

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 115/116 (1940)
Heft: 12

Artikel: Die Berechnung von Flanschverbindungen
Autor: Bosch, M. ten
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51248>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Berechnung von Flanschverbindungen. — Das Bürgerhaus im Kanton Genf. — Mitteilungen: Der Wipper (Dumper), ein Motorfahrzeug für Aushubtransporte. Ein Hallenbau aus Eisenbeton-Fertigteilen. Ausführung beweglicher Wehrverschlüsse aus Eisenbeton? Zürcher

Heimatschutztagung im Sihlwald. Ein Ziegeldach aus Eisenbeton ohne Lattenwerk. Eidg. Technische Hochschule. — Nekrologe: Erich Sutter. — Wettbewerbe: Gestaltung des nördlichen Brückenkopfes der Lorrainebrücke in Bern. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 116

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 12

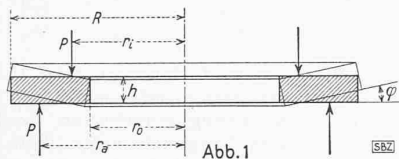


Abb. 1

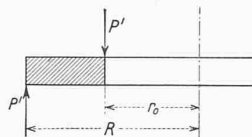


Abb. 2

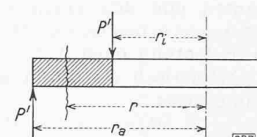


Abb. 3

Die Berechnung von Flanschverbindungen

Von Prof. M. TEN BOSCH, E. T. H., Zürich

Das Näherungsverfahren für die Berechnung, das der Altmeister C. von Bach im Jahre 1891 vorschlug¹⁾, hat durch sein klassisches Buch über Maschinenelemente die weiteste Verbreitung gefunden. Es wird auch heute noch z. B. bei den nationalen und internationalen Rohrnormen als Grundlage verwendet (z. B. VSM 18300, Blatt 10/15). Dieses Verfahren geht von der (erfreulichen) Tatsache aus, dass praktisch bewährte Ausführungsformen der Flanschen schon bekannt sind, macht irgend eine Annahme über die Grösse der Kraftwirkung (die in keiner Weise mit den wirklich auftretenden Kräften übereinstimmt), schlägt eine vereinfachte Spannungsberechnung vor (ebenfalls in Abweichung von der Wirklichkeit) und berechnet damit (aus den bekannten und bewährten Abmessungen) schliesslich die sogenannten «zulässigen» Spannungen, die für den gleichen Werkstoff aber keinesfalls konstant sind, und als Grundlage für die Flanschberechnung dienen sollen. Es ist fast unbegreiflich, dass ein so wertloses Rechenverfahren ein halbes Jahrhundert leben kann. Als Schulmeister und als Ingenieur bin ich verpflichtet, energisch dagegen zu protestieren, denn man gibt damit dem Nachwuchs *Steine statt Brot* und fördert die gedankenlose Nachahmung, statt zu selbständigem Denken anzuregen.*)

Das Näherungsverfahren geht nämlich von der Voraussetzung aus, dass auf die Flanschverbindung *nur der Flüssigkeitsdruck im Rohr* wirkt und zwar auf eine durch die Dichtung etwas vergrösserte Fläche, also

$$P = \frac{\pi}{4} D_a^2 p \text{ kg} \quad (1)$$

wenn p der Flüssigkeitsdruck in at und D_a etwa gleich dem Aussendurchmesser des Rohres in cm ist. Die wirklich auftretenden Kräfte sind aber ganz andere. Zunächst werden die Flanschschrauben angezogen (bevor Druck im Rohr ist), und zwar recht kräftig angezogen, da das Rohr dicht halten muss. Man kann etwa damit rechnen, dass die Schrauben beim Anziehen (ohne Flüssigkeitsdruck) mit einer Vorspannung belastet sind, die 60 bis 75 % der Streckgrenze des Schraubenwerkstoffes beträgt, oder auch 2 bis 3 mal so gross wie der Betriebsdruck ist. Zu dieser Vorspannung kommt der Betriebsdruck, der nicht einfach addiert werden darf, sondern aus den Formänderungen der Schrauben und der Flansche berechnet werden muss²⁾. Für die Festigkeitsrechnung der Flansche ist es zweckmässig damit zu rechnen, dass die Verbindung mit einer Gesamtkraft belastet wird, die der Streckgrenze der Schrauben entspricht und die 3 bis 4 mal so gross wie die Betriebskraft nach Gl. (1) ist. Deshalb ist auch die Schraubenberechnung (VSM 18300/1) zu beanstanden, die nur mit dem Betriebsdruck allein rechnet. Als Werkstoff der Schrauben wird St. 38.13 oder für bessere Qualität St. C. 35.61 verwendet. Diese Werkstoffbezeichnung ist aber für den Konstrukteur irreführend, denn sie kennzeichnet nur das *Ausgangsmaterial*; die fertigen Schrauben haben aber im Anlieferungszustand (und dieser ist für den Konstrukteur wichtig) bedeutend bessere Festigkeitseigenschaften. Nach den Versuchen der EMPA beträgt z. B. die Bruchfestigkeit K_z von Schrauben aus St. 38.13 nicht 38 sondern 58 kg/mm²! Es wäre deshalb eine nützliche Aufgabe der Normenkommissionen, eine *Mindeststreckgrenze* der normalen Schrauben festzulegen.

¹⁾ C. Bach: Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten. Berlin 1891.

²⁾ Das VSM-Normalienbureau teilt mir während der Drucklegung mit, dass es diese Berechnungsblätter bei der Neuauflage weglassen wird. Damit wäre der Zweck dieser Abhandlung erreicht. Bei der bereits erfolgten weiten Verbreitung der Normblätter scheint mir aber die Veröffentlichung der Berechnungsgrundlagen dennoch gerechtfertigt.

³⁾ Vgl. z. B. Ten Bosch: Vorlesungen über Maschinenelemente, 2. Auflage, Springer, Berlin 1940, S. 158/59.

Das Näherungsverfahren von Bach war eigentlich von Anfang an überflüssig, da die Theorie der Kreisplatten seit der Mitte des 19. Jahrhunderts vollständig bekannt war. Vereinzelt Veröffentlichungen in technischen Zeitschriften darüber von Stephan (1897), Ensslin (1904) fanden nur wenig Beachtung, wurden auch nicht in die Lehrbücher übernommen und blieben deshalb den Ingenieuren unbekannt. Die Theorie der Kreisplatten wird hier als bekannt vorausgesetzt; ich verweise z. B. auf meine «Vorlesungen über Maschinenelemente», 2. Aufl., Springer, Berlin, 1940, Abschnitt 14.5.

1. Der lose Flansch

Ausgehend von dieser Theorie hat R. Wiederkehr³⁾ die beim losen Flansch auftretenden Kräfte am genauesten berücksichtigt. Das Ergebnis seiner Rechnung ist, dass die grösste Spannung $\sigma_{\max}$ die tangentielle Spannung am Rande der inneren Bohrung (für $r = r_0$) ist (Abb. 1):

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{2\pi h^2} \left(2,6 \ln \frac{r_a}{r_i} + 0,7 \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} \right) \frac{R^2}{R^2 - r_0^2} \quad (2)$$

Diese Gleichung bildet eine zuverlässige Grundlage für die Berechnung der Flanschringe. Aber gerade für die bei Flanschen vorliegenden Verhältnisse lässt sich die Theorie der Kreisplatten noch bedeutend vereinfachen und zwar ohne Einbusse der Genauigkeit. Die *erste Vereinfachung*⁴⁾ geht von der Beobachtungstatsache aus, dass die Meridiankurve der verbogenen Mittelfläche für die bei Flanschrinnen vorliegenden Verhältnisse praktisch ein *Konus* ist, also durch eine *gerade* Mantellinie begrenzt wird. Wenn mit w die Durchbiegung der Mittelfläche an irgend einer Stelle bezeichnet wird, so ist also $dw/dr = \text{konstant}$ und $d^2w/dr^2 = 0$. Das bedeutet eine erhebliche Vereinfachung für die Berechnung, da die allgemeinen Spannungsgleichungen für die ringsum symmetrisch belastete Kreisplatte (vgl. Vorlesung Maschinen-Elemente, S. 98):

$$\sigma_r = -\frac{E m^2 z}{m^2 - 1} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r m} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$\sigma_t = -\frac{E m^2 z}{m^2 - 1} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{m} \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

$$\text{und } \tau = \frac{m^2 E}{8(m^2 - 1)} \frac{4z^2 - h^2}{r} \left(r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

mit der Plattensteifigkeit $N = \frac{E h^3 m^2}{12(m^2 - 1)}$ nun übergehen in:

$$\sigma_t = -\frac{12 N z}{h^3 r} \frac{dw}{dr}, \quad \sigma_r = -\frac{12 N z}{h^3 r m} \frac{dw}{dr} \quad (3, 4)$$

$$\text{und } \tau = \frac{3 N}{2 h^3} \frac{dw}{dr} \frac{4z^2 - h^2}{r^2} \quad (5)$$

Diese Vereinfachung ist z. B. auch für die Berechnung von *Tellerfedern* zulässig, die bei schwacher Neigung nach der Theorie der *ebenen* Kreisplatten berechnet werden können. Für grosse Neigungen gilt dafür die genaue Theorie von Meissner-Dubois⁵⁾, die aber so zeitraubend ist, dass ihre Verwendung in der Praxis nur in seltenen Fällen möglich ist. Sie ist aber sehr wertvoll, um die Zulässigkeit der vorgeschlagenen Vereinfachung zu prüfen, die Almen und Laszlo⁶⁾ auf Tellerfedern mit grosser Neigung angewandt haben. Der Vergleich mit der genauen Theorie zeigt für die grösste Spannung und für die grösste Formänderung praktisch genau gleiche Werte⁷⁾.

³⁾ R. Wiederkehr: Die Berechnung der losen Flansche in «Technik und Betrieb», (Zürich), Bd. 1, 1924, S. 121/27.

⁴⁾ Zuerst vorgeschlagen von W. A. Brecht und A. M. Wahl. The radially tapered Disk Spring. «Trans. A.S.M.E.» 52 I, 1930, S. 45/55. Paper APM 52.4.

⁵⁾ Dubois: Ueber die Festigkeit der Kegelschale. Diss. E.T.H. Zürich 1917.

⁶⁾ J. O. Almen and A. Laszlo: The uniform-section Disk Spring. «Trans. A.S.M.E.» 58, 1936, S. 305/14.

⁷⁾ S. Gross und E. Lehr: Die Federn. VDI-Verlag, Berlin 1938, S. 69.

Die zweite Vereinfachung hat Waters⁸⁾ vorgeschlagen. Die grösste Umständlichkeit bei der Berechnung des Flanschringes nach Abb. 1, also bei der Ableitung der Gleichung 2 liegt darin, dass der Ring aus drei Zonen besteht (äussere, mittlere und innere Zone). Für jede dieser Zonen ist die Berechnung von 4, also zusammen von 12 Integrationskonstanten aus den vorliegenden Randbedingungen erforderlich. Waters ersetzt die Belastung nach Abb. 1 nun durch die rechnerisch viel einfachere nach Abb. 2, unter der Voraussetzung, dass

$$P(r_a - r_i) = P'(R - r_0) \dots (6)$$

ist, d. h. dass die verbiegenden Momente gleich gross bleiben. Da die Lösungen in beiden Fällen bekannt sind, kann man die Zulässigkeit dieses Ersatzes leicht nachprüfen. Nimmt man den extremen Fall: $R/r_a = 1,2$, $r_i/r_a = 0,8$ und $r_0/r_a = 0,6$, der schon ausserhalb der Abmessungen der genormten Flanschringe liegt, so ist für Abb. 1 nach Gl. (2):

$$\sigma_{\max} = 0,481 P/h^2$$

und für Abb. 2 (vgl. Vorlesungen Masch. El., S. 102):

$$\sigma_{\max} = 1,48 P'/h^2$$

worin nach Gl. (6): $P' = P/3$ ist, also

$$\sigma_{\max} = 0,493 P/h^2$$

wird. Der Fehler beträgt in diesem extremen Fall nur 2,5 %.

Neben diesen beiden Vereinfachungen braucht man zur Lösung der gestellten Aufgabe nur noch die Gleichgewichtsbedingung, dass in einem Querschnitt in der Entfernung r (Abbildung 3) die Summe der Schubspannungen gleich der Belastung P' sein muss, also mit τ aus Gl. (5):

$$2\pi r \int_{-h/2}^{+h/2} \tau dz = P' = \frac{3\pi N}{r h^3} \frac{dw}{dr} \int_{-h/2}^{+h/2} (h^2 - 4z^2) dz$$

ist. Daraus folgt:

$$dw/dr = \frac{P'}{2\pi N} r = \operatorname{tg} \varphi,$$

welche Neigung nach der ersten Voraussetzung konstant sein muss, also

$$\operatorname{tg} \varphi = dw/dr = \frac{P'}{2\pi N} \frac{r_a + r_i}{2} \dots (7)$$

Die grösste Spannung ist die tangentielle Spannung für $r = r_i$ und $z = \mp h/2$, also nach Gl. (3):

$$\sigma_{\max} = (\sigma_t)_{r=r_i} = \frac{3(1 + r_a r_i)}{2\pi} \frac{P'}{h^2} \dots (8)$$

Nachdem wir diese Gleichung zur Festigkeitsrechnung der Flanschringe gefunden haben, die an Einfachheit nichts mehr zu wünschen übrig lässt, muss noch die Frage beantwortet werden, ob die Brauchbarkeit der Flanschverbindung in der Praxis überhaupt durch Vermeidung der Bruchgefahr beschränkt wird. Ich bin der Meinung, dass die aus zähem Werkstoff (St. 37 bzw. St. 45) hergestellten Flansche schon lange vor dem Bruch durch zu grosse Formänderung unbrauchbar werden, denn dann wird die Verbindung undicht und die Schrauben werden krumm und überbelastet. Wann verwirklicht die ausführende Praxis (und die Normenbureaux) die daraus folgende (auch schon seit 50 Jahren bekannte) Schlussfolgerung, dass der Schraubenschaft auf Kerndurchmesser abgedreht werden sollte (also nicht so aussehen darf wie nach VSM 18362), um die unvermeidlichen Biegespannungen klein zu halten? Setzt man den Wert von N in Gl. (7) ein, so wird die Neigung des Ringes:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3(m^2 - 1)P'}{\pi m^2 E h^3} (r_a + r_i) \dots (9)$$

Sie sollte kleiner sein als eine durch die Erfahrung festgelegte Grenze, für die ich etwa $\operatorname{tg} \varphi = 0,001$ vorschlage. Diese Gleichung empfehle ich als Grundlage für die Berechnung der Flanschringe.

Wenn die zulässige Formänderung wirklich ein brauchbares Kriterium ist, so muss das auch aus den bewährten (in den Rohrnormen zusammengestellten) Abmessungen nachweisbar sein. Nach den vorstehenden Überlegungen ist die grösste Kraft P durch die Streckgrenze des Schraubenwerkstoffes festgelegt:

$$P = \pi/4 d^2 \sigma_s i$$

d = Kerndurchmesser der Schrauben, i = Anzahl der Schrauben. Die Kraft P' in Gl. (9) ist nach Gl. (6) aus den Flanschabmessungen zu berechnen. Äendern wir bei einem Rohr nur den Betriebsdruck, so bleiben die Flanschabmessungen (mit Ausnahme der Dicke h) praktisch unverändert. Nach Gl. (9) müsste demnach $d^2 i/h^3$ für alle Drücke konstant sein. Bedenkt man,

⁸⁾ E. O. Waters und J. H. Taylor: The strength of Pipe Flanges. «Mech. Engg.» 49, 1927, S. 531/42 und die Diskussion darüber S. 1340/47.

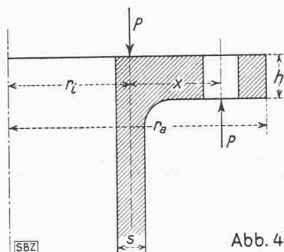


Abb. 4

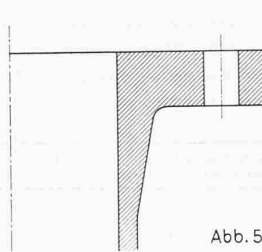


Abb. 5

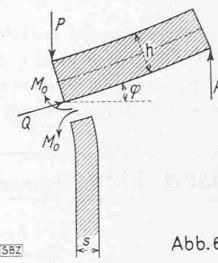


Abb. 6

dass die Schraubenzahl i ein vielfaches von 4 ist ($i = 4, 8, 12, 16$, usw.) also sich jeweiligen sprunghaft ändert, so kann diese Bedingung natürlich nicht streng eingehalten werden. Der in Zahlentafel 1 durchgeführte Vergleich zeigt (mit Ausnahme NW 200 und ND 10/16) ein recht befriedigendes Ergebnis. Es folgt daraus, dass für NW 200 und ND 10/16 entweder die Schraubenzahl i zu gross oder die Flanschdicke h zu klein wäre!

Zahlentafel 1: Nenndrücke ND

NW	ND 6	ND 10	ND 16	ND 25	ND 40	
200	$8 \times \frac{5}{8}''$ 18	$12 \times \frac{3}{4}''$ 20		$12 \times \frac{7}{8}''$ 26	$12 \times 1''$ 30	$i \cdot d$ h
400	$16 \times \frac{3}{4}''$ 28	$16 \times \frac{7}{8}''$ 32	$16 \times 1''$ 34	$16 \times 1\frac{1}{4}''$ 42	$16 \times 1\frac{3}{8}''$ 50	$i \cdot d$ h
VSM	18526	18527		18528		
200	0,35	0,6		0,28	0,29	$i d^2/h^3$
400	0,29	0,24	0,27	0,21	0,24	$i d^2/h^3$

Nicht berücksichtigt sind bei dieser Berechnung die Wärmedehnungen und Spannungen, die eine gesonderte Betrachtung erfordern.

2. Der feste Flansch (Abb. 4 und 5)

Auch hier wird die Brauchbarkeit der Flanschverbindung nicht durch die Bruchgefahr, sondern durch die Formänderung eingeschränkt. Die erste wissenschaftlich begründete Lösung für die Ausführungsform nach Abb. 4 gab Waters⁸⁾; in der daran anschliessenden Diskussion⁹⁾ schlug Prof. Timoschenko eine noch etwas einfachere Lösung vor. Da die Berechnung der Formänderung des Flansches dabei stark vereinfacht wurde, geben beide Lösungen zu grosse Spannungen. Es ist aber leicht möglich, diese Formänderung nach der Theorie der Kreisplatten etwas genauer zu berücksichtigen. Wesentlich schwieriger ist die Lösung⁹⁾ für den Flansch mit einem konischen Uebergang (Abb. 5).

Die Berechnung der festen Flansche ist ein statisch unbestimmtes Problem, das durch folgende Überlegung gelöst wird. Die zwischen Flansch und Rohr wirkenden Kräfte sind ein Moment M_0 und die Querkraft Q (Abb. 6), je für ein cm Breite des «inneren» Rohrfanges. Da die Flanschdicke h immer wesentlich grösser ist als die Rohrwandstärke s tritt der Bruch im Rohr und nicht im Flansch auf (Abb. 7). Die statisch unbestimmte Grösse M_0 ist aus der Bedingung zu berechnen, dass beim Uebergang zwischen Flansch und Rohr die Winkeländerungen für Flansch und Rohr gleich gross sind. Die Winkeländerung des Flansches kann aus der Theorie der Kreisplatten berechnet werden. Setzt man zur Vereinfachung der Berechnung wieder (vgl. Abb. 4 und 6):

$$P x = P'(r_a - r_i) \dots (10)$$

so wird die Formänderung des Flansches verursacht durch das Kräftepaar $P'(r_a - r_i)$ und durch ein Moment M_i , das am inneren Rand wirkt; in unserem Fall ist

$$M_i = M_0 - Q h/2 \dots (11)$$

Die Winkeländerung φ_1 , die durch das Kräftepaar allein verursacht wird, ist schon aus Gl. (9) bekannt. Wirkt das Moment M_i allein, fallen also die Belastungen P und p aus der allgemeinen Gleichung für die Meridianfläche weg (vgl. z. B. Vorl. Masch. El., S. 99, Gl. 14.49), dann ist

$$w = \frac{1}{2N} \left(c \frac{r^2}{4} + d \ln r + e \right)$$

$$dw/dr = \frac{1}{2N} \left(c \frac{r}{2} + \frac{d}{r} \right) \text{ und } d^2 w/dr^2 = \frac{1}{2N} \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{r^2} \right)$$

⁹⁾ Die mathematische Lösung ist enthalten in der Abhandlung «Development of general formulas for bolted flanges» von den Taylor Forge and Pipe Works, Chicago (Ill.), und auszugsweise veröffentlicht in E. O. Waters, D. B. Westrom, D. B. Rosshelm und F. S. G. Williams; Formulas of stresses in bolted flanged connections. «Trans. A. S. M. E.», 59, 1937, S. 161/69.

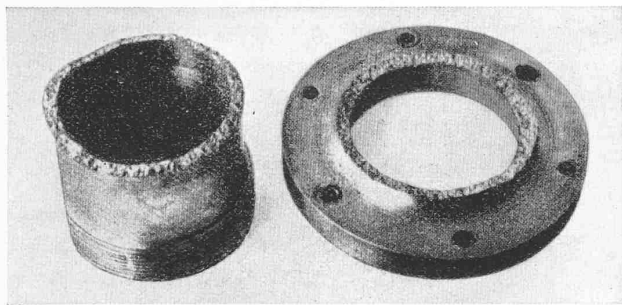


Abb. 7. Lage des Dauerbruchs beim Rohrflansch

Mit diesen Werten wird die radiale Spannung:

$$\sigma_r = -\frac{E m^2 z}{m^2 - 1} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{m r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{6z}{h^3} \left(\frac{m+1}{m} \frac{c}{2} - \frac{m-1}{m} \frac{d}{r^2} \right) \quad (12)$$

Aus der ersten Randbedingung, dass am freien Aussenrand (für $r = r_a$) die radiale Spannung für alle Werte von z gleich Null wird, folgt:

$$\frac{m+1}{m} \frac{c}{2} = \frac{m-1}{m} \frac{d}{r_a^2} \quad \text{oder} \quad d = \frac{m+1}{m-1} \frac{c}{2} r_a^2 \quad (13)$$

und aus Gl. (12) mit $r_a/r_i = a$:

$$\sigma_r = \frac{3zc}{h^3} \frac{m+1}{m} (a^2 - 1) \quad (14)$$

Aus der zweiten Randbedingung, dass am Innenrand (für $r = r_i$) das Moment der radialen Spannungen entgegengesetzt gleich M_i ist, folgt:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = \frac{3c(m+1)}{m h^3} (a^2 - 1) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -M_i$$

oder

$$c = \frac{4m}{m+1} \frac{M_i}{a^2 - 1} \quad (15)$$

und damit die Neigung $\varphi_2 = dw/dr$ für $r = r_i$ (nur durch das Moment M_i allein verursacht):

$$\varphi_2 = \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=r_i} = \frac{M_i r_i}{N(a^2 - 1)} \left(\frac{m}{m+1} + \frac{m a^2}{m-1} \right) \quad (16)$$

Die gesamte Winkeländerung des Flansches erhält man durch Superposition von φ_1 und φ_2 , also

$$\varphi_{\text{Flansch}} = \frac{12(m^2 - 1) r_i}{E m^2 h^3} \left[\frac{P'}{4\pi} (a + 1) - \left(\frac{m}{m+1} + \frac{m a^2}{m-1} \right) \frac{M_0 - Q h/2}{a^2 - 1} \right] \quad (17)$$

Die Berechnung der Winkeländerung des Rohres ist für den Maschineningenieur etwas ungewohnt, weil es sich um ein ähnliches Problem handelt, wie die Formänderung eines belasteten Balkens auf elastischer Unterlage (wie z. B. Eisenbahnschwelle). Zur Lösung dieser Aufgabe geht man von der bekannten Gleichung der elastischen Linie eines gebogenen Stabes $\frac{d^2 y}{dx^2} = -M/JE$ aus. Durch zweimalige Differentiation ($J = \text{konst}$) folgt daraus:

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} = -d^2 M/dx^2 = -dQ/dx \quad (18)$$

da bekanntlich die Querkraft $Q = dM/dx$ ist. Man nimmt nun an, dass an jeder Stelle der Druck p zwischen Balken und Unterlage proportional der jeweiligen Einsenkung y ist, also

$$p = ky$$

und nennt k die *Bettungsziffer*. Für ein Element dx des belasteten Balkens (Abb. 9) gibt die Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung:

$$dQ/dx = p = ky$$

sodass die Differentialgleichung (18) nun lautet:

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (19)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet mit der Abkürzung

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4JE}} \quad (20)$$

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (21)$$

wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Die vier Integrationskonstanten A bis D müssen von Fall zu Fall aus den Randbedingungen berechnet werden. Zunächst ist noch der Faktor β zu berechnen. Für ein ringsum symmetrisch belastetes Rohr

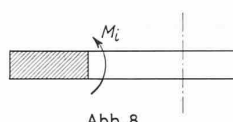


Abb. 8

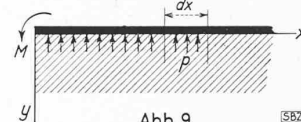


Abb. 9

folgt die radiale Verschiebung $\Delta r = y$ aus der bekannten Beziehung¹⁰⁾:

$$y = \Delta r = \frac{\sigma_r}{E} r \quad (22)$$

Die tangentialen Kräfte $\sigma_t s l$ auf das Volumenelement mit der Rohrlänge l haben in radialer Richtung die Komponente

$$p = k y = \frac{\sigma_t s}{r} = \frac{E s}{r^2} y$$

sodass

$$k = \frac{E s}{r^2} \quad (23)$$

ist. Diese (eindimensionale) Bestimmung von k ist nur angenähert richtig; die genaue Lösung⁸⁾ gibt einen etwas grösseren Wert, nämlich:

$$k = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E s}{r^2} \quad (23a)$$

Für den Rohrstreifen von 1 cm Breite ist $J = s^3/12$ und

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3k}{s^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{3(m^2 - 1)}{m^2 r^2 s^2}} = \frac{1,285}{\sqrt{r s}} \quad (24)$$

In dieser Gleichung ist r der mittlere Radius und s die Wandstärke des Rohres. Die erste Randbedingung lautet in unserem

Fall (Abb. 9): Für $x = \infty$ ist $y = 0$ und $dy/dx = 0$. Da $e^{\beta x}$ mit zunehmendem x immer grösser wird, kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn $A = B = 0$ ist. Die allgemeine Lösung (21) vereinfacht sich also in unserem Fall zu:

$$y = e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (25)$$

Die zweite Randbedingung (für $x = 0$) lautet:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = -M_0/JE \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = \frac{dM}{dx} = -Q = P/JE$$

Aus der Differentiation von Gl. (25):

$$\frac{dy}{dx} = -\beta e^{-\beta x} (C + D) (\sin \beta x + \cos \beta x)$$

folgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2\beta^2 e^{-\beta x} (C + D) \cos \beta x$$

Für $x = 0$ ist

$$2\beta^2 (C + D) = M_0/JE \quad (26)$$

Aus

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -2\beta^3 e^{-\beta x} (C + D) (\sin \beta x - \cos \beta x)$$

folgt für $x = 0$:

$$2\beta^3 (C + D) = -Q/JE = P/JE \quad (27)$$

und in Verbindung mit (26):

$$Q = -\beta M_0 \quad (28)$$

Die Integrationskonstanten C und D sind durch die Gl. (26) und (27) bestimmt. Setzt man sie in Gl. (25) ein, so wird

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 JE} \left[P \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x) \right] \quad (29)$$

¹⁰⁾ Vorlesungen ten Bosch: Masch. El., S. 89, Gl. 14.5.

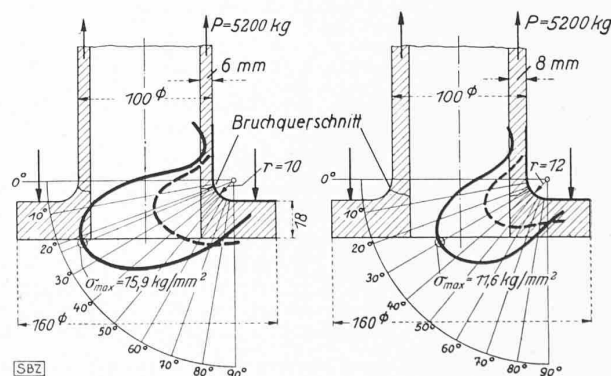


Abb. 10. Spannungsverteilung im Rohrflansch bei verschiedener Wandstärke
— = Meridianspannung, - - - = Umfangsspannung

AUS: DAS BÜRGERHAUS IN DER SCHWEIZ — II. BAND: DER KANTON GENÈVE. ZWEITE AUFLAGE
Herausgegeben vom Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein, S. I. A. — Orell Füssli Verlag, Zürich 1940



Genève, Rue du Perron, prise du puits St. Pierre, vers 1830

Die Differentiation dieser Gleichung gibt für $x = 0$ die gesuchte Neigung des Rohres:

$$\varphi_{\text{Rohr}} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0}{2\beta J E} = \frac{6 M_0}{\beta E s^3} \quad (30)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für ein unendlich langes Rohr, sondern auch für alle Rohrlängen x solange βx grösser als 2 ist. Aus unserer Voraussetzung, dass φ_{Rohr} (nach Gl. 30) = φ_{Flansch} (nach Gl. 17) ist, folgt:

$$M_0 = \frac{3 \frac{m^2 - 1}{m^2} (a + 1) P' / \pi}{12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\frac{m}{m+1} + \frac{m a^2}{m-1} \right) \frac{1 + \beta h/2}{a^2 - 1} + \frac{6}{\beta r_i} \left(\frac{h}{s} \right)^3} \quad (31)$$

oder mit $m = 10/3$ und $A = \frac{12(m^2 - 1)}{m^2(a^2 - 1)} \left(\frac{m}{m+1} + \frac{m a^2}{m-1} \right)$

$$M_0 = \frac{0,87 (a + 1) P'}{A (1 + \beta h/2) + \frac{6}{\beta r_i} \left(\frac{h}{s} \right)^3} \quad (31a)$$

mit den A -Werten aus Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2

a	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
A	70,2	50,3	40,6	34,4	31,0	28,3	26,3

Da das Biegemoment M_0 für einen Rohrstreifen von der Breitereinheit nun bekannt ist, folgt die grösste Biegespannung im Rohr aus der Biegegleichung:

$$\sigma_b = M/W = 6 M_0 / s^2 \quad (32)$$

Diese berechnete Spannung kann nun mit der kürzlich von Prof. A. Thum¹¹⁾ veröffentlichten Berechnung der grössten Spannung aus den gemessenen Dehnungen verglichen werden (vgl. Abb. 10). Eine vollständige Uebereinstimmung ist nicht zu erwarten, weil bei allen plötzlichen Querschnittsänderungen¹²⁾, also auch beim Uebergang zwischen Flansch und Rohr, Spannungserhöhungen zu erwarten sind, die durch «Formziffer» be-

¹¹⁾ A. Thum: Feindehnungsmessungen und Dauerprüfungen an Flanschen als Grundlage für eine Flanschberechnung, in: «Maschinenelemente-Tagung Düsseldorf 1938». VDI-Verlag, Berlin 1940, S. 1/6. — Dieser Veröffentlichung sind die Abbildungen 7 und 10 entnommen.

¹²⁾ ten Bosch: Vorlesungen Masch. El., Abschnitt 16.

rücksichtigt werden müssen. Für das linke Bild in Abb. 10 ist $r_a = 80$, $r_i = 47$, $h = 18$, $s = 6$ und $x = 70 - 47 = 23$ mm. Damit folgt aus Gl. (10): $P' = 5200 \cdot 23/33 = 3624$ kg. Weiter ist $a = 80/47 = 1,70$ (also $A = 28,3$), $\beta = 1,285/\sqrt{47 \cdot 6} = 0,0765$, $\beta h/2 = 0,689$, $\beta r_i = 1,798$. Mit diesen Zahlenwerten wird das Biegemoment M_0 nach Gl. (31a):

$$M_0 = \frac{0,87 \cdot 2,7 \cdot 3624}{28,3 \cdot 1,69 + 3,34 \cdot 27} = 8500 \cdot 137 = 62 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

auf einen cm Breite, und damit die Biegespannung:

$$\sigma_b = 62 \cdot 6/6^2 = 10,3 \text{ kg/mm}^2.$$

Hierzu kommt noch die Zugspannung im Rohr:

$$\sigma_z = 5200/94 \cdot 6 = 2,9 \text{ kg/mm}^2,$$

sodass die totale Spannung nach unserer Berechnung $10,3 + 2,9 = 13,2 \text{ kg/mm}^2$ beträgt, was gegenüber dem gemessenen Wert von $15,9 \text{ kg/mm}^2$ einer Formziffer von $15,9/13,2 = 1,2$ entspricht; die gleiche Formziffer gibt auch die Nachrechnung für das Bild rechts in Abb. 10.

Für die Berechnung der Formänderung am äusseren Rand lautet die Gleichung:

$$\varphi_{\text{aussen}} = \frac{12(m^2 - 1)r_i}{E m^2 h^3} \left[\frac{P'}{4\pi} (a + 1) - \left(\frac{m}{m+1} + \frac{m a^2}{m-1} \right) \frac{a}{a^2 - 1} (M_0 - Q h/2) \right] \quad (33)$$

Mit diesen Untersuchungen ist die wichtige Dichtungsfrage der Verbindung noch nicht gelöst; sie scheint für den festen Flansch schwieriger zu sein als für den losen.

Das Bürgerhaus im Kanton Genf

Seit längerer Zeit schon war der im Jahre 1912 erschienene Genfer Band vergriffen, weshalb er nun in zweiter Auflage herausgegeben worden ist¹⁾. Kollege E. Fatio, der schon die erste Auflage besorgt hatte, ist auch der zweiten zu Gevatter gestanden, unterstützt von Kantonsarchäologe L. Blondel. Zahlreiche

¹⁾ Das Bürgerhaus in der Schweiz, 2. Band, Kanton Genf, 2. Auflage. Herausgegeben vom Schweizer Ingenieur- und Architektenverein. 50 Seiten Text, 134 Tafeln. Zürich 1940, Orell Füssli Verlag. Preis geb. 43 Fr., geh. 35 Fr., für S.I.A.-Mitglieder das erste Exemplar geb. 25 Fr., jedes weitere Exemplar 31 Fr., geh. 17 bzw. 23 Fr.