Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 115/116 (1940)
Heft: 18

Artikel: Baustatik vor 100 Jahren - die Baustatik Naviers
Autor: Stüssi, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51272

Band 116 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 18

Baustatik vor 100 Jahren - die Baustatik Naviers

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E. T. H., Zürich[1])

1. Es ist eine besonders reizvolle Aufgabe, dem Stand der Baustatik im ersten Drittel des letzten Jahrhunderts nachzuspüren, weil sich gerade in jener Zeit erstmals eine typisch *baustatische Denkweise* feststellen lässt, eine besondere Art also, die Gesetze und Regeln der Mechanik auf die Bemessung von Tragwerken anzuwenden. Die ausgesprochen quantitative Problemstellung, die bei dieser Aufgabe auftritt, d. h. die Notwendigkeit, ein Problem der Mechanik hier nicht diskutierend zu ergründen, sondern unter Beachtung der gegebenen Besonderheiten des Einzelfalles numerisch zu lösen, erfordert gegenüber den Methoden der theoretischen Mechanik eine besondere Betrachtungsweise. Vor der Zeit, die wir hier betrachten, haben eine Reihe der hervorragendsten Theoretiker der Mechanik gelebt: Galilei, Newton, Jakob Bernoulli, Euler, Leibniz, Lagrange u. a.; ihre Arbeiten hatten aber auf das Bauwesen keinen oder nur einen unwesentlichen Einfluss, weil sie sich auf zu stark idealisierte Voraussetzungen statt auf die wirklichen Eigenschaften der Baustoffe und auf die wirklichen Arbeitsbedingungen der Tragwerke stützten und weil ihre mathematische Formulierung meist für den Konstrukteur unverständlich und deshalb auf den Konstruktionstisch nicht übertragbar war. Aus dieser Negierung der praktischen Bedürfnisse des Bauwesens durch die theoretischen Mechaniker ist wohl der boshafte Spruch zu erklären, den uns der englische Ingenieur Tredgold[2]) überliefert hat: «The Stability of a building is inversely proportional to the science of the builder». Den Gegensatz zwischen Theorie und Praxis, der in diesem Spruch zum Ausdruck kommt und der auch heute noch gelegentlich als Schlagwort weiterlebt, hat vor allem ein Ingenieur zu überbrücken gesucht: *Louis Navier*.

Die Aufgabe, die sich Navier (1785 bis 1836) gestellt hat, bedeutet nichts Geringeres als die Aufstellung einer eigentlichen Baustatik. Vor Navier und auch von seinen Zeitgenossen wird der Zweck der Baustatik durch zwei Gruppen von Gleichgewichtsaufgaben umschrieben, von denen sich die erste auf das Gleichgewicht der äussern Kräfte, die andere auf das Gleichgewicht zwischen Schnittkräften und innern Spannungen bezieht. Wir finden diese Definition beispielsweise im Werke von P. S. Girard über die Festigkeit der Körper[3]) und in ganz ähnlicher Form bei Tredgold[4]), der die erste Gruppe unter der Bezeichnung «Stability of Position» und die zweite Gruppe mit «Stability of Resistance» zusammengefasst hat. Im Gegensatz zu dieser damals offenbar allgemeinen Umschreibung der Aufgabe der angewandten Mechanik steht Navier[5]), der zwei Hauptaufgaben der angewandten Mechanik bei der Bemessung von Tragwerken zu lösen sucht, nämlich die Ermittlung der Formänderungen unter der Belastung und die Ermittlung der grössten tragbaren Last oder der Bruchlast eines Tragwerkes. Beide Aufgaben beruhen auf Baustoffeigenschaften, die nur auf dem Versuchsweg bestimmt werden können, nämlich auf dem Elastizitätsmodul und der Bruchfestigkeit. Von allem Anfang an baut sich das Werk Naviers auf diesen beiden wirklichen Eigenschaften der Baustoffe auf. Dass hier Gleichgewichtsaufgaben vorliegen, ist offenbar für Navier so selbstverständlich, dass er in seinem Vorwort dies gar nicht besonders hervorhebt. Aus der Bruchlast kann nach Navier durch Nachrechnung bestehender Bauwerke, die sich bewährt haben, und Vergleich der dort feststellbaren vorhandenen Beanspruchungen mit den Festigkeiten der erforderliche Sicherheitsgrad oder, etwas anders ausgedrückt, die zulässige Beanspruchung für jeden Baustoff und jede Beanspruchungsart bestimmt werden. Der Gegensatz zwischen Navier und seinen Vorgängern und Zeitgenossen ist ein grundsätzlicher: Navier stellt sich auf den Boden der Erfahrung und der durch Versuche zu bestimmenden Grundlagen einer Baustatik, während vor, und teilweise auch noch nach ihm, die Baustatik lediglich als die Theorie der Gleichgewichtsaufgaben betrachtet wurde, zu deren Lösung weder Erfahrung noch Versuche, sondern lediglich theoretische Ueberlegungen notwendig seien.

Navier hat in seinen beiden baustatischen Hauptwerken, dem bereits erwähnten Résumé des Leçons, und in seinem Werk über Hängebrücken[6]) in umfassender Weise die Bemessungsgrundlagen zusammengestellt, die die Baupraxis seiner Zeit benötigte. Es sollen im Folgenden einige dieser Aufgaben und ihre Lösung durch Navier herausgegriffen und skizziert werden, um so zu einem Bild über die Denkweise Naviers und damit über den Ausgangspunkt der Entwicklung der Baustatik während der letzten 100 Jahre zu gelangen.

2. Die bekannteste Leistung Naviers ist die nach ihm benannte klassische *Biegungslehre*, die auch heute noch in der Praxis voll befriedigt, mit Ausnahme jener Fälle, die wir etwa unter der Bezeichnung der Biegung und Verdrehung zusammengesetzter dünnwandiger Stahlstäbe zusammenfassen können.

Die ersten Versuche, die Tragfähigkeit von auf Biegung beanspruchten Balken zu berechnen, gehen auf Galileo Galilei[7]) zurück. Galilei nimmt an, dass im Bruchquerschnitt eine Drehung um den untern Querschnittsrand eintrete, dass ferner die dem Moment Pl Gleichgewicht haltenden Spannungen über die ganze Querschnittsfläche konstant seien (Abb. 1). Die Momentengleichgewichtsbedingung bei rechteckigem Balkenquerschnitt lautet somit

$$Pl = \sigma \frac{b h^2}{2}$$

Diese Darstellungsweise liefert selbstverständlich unrichtige Werte für die Biegungsfestigkeit, sie erlaubt aber anderseits doch schon gewisse Aufgaben zu lösen, bei denen es nur auf einen relativen Vergleich der tragbaren Momente ankommt, wie beispielsweise die Konstruktion eines Trägers gleicher Festigkeit.

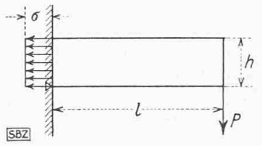


Abb. 1. Biegung nach Galilei

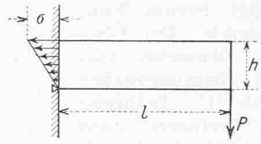


Abb. 2. Biegung nach Leibniz

Leibniz[8]), angeregt durch Beobachtungen von Mariotte, schreibt den einzelnen Fasern des Balkens elastische Eigenschaften zu; die Beanspruchungen sind danach nicht mehr konstant, sondern proportional zum Abstand von der Drehaxe (Abbildung 2). Die Gleichgewichtsbedingung liefert uns hier den Zusammenhang

$$Pl = \sigma \frac{b h^2}{3}$$

In diesen beiden Formeln ist wohl die Momentengleichgewichtsbedingung erfüllt, dagegen nicht die Bedingung, dass die Resultierenden der Zug- und Druckspannungen sich gegenseitig aufheben müssen.

Einen wertvollen Einblick in den Stand der Biegungslehre unmittelbar vor Navier erhalten wir durch das bereits erwähnte Werk von Girard[3]). Girard sieht beide Bruchausarten als möglich an, er schreibt die Form nach Galilei unelastischen Materialien wie etwa Stein zu, während die Form nach Leibniz für elastische Körper wie etwa Holz gelten soll. Es ist Girard bekannt, dass Jacob Bernoulli schon im Jahre 1704[9]) beobachtet hat, dass nur ein Teil der Fasern des Balkens auf Zug, ein anderer Teil jedoch auf Druck beansprucht ist und dass spannungslose Fasern entsprechend der Nullinie als Gleichgewichtsaxe sich innerhalb des Querschnittes befinden. Allerdings zieht Bernoulli und mit ihm auch Girard den falschen Schluss, dass die Lage dieser Nullinie ohne Einfluss auf das Moment der

[1]) Nach einem Vortrag gehalten in der S. I. A.-Fachgruppe der Ingenieure für Brückenbau und Hochbau am 18. März 1939.

[2]) *T. Tredgold* (gestorben 1829, 41 Jahre alt): Practical Essay on the Strength of Cast Iron and other Metals. 3. Aufl. 1831.

[3]) *P. S. Girard:* Traité analytique de la Résistance des Solides et des Solides d'égale Résistance, Paris 1798.

[4]) *T. Tredgold:* Elementary Principles of Carpentry. 3. Aufl. bearbeitet von P. Barlow, London 1840.

[5]) *L. Navier:* Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines, Paris 1826, 1ère Partie, 2. Aufl., 1833.

[6]) *L. Navier:* Rapport et Mémoire sur les Ponts suspendus, Paris 1823.

[7]) *Galileo Galilei:* Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, 1638.

[8]) *G. [G. Leibniz:* Demonstrationes novae de Resistentia Solidorum, Acta Erudit. Lipsiae 1684.

[9]) *Jacob Bernoulli:* Mémoires de l'Académie des Sciences, 1704.

innern Spannungen sei. Es ist hervorzuheben, dass Girard nicht etwa als ein beliebiger Aussenseiter und deshalb als nicht massgebend betrachtet werden darf, wurde doch sein Werk durch keinen geringeren als Coulomb dem Institut National des Sciences et Arts zur Annahme warm empfohlen.

Navier unterscheidet eine Gleichgewichtsaufgabe gegen Verbiegen und eine Gleichgewichtsaufgabe gegen Bruch. Er geht für einen in der Symmetrieebene auf Biegung beanspruchten Balken von folgenden drei Gleichgewichtsbedingungen aus: 1. Aus den Zug- und Druckkräften müssen Vertikalkräfte entstehen (Schubspannungen), die mit der Belastung P bzw. der Querkraft im Gleichgewicht sind. 2. Die Summe der Horizontalkräfte, die als Resultierende der Spannungen entstehen, muss 0 sein. 3. Es muss Momentengleichgewicht bestehen.

Bei der Untersuchung der Formänderungen geht Navier von der Gleichgewichtsbedingung aus

$$\frac{E\,J}{\varrho} = -M$$

die grundsätzlich schon Bernoulli und Euler bekannt war. Navier nimmt jedoch im Gegensatz zu diesen Mechanikern flache Biegungslinien an, sodass er für seine Formänderungsaufgaben den angenäherten Wert für den Krümmungsradius

$$\frac{1}{\varrho} = y''$$

statt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

einführen darf. Die sich damit ergebende Grundgleichung

$$E\,J\,y'' = -M$$

ist mit einfachen Mitteln lösbar. Bei der Aufgabe der Spannungsermittlung führt die Momentengleichgewichtsbedingung auf die richtigen Werte der Randspannungen, wenn vorher aus der Gleichgewichtsbedingung 2) die Lage der Bezugsaxen für die Abstände y ermittelt wurde. Navier gibt im Anschluss an diese Untersuchungen die praktischen Bemessungsformeln für die wichtigsten vorkommenden Tragwerkselemente an. Er stellt dabei ausdrücklich fest, dass diese Gleichungen nur für verhältnismässig schlanke Balken Gültigkeit besitzen.

Dass diese Biegungslehre wirklich eine Schöpfung Naviers ist, können wir auch daraus feststellen, dass in zeitgenössischen Werken noch durchaus Girard als massgebend angesehen wird. Recht interessant ist in dieser Beziehung ein englisches Werk von Gregory, das von einem Lehrer an der Königl. Preuss. Bauakademie, Dr. Dietlein, übersetzt und 1828 herausgegeben wurde [10]). Während der Verfasser noch durchaus die Galileische Vorstellung teilt, hat der Uebersetzer die erwähnte Bemerkung Jacob Bernoullis (Nullinie im Querschnitt) berücksichtigt; da er aber die Gleichgewichtsbedingung zwischen innern Zug- und Druckkräften ebenfalls nicht verwendet, kommt er praktisch auch nicht weiter als etwa Girard.

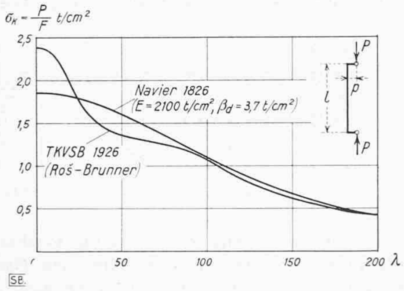


Abb. 4. St. 37: Exzentrisches Knicken, $m = p/k = 1$

Es ist hier noch ausdrücklich Folgendes festzustellen: Wenn die nach Navier benannte Biegungslehre nicht mehr für alle Anwendungen der heutigen Baupraxis gültig ist, so ist dies nicht die Schuld Naviers, sondern diejenige einer Extrapolation der von Navier verwendeten Grundlagen, nämlich des Hooke'schen Gesetzes und der Bernoulli-Navier'schen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte. Navier hat nur die Biegung von in einer Symmetrieebene belasteten Trägern untersucht. Bei der Biegung von unsymmetrischen zusammengesetzten Profilen und bei der Torsionsbeanspruchung solcher Querschnitte, also bei Aufgaben, zu deren Lösung für Navier noch kein praktisches Bedürfnis vorlag, ist seine Biegungslehre zu erweitern.

3. Wenn wir heute über das *Knickproblem* sprechen, so müssen wir an eine Reihe von Unfällen erinnern, die wegen fehlender Knicksicherheit eingetreten sind. Vom Einsturz des Hamburger Gasbehälters am 7. Dezember 1909 an hat sich eine intensive Beschäftigung mit dem Knickproblem entwickelt, die zu einer scharfen Trennung zwischen elastischem und unelastischem Knickbereich geführt hat. Es ist in diesem Zusammenhang interessant festzustellen, dass schon Navier aus der Beurteilung früherer Versuchsergebnisse von Aubry, Girard, Lamandé und besonders Rondelet [11]) klar erkannt hat, dass die Euler'sche Knickformel, die er übrigens auf bemerkenswert einfache und elegante Art unter der zutreffenden Annahme kleiner Ausbiegungen beim Beginn des Knickvorganges ableitet, nicht unbeschränkt gültig ist, sondern dass für gedrungene Stäbe nicht die «Stabilität», sondern die «Festigkeit» massgebend sein muss. Navier stellt fest, dass Unterschiede zwischen Versuch und Rechnungen darauf beruhen müssen, dass die Voraussetzungen der Rechnung nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen, und dass, sobald im Versuch die Voraussetzungen der Rechnung realisiert werden, auch die Ergebnisse übereinstimmen müssen. Er kennt die Mittel noch nicht, die eine allgemeine Darstellung der Knickspannungslinie im unelastischen Bereich erlauben würden. Aus verschiedenen Ueberlegungen und der Versuchsbeurteilung gibt er jedoch für die hier wichtigsten Baustoffe Holz und Schmiedeisen charakteristische Punkte im unelastischen Bereich an (Abbildung 3). Legen wir den unelastischen Bereich näherungsweise durch je eine Gerade durch diese beiden von Navier angegebenen Punkte fest, so erhalten wir verblüffend gute Uebereinstimmung mit den 70 Jahre später von Tetmajer empirisch gefundenen Formeln, die wegen ihrer einfachen Handhabung auch heute noch mit Recht die Grundlage von Bemessungsvorschriften bilden. Eine Reihe schwerer Rückschläge und Unfälle hätte vermieden werden können, wenn die Erkenntnisse Naviers nicht während längerer Zeit vergessen, sondern in der Baupraxis lebendig geblieben wären.

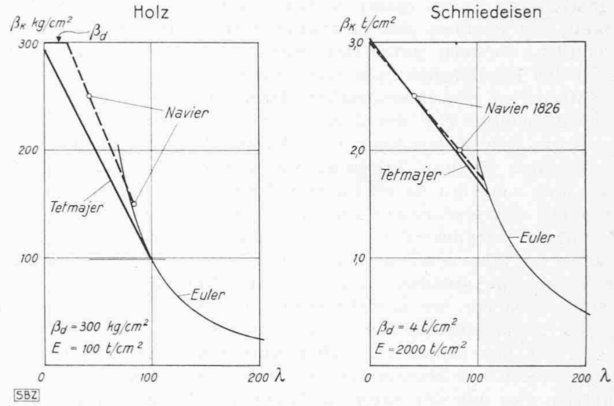


Abb. 3. Vergleich der Knickformeln von Euler und v. Tetmajer mit Angaben von Navier

Es ist wohl ebenfalls wenig bekannt, dass Navier schon das Problem des *exzentrischen Knickens* untersucht hat, indem er die grösste Randspannung, die bei diesem Spannungsproblem 2. Ordnung auftritt, der Druckfestigkeit gleichsetzt. Abb. 4 zeigt das Ergebnis der Navier'schen Theorie für eine Druckfestigkeit von 3,7 t/cm² verglichen mit den genau 100 Jahre jüngeren Werten der T. K. V. S. B. (Roš-Brunner). Der einzige wesentliche Fortschritt, den wir seit Navier bei der Behandlung dieses Spannungsproblems 2. Ordnung feststellen können ist der, dass an Stelle der Bruchfestigkeit die Fliessgrenze wegen des starken Anwachsens der Formänderungen als massgebend erkannt worden ist.

Bei einem schiefen Stab nach Abb. 5 hatte noch Girard behauptet, dass nur die zur Stabaxe senkrechte Komponente Q der Last P einen Bruch verursachen könne, während die Druckkraft N ohne Einfluss auf die Sicherheit des Tragwerkes sei. Wir verdanken ebenfalls Navier die korrekte Lösung für dieses

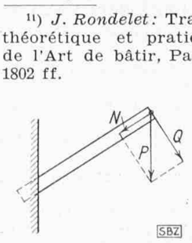


Abb. 5. Druck u. Biegung

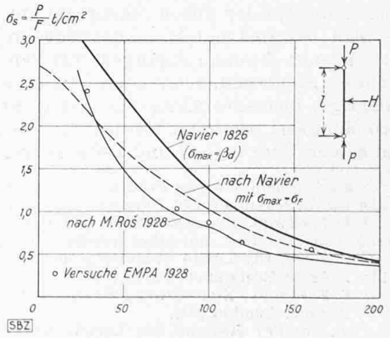


Abb. 6. St. 37: Knicken mit Querbelastung, $H = P/50$

[10]) *O. Gregory:* Theoretische, praktische und beschreibende Darstellung der mechanischen Wissenschaften. Uebersetzt und mit Bemerkungen und Zusätzen versehen von Dr. *J. F. W. Dietlein.* Halle 1828.

[11]) *J. Rondelet:* Traité théorétique et pratique de l'Art de bâtir, Paris, 1802 ff.

Spannungsproblem 2. Ordnung. Abb. 6 zeigt die Auswertung der Navier'schen Theorie für einen beidseitig gelenkig gelagerten Stab mit konzentrierter Querbelastung in Stabmitte und den Vergleich mit den rechnerischen und versuchstechnischen Ergebnissen der Arbeiten von M. Roš, 1928.

4. Die grundsätzliche Lösung einer Reihe *statisch unbestimmter Aufgaben* geht ebenfalls auf Navier zurück, so des durchlaufenden Balkens und des Zweigelenkbogens. Navier schreibt z. B. über den durchlaufenden Balken folgendes:

«Quand une verge rigide chargée de poids est soutenue sur un nombre de points d'appui plus grand que 2, les efforts que chacun de ces points d'appui doit supporter sont indéterminés entre certaines limites. Ces limites peuvent toujours être fixées par les principes de la statique. Mais, si l'on suppose la verge élastique, l'indétermination cesse entièrement.»

Die Lösung derartiger Probleme bei Navier ist grundsätzlich die gleiche wie sie heute noch in der Statik üblich ist: die Reaktion überzähliger Stützenwiderstände ist so zu bestimmen, dass die Formänderungen mit den gegebenen äussern Bedingungen übereinstimmen. So ist beispielsweise bei einem Zweigelenkbogen der Horizontalschub aus der Bedingung zu ermitteln, dass der waagrechte Abstand der beiden Auflagerpunkte unverändert bleibt. Navier gelangt auf Grund einer solchen Untersuchung sogar zu einer Einflusslinie für den Horizontalschub, die er zunächst unter Vernachlässigung des Längskrafteinflusses mit

$$H = \frac{5}{64}\,\frac{5\,a^4 - 6\,a^2 x^2 + x^4}{a^3 f}\,P$$

angibt, wobei die Bezeichnungen in Abb. 7 eingetragen sind. Die Grösse dieser Leistung Naviers wird verdeutlicht, wenn wir die Darstellung statisch unbestimmter Probleme bei Zeitgenossen von Navier damit vergleichen. So gibt Poisson [12]), der doch sicher ein hervorragender Mechaniker war, als Beispiel für ein statisch unbestimmtes Problem einen Tisch mit fünf Beinen an, für den er diskutierend nachweist, dass dank der Elastizität des Tisches eine Bestimmung der fünf Auflagerkräfte möglich sein müsse, ohne jedoch eine Lösung selbst anzugeben. Er schliesst seine Ausführungen mit dem wohl scharfsinnigen, aber praktisch kaum verwendbaren Satz:

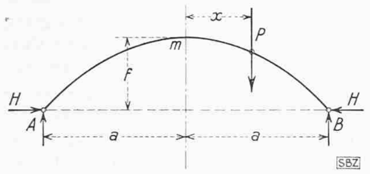


Abb. 7. Zweigelenkbogen

«Nous nous bornerons ici à remarquer que tout est nécessairement déterminé dans la nature, et que quand quelque chose nous semble indéterminé, c'est que nous avons fait abstraction de quelque donnée du problème, c'est-à-dire, de quelque propriété de la matière, comme le degré de flexibilité de la table, dans la question présente.»

Navier gibt, wie bei den meisten der von ihm rechnerisch behandelten Probleme, auch hier Versuchsergebnisse bekannt, die er hier von Duleau [13]) übernimmt. Die Beobachtung der Scheiteldurchbiegungen infolge einer Einzellast im Scheitel eines schmiedeisernen Zweigelenkbogens mit 6,32 m Spannweite und rd. 0,7 m Pfeilhöhe bei einem Querschnitt von 6 cm Breite und 2 cm Höhe ist in Abb. 8 für zwei Parallelversuche dargestellt. Diese Versuchsergebnisse stimmen offensichtlich nicht überein mit den Untersuchungen Naviers auf Grund der Elastizitätstheorie. Diese Unstimmigkeit muss ihm auch aufgefallen sein. Da er aber keinerlei Erklärung darüber abgibt, dürfen wir vermuten, dass in diesem Problem der Formänderungstheorie der elastischen Bogen Grenzen des Denkbereichs von Navier ersichtlich sind.

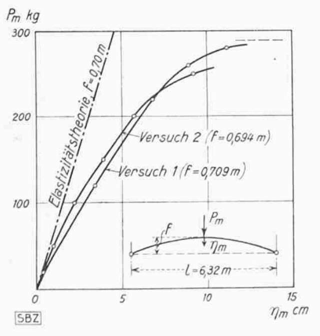


Abb. 8. Zweigelenkbogen, Versuche von Duleau

Eine Uebertragung der Elastizitätstheorie von Bogenträgern auf die Berechnung massiver Gewölbe hat Navier noch nicht vorgenommen. Immerhin hat er die Coulomb'sche Theorie des Gewölbes aus unelastischem Material insofern verbessert, als er darauf hinweist, dass eine durch die obere oder untere Kante einer Bruchfuge durchgehende Drucklinie unendlich grosse Beanspruchungen hervorrufen müsste.

Navier hat auch Aufgaben der *Plattentheorie* zutreffend gelöst (Abb. 9); wir verdanken ihm ferner die Grundlagen der *Membrantheorie* von Schalen wie sie etwa für Flüssigkeitsbehälter damals schon in Betracht kamen.

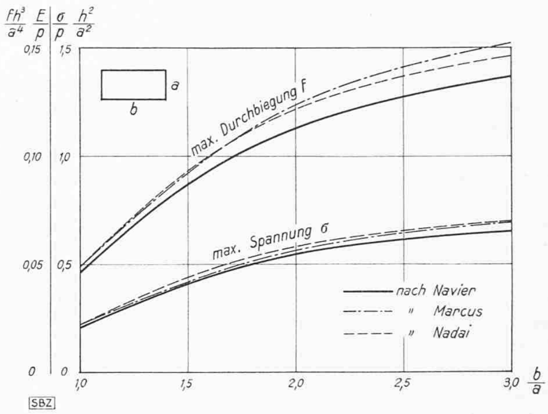


Abb. 9. Rechteckige Platten mit gleichmässig verteilter Belastung ($\nu = o$)

5. Während Navier bei den meisten Aufgaben eine geschlossen formulierte Lösung anstrebt, treffen wir in seinen Werken wieder Lösungen, die diese Forderung nicht erfüllen, sondern einfach unter besonderer Anpassung an die Schwierigkeiten des Einzelfalles eine praktische Bemessung zu ermöglichen suchen. So schreibt Navier bei der Untersuchung des Krangerüstes der Abb. 10, dass es in den Anwendungen oft nicht so sehr darauf ankomme, die wirkliche Bruchlast zu kennen, als vielmehr eine untere Grenze für die Tragfähigkeit, und dass man in derartigen Fällen die komplizierte Berechnung des statisch unbestimmten Systems vermeiden könne. Navier denkt sich dieses Krangerüst in zwei Teilsysteme zerlegt, einerseits in den einfachen Balken AB und anderseits in das Sprengwerk $CDEF$ und stellt fest, dass die Tragfähigkeit des ganzen Tragsystems mindestens gleich gross sein müsse wie die Tragfähigkeit des stärkeren der beiden Teilsysteme. Durch diese Darstellung bringt Navier eindeutig den Beweis dafür, dass es ihm nur darum zu tun ist, sicher und zuverlässig bauen zu können und nicht etwa rein theoretische Probleme zu lösen.

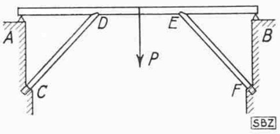


Abb. 10. Krangerüst

Eine hübsche Anwendung einer Lösung durch sukzessive Approximation finden wir in Naviers Werk über die Hängebrükken bei der Untersuchung des in Abb. 11 dargestellten Belastungsfalles eines Tragkabels. Es lassen sich hier mit Gleichgewichtsbedingungen die Neigungswinkel an den Stellen A, 1, 2 und B anschreiben, die für den ersten Ast A — 1 wie folgt lauten:

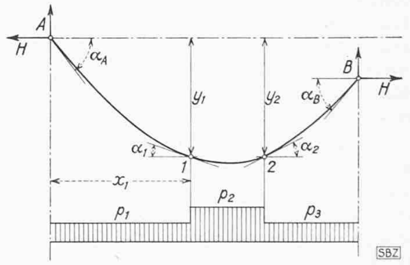


Abb. 11. Untersuchung eines Tragkabels (nach Navier)

$$\operatorname{tg}\alpha_A = \frac{y_1}{x_1} + \frac{p_1 x_1}{2H}\,;\quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_A - \frac{p_1 x_1}{H} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{p_1 x_1}{2H}$$

Unbekannt sind, da die Neigungswinkel links und rechts der Punkte 1 und 2 gleich gross sein müssen, die vier Neigungswinkel α_A, α_1, α_2 und α_B, ferner die Ordinaten y_1 und y_2. In allen Gleichgewichtsbedingungen kommt als weitere Unbekannte der Horizontalschub vor, der daraus zu bestimmen ist, dass, abgesehen von den elastischen Verlängerungen des Kabels, die Kabellänge im unbelasteten und im belasteten Zustand gleich gross sein muss. Da aber die Gleichung der Kabellänge auf eine logarithmische Funktion oder auf eine Reihenentwicklung führt, ist es praktisch ausgeschlossen, eine lösbare Bestimmungsgleichung für den Horizontalschub H aufzustellen. Navier geht des-

[12]) *S. D. Poisson:* Traité de Mécanique, Paris 1833.

[13]) *Duleau:* Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé.

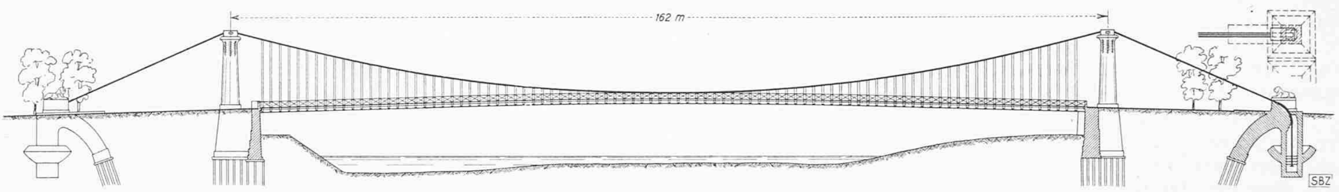


Abb. 12. Entwurf Louis Naviers für die Hängebrücke «Pont des Invalides» in Paris, 1824

halb so vor, dass er zunächst den Horizontalschub H schätzt und mit diesem geschätzten Wert die geometrischen Grössen tg α und y ausrechnet und dann mit diesen Werten prüft, ob die Bedingung über die Seillänge erfüllt ist. Er kommt damit auf dem Wege der wiederholten Schätzung der Lösung zum Ziel, und wir dürfen, dank dieser Verwendung schon durch Navier, die Methode der sukzessiven Approximation, die aus der heutigen Statik nicht mehr wegzudenken ist, als eine der klassischen baustatischen Methoden bezeichnen.

6. Dass Navier seine theoretischen Arbeiten nicht als Theoretiker, sondern aus dem Bedürfnis, zuverlässig bauen zu können, durchgeführt hat, können wir nicht nur aus seinen eigenen Werken ersehen, sondern auch daraus, dass er praktische Werke von früheren grossen Ingenieuren, wie den Traité de la Construction des Ponts von Gauthey und die Science des Ingénieurs von Bélidor neu bearbeitet, ergänzt und herausgegeben hat. Um so tragischer ist es, dass er mit einem seiner baulichen Hauptwerke, einer Hängebrücke über die Seine, deren Entwurf er in seinem «Rapport et Mémoire sur les Ponts suspendus» beschreibt, keinen Erfolg hatte. Der Entwurf der Seine-Brücke (Pont des Invalides, Abb. 12, 13) wurde einer Kommission zur Begutachtung vorgelegt und von dieser mit kleinen Aenderungen zur Ausführung empfohlen. Offenbar war aber diese Ausführung dem Stadtrat von Paris nicht genehm, wie gesagt wird, weil durch diese Brücke die frontale Aussicht auf den Dôme des Invalides beeinträchtigt würde, sodass die Ausführung durch eine Gesellschaft, die ihre Ausgaben aus dem Brückenzoll zu decken hatte, an die Hand genommen werden musste. Im September 1826 nach ungefähr zweijähriger Bauzeit war die Brückenbahn (Abb. 14) fast fertig aufgehängt; da traten unter den Ablenkungspunkten der Rückhaltketten bei den Widerlagern Risse im Mauerwerk und einige Quaderbrüche auf. Durch zufällige ungünstige Umstände (Tod eines Unternehmers, Jahreszeit, Wasserhaltung) konnte dieser verhältnismässig geringfügige Schaden nicht sogleich ausgebessert werden und die Opposition hatte Zeit, gegen das Werk zu arbeiten. Der Stadtrat verlangte den Abbruch der Brücke kurz vor ihrer Vollendung. Dieser Zwischenfall ist für Navier tragisch und hat ihn, wie wir bestimmt annehmen dürfen, tief erschüttert. Navier schreibt selbst: «Entreprendre un grand ouvrage et surtout un ouvrage d'un genre nouveau, c'est faire un essai; c'est engager avec les forces naturelles une lutte dont on n'est point assuré de sortir vainqueur dès la première attaque». Navier hätte beim Pont des Invalides den Kampf gegen die Kräfte der Natur bestimmt, wenn auch nicht im ersten Anlauf, so doch im zweiten, gewonnen. Den Kampf aber gegen den Stadtrat von Paris hat er verloren. Er starb zehn Jahre später, 1836, erst 51 Jahre alt.

7. Wenn wir uns zum Schluss nun kurz überlegen wollen, worin die Besonderheit der Leistung Naviers besteht, so können wir etwa folgendes feststellen: Navier hat in sich in glücklichster Weise die geistige Einstellung des Konstrukteurs, der bauen wollte, mit einer vollendeten Beherrschung der theoretischen Grundlagen und Hilfsmittel vereinigt. Es gab wohl früher schon eine Reihe von hervorragenden Baumeistern, in denen die gesammelten praktischen Erfahrungen von Generationen her ein bewundernswert sicheres Gefühl für das Kräftespiel in Tragwerken zu bilden vermocht hatten, wie etwa bei Grubenmann und Perronet. Dies waren jedoch einmalige Erscheinungen, die wohl eine bestimmte Entwicklung abschliessen konnten, deren Leistungen mit den gleichen Mitteln jedoch nicht mehr zu übertreffen waren.

Mit dem Anwachsen von Zahl und Grösse der Bauaufgaben und den damit zusammenhängenden wirtschaftlichen Forderungen, mit der Aufnahme neuer Baustoffe in die Baupraxis wurde es notwendig, dem konstruktiven Gefühl ein unpersönliches, objektives Instrument, eben die Baustatik, beizugeben, um sicher und wirtschaftlich bauen zu können. Das hat Navier erkannt.

Seine Ueberlegungen entsprechen der Forderung ökonomischen Denkens. So ist beispielsweise die Differentialgleichung der elastischen Linie bei ihm nicht nur etwa ein geometrischer Zusammenhang und ihre Lösung eine reizvolle mathematische Aufgabe, sondern sie wird bewusst als Gleichgewichtsbedingung aufgefasst und ihre Auswertung dient dazu, das elastische Verhalten eines Tragwerks beurteilen zu können. Er stellt sich auf den Boden der Wirklichkeit, wenn er die Formänderungen eines Balkens als klein ansieht: die dadurch möglichen formalen Vereinfachungen erlauben ihm mit einer für die Baupraxis genügenden Genauigkeit, neue Aufgaben zu lösen, für die sich der Theoretiker vielleicht gerade deshalb nicht interessiert hatte, weil sie nicht in aller Schärfe lösbar sind. Charakteristisch für den Ingenieur und Konstrukteur Navier ist auch die Beurteilung der Gültigkeitsgrenzen eines theoretischen Ergebnisses, die ihn z. B. beim Knickproblem zu einer verblüffend zutreffenden Erkenntnis des ganzen Knickbereiches geführt hat.

Navier verfügt ferner über eine grosse Beweglichkeit in der Wahl der Methoden, nach denen er ein Tragwerk untersucht. Sein Vorgehen ist alles andere, nur nicht schematisch, und er besitzt den Vorzug, in jedem Einzelfall mit klarem Blick die zur Verfügung stehenden Mittel so einzusetzen, dass das gesuchte Ergebnis mit dem geringsten Aufwand an Zeit und Anstrengung erreicht wird.

Diesen klaren Blick für das Wesentliche, diese Kraft der Anschauung haben auch nach Navier wohl nur wenige Statiker und Konstrukteure besessen, wie etwa Carl Culmann in seiner graphischen Statik und mit der Erfassung des Kräftespiels in Fachwerkträgern, und Otto Mohr in einigen seiner Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Alle Nachfolger Naviers aber haben nur in Einzelgebieten neue Schöpfungen hervorbringen können, denn Navier hat Allen den Aufbau einer umfassenden Baustatik vorweggenommen.

Wenn wir heute sicher und wirtschaftlich bauen können, so ist eine der Hauptgrundlagen dafür die Baustatik, diese besondere, auf der Wirklichkeit der Arbeitsbedingungen eines Tragwerkes aufgebaute Art der Mechanik, die im Wesentlichen in der Zeit von wenig mehr als einem Jahrzehnt von einem einzigen Manne, eben von Navier, geschaffen wurde.

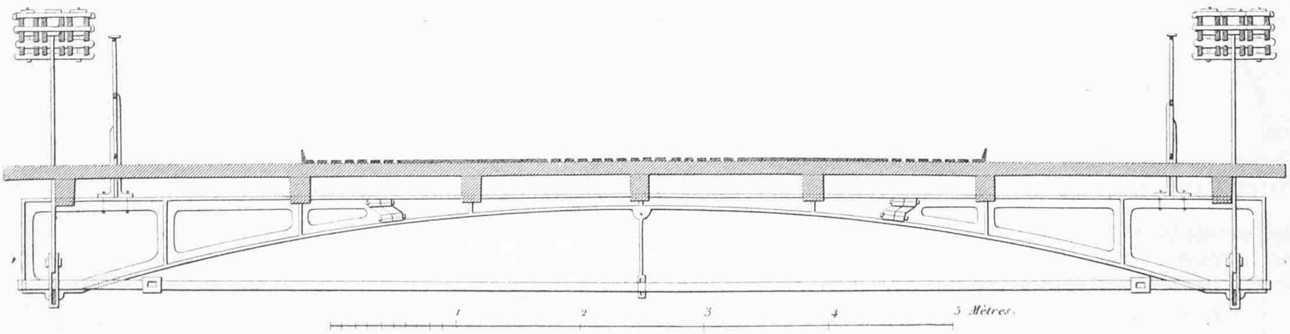


Abb. 14. Querschnitt (1:55) des «Pont des Invalides» in Paris (Aus: Navier, Rapport et Mémoire sur les Ponts suspendus)

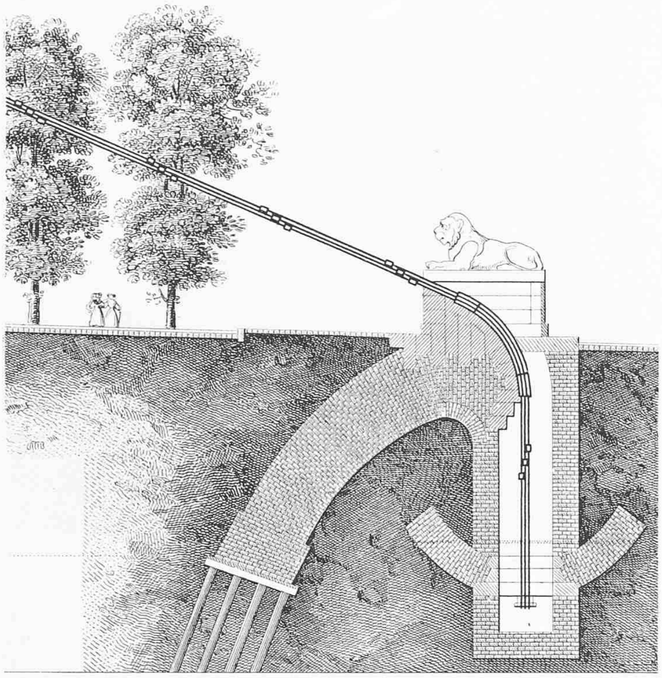


Abb. 13. Verankerung der Rückhalteketten, originalgetreue Wiedergabe

Praktische Fourier-Analyse

Eine zeichnerisch-rechnerische Ermittlung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion kann man einem Aufsatz von H. Jordan und K. Schönbacher in den «AEG-Mitteilungen», 1940, Heft 5/6 entnehmen, wenn man sich durch seine Umständlichkeit nicht irre machen lässt. Das darin behandelte Beispiel der beistehend skizzierten Halbwelle einer Funktion $y = f(x)$ der Periode 2π diene zur Erläuterung. Es gelte ausser $f(0) = 0$:

$$f(x) = -f(x-\pi)$$

sodass

$$f(x) = \Sigma\,(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad \nu = 1, 3, 5 \ldots$$

mit

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos \nu x\, dx \qquad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin \nu x\, dx$$

Statt der Koeffizienten a_ν, b_ν der Funktion $f(x)$ selber werden nun graphisch die Koeffizienten α_ν, β_ν eines sie annähernden Polygonzuges $y = \varphi(x)$ bestimmt. Die Halbwelle eines solchen ist in der Abbildung eingezeichnet. Sie zerfällt in einige, hier vier, Abschnitte, in deren jedem die Neigung konstant ist. Im i-ten Abschnitt $[x_{i-1}, x_i]$ (wobei $x_0 = 0$, $x_4 = \pi$) ist

$$\varphi'(x) = c_i \quad , \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Natürlich macht man $\varphi(x) = -\varphi(x-\pi)$

An den inneren Grenzpunkten erfährt der Neigungstangens einen Sprung:

$$s_i = c_{i+1} - c_i \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

Ausserdem kann in diesen Punkten die Ordinate von einem linksseitigen Wert φ_l auf einen rechtsseitigen φ_r springen:

$$t_i = \varphi_r(x_i) - \varphi_l(x_i) \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

Nun ist

$$\int_0^\pi \varphi(x) \sin \nu x\, dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) \sin \nu x\, dx$$

und

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) \sin \nu x\, dx = -\frac{\varphi(x) \cos \nu x}{\nu}\Bigg/_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{c_i}{\nu^2} \sin \nu x \Bigg/_{x_{i-1}}^{x_i}$$

daher (wegen $\varphi(x_0) = \varphi(x_4) = \sin \nu x_0 = \sin \nu x_4 = 0$):

$$\beta_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \sin \nu x\, dx = -\frac{2}{\nu\pi}\sum_{i=1}^{3}\left(-t_i \cos \nu x_i + \frac{s_i}{\nu} \sin \nu x_i\right) \quad (1)$$

Da weiter

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) \cos \nu x\, dx = \frac{\varphi(x) \sin \nu x}{\nu}\Bigg/_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{c_i}{\nu^2} \cos \nu x \Bigg/_{x_{i-1}}^{x_i}$$

und $\cos \nu x_0 = 1$, $\cos \nu x_4 = -1$, wird

$$\alpha_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \cos \nu x\, dx =$$

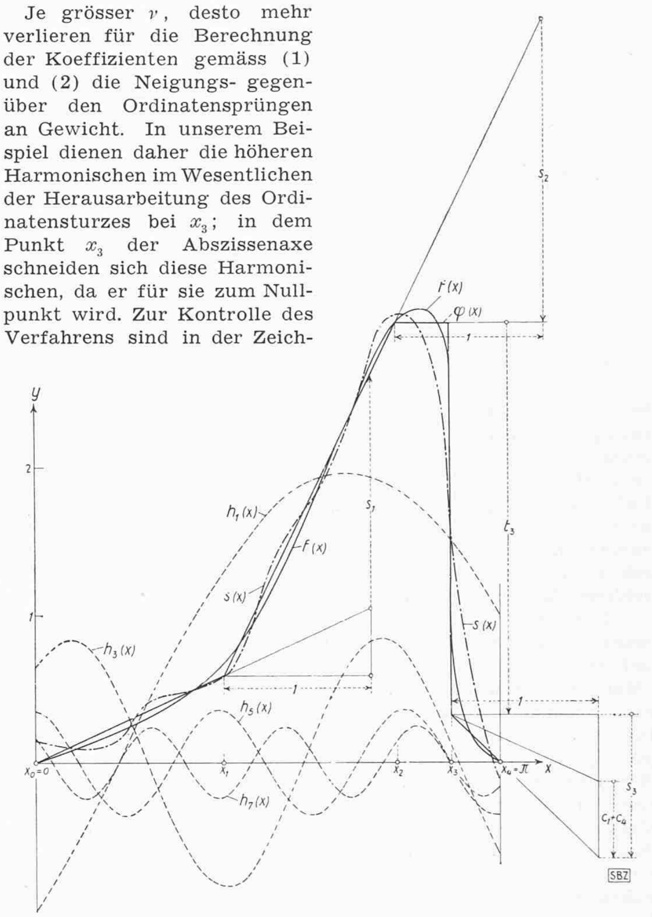
$$-\frac{2}{\nu\pi}\cdot\left[\sum_{i=1}^{3}\left(t_i \sin \nu x_i + \frac{s_i}{\nu} \cos \nu x_i\right) + \frac{c_1 + c_4}{\nu}\right] \quad (2)$$

Neben den x_i entnimmt man die Grössen t_i, s_i, $c_1 + c_4$, wie angedeutet, der Figur. (Positive Strecken sind mit aufwärts, negative mit abwärts weisendem Pfeil versehen.) Daraus ergeben sich nach (1) und (2) beliebig viele Koeffizienten. In unserem Beispiel erhält man

i	x	t	s	
1	1,27	0	1,59	$c_1 + c_4 = -0{,}51$
2	2,45	0	— 2,05	
3	2,81	— 2,65	— 0,97	

$$\text{und} \begin{cases} \beta_1 = 1{,}68 & \beta_3 = 0{,}56 & \beta_5 = -0{,}02 & \beta_7 = -0{,}16 \ldots \\ \alpha_1 = -1{,}01 & \alpha_3 = 0{,}63 & \alpha_5 = 0{,}36 & \alpha_7 = 0{,}18 \ldots \end{cases}$$

Je grösser ν, desto mehr verlieren für die Berechnung der Koeffizienten gemäss (1) und (2) die Neigungs- gegenüber den Ordinatensprüngen an Gewicht. In unserem Beispiel dienen daher die höheren Harmonischen im Wesentlichen der Herausarbeitung des Ordinatensturzes bei x_3; in dem Punkt x_3 der Abszissenaxe schneiden sich diese Harmonischen, da er für sie zum Nullpunkt wird. Zur Kontrolle des Verfahrens sind in der Zeichnung die Harmonischen $h_1(x)$ bis $h_7(x)$ zu einer Halbwelle $y = s(x)$ zusammengesetzt. Für technische Bedürfnisse sind $f(x)$, $\varphi(x)$ und $s(x)$ auswechselbar. Wo moderne Apparate für die Fourier-Analyse nicht zur Hand sind, bietet diese Methode einen brauchbaren Behelf. K. H. G.



Das Riesenteleskop des Mount Palomar

Während in Europa die Kanonen donnern und Fliegerbomben Unheil säen, geht in einem abgeschiedenen Winkel der Vereinigten Staaten, auf dem Mount Palomar[1]) in Californien, eine

[1]) In einer im lfd. Bd., Nr. 1, S. 10 erschienenen Mitteilung nannten wir, einem Irrtum unserer Quelle («Z.VDI» 1940, Nr. 18) folgend, als vorgesehenen Standort des 5 m-Teleskops den Mount Wilson. Für das neue Fernrohr ist aber ein eigener Berg auserkoren worden, der 1700 m hohe Mount Palomar, 144 km von Pasadena (Cal.), fern von störenden Nachtlichtern gegenwärtiger oder künftiger menschlicher Siedelungen gelegen, auf den natürlich eine eigene Strasse gebaut werden musste. Das berühmte Observatorium des Mount Wilson, ein Zeugnis des grossartigen, von amerikanischen Geschäftsleuten zugunsten der brotlosen Kunst der Astrophysik bewiesenen Mäzenatentums, soll in jeder Hinsicht übertroffen werden. Wer sich über einen solchen Aufwand für die Erforschung der Spiralnebel, der Zwerg- und der Riesensterne wundert, möge bedenken, dass für die Spektralanalyse (die mit der Zerlegung des Sonnenlichts begann) das Weltall mit seinen enormen Temperatur- und Dichte-Bereichen ein jedes irdische verdunkelndes Laboratorium darstellt, sodass der Astronom G. E. Hale in einem Aufsatz in «Harper's Monthly Magazine» (April 1928),