden wir später untersuchen. Vorerst seien die Werte $m_1, m_2, \ldots . m_{n-1}$ näher untersucht, da sie die Grundlage der Näherungsberechnung bilden.

Werte m_n. Wie schon erwähnt, aber ohne Festpunktindex, ist:

$$m_n = \frac{2 + k_n}{3 + 2\,k_n} \tag{11}$$

Wenn man k_n durch den in (10) gefundenen Ausdruck ersetzt, kann (11) in folgender Form angeschrieben werden:

$$m_n = \frac{2 + c_n / \sum\limits_{1}^{n-1} c \cdot m}{3 + 2 c_n / \sum\limits_{1}^{n-1} c \cdot m} \tag{12}$$

Es wurde schon gezeigt, dass k_n alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen kann, entsprechend voller Einspannung bezw. gelenkiger Lagerung. Damit sind auch schon die Grenzwerte von m_n festgelegt, nämlich:

Für $k_n = 0$ wird $m_n = 2/3$ Volle Einspannung $\frac{1}{m} = 1{,}5$

Für $k_n = \infty$ wird $m_n = 1/2$ Gelenkige Lagerung $\frac{1}{m} = 2{,}0$

Die selben Grenzen gelten natürlich auch für die in (12) unter dem Summenzeichen stehenden $m_1 \ldots . m_{n-1}$. Welches ihre