

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 117/118 (1941)
Heft: 19

Artikel: Zur Berechnung von Wärmeaustausch-Apparaten
Autor: Baldauff, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Zur Berechnung von Wärmeaustausch-Apparaten. — Das Nivellierinstrument mit Wendelibelle. — Nationale Verkehrspolitik in der Schweiz. — Wohn- und Geschäftshaus «Schönau» an der Dolderstrasse in Zürich. — Erfahrungen beim Betonieren im Kraftwerkbau. — Mitteilungen: Elektrifikation der spanischen Eisenbahnen. 100 Jahre Geschichte der «M. A. N.» Zwei Preisausschreibungen für motorisierte Schneepflüge.

Wiederaufbau Finnlands. Dienstbotenräume im Wohnungsbau. Arbeitsbeschaffung für Architekten in Bern. Pénitencier de Bochuz. Neue Gotthardlokomotive von 6000 PS. 40 Jahre Schweiz. Aeroclub. Eidg. Technische Hochschule. — Wettbewerbe: Turnhallenbau in Zollikon (Zürich). — Nekrologe: Friedrich Gerwer. — Literatur. Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 117

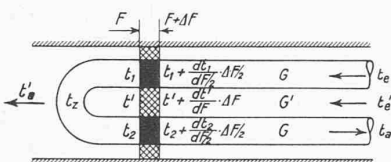
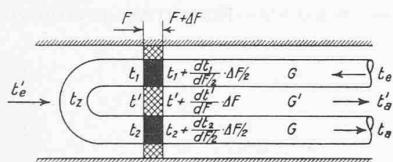
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 19

Zur Berechnung von Wärmeaustausch-Apparaten

Von Dipl. Ing. F. BALDAUFF, SLM Winterthur

Neben Wärmeaustauschapparaten nach dem Prinzip des reinen Gegen- oder Gleichstromes, in denen die beiden durch die wärmeübertragende Wand getrennten Medien in entgegengesetzter oder gleicher Richtung strömen, gibt es auch solche, in denen das eine Medium durch ein oder mehrere parallel geschaltete U-förmige Rohre geführt wird, während das andere aussen herum längs dieses Rohrbündels strömt. Bezüglich des Wärmeaustausches entsteht also in jedem einzelnen Element ein Wechsel zwischen Gleich- und Gegenstrom, wie dies aus Abb. 1 und 2 hervorgeht. Im Folgenden soll das im Innern des U-Rohres strömende Medium als inneres, das aussenherum strömende als äusseres Medium bezeichnet werden. Wie im Fall des reinen Gegenstromes Abb. 3, oder des reinen Gleichstromes, Abb. 4, ist es auch hier nicht gleichgültig, ob man das äussere Medium von der Seite des U-Rohrbogens oder von der Seite der beiden U-Rohrschenkel eintreten lässt. Die beiden Probleme müssen also einzeln behandelt werden. Die Lösung der Aufgabe nach Abb. 1 wurde bereits von Th. Müller¹⁾ angegeben, doch wird seine Ableitung durch Einführung zusätzlicher Variabler weniger übersichtlich, und die Endtemperaturen sind in einer für die Praxis unbequemeren Form dargestellt²⁾.



Wärmeaustausch in U-Rohren mit Zufluss des äusseren Mediums:

Abb. 1 von der Seite des Rohrbogens

und Abb. 2 von der Seite der Rohrschenkel

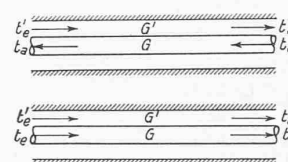


Abb. 3 (oben) Gegenstrom

Abb. 4 (darunter) Gleichstrom

I. Berechnung des Temperaturverlaufes in Wärmeaustausch-Apparaten nach Abb. 1 und 2

Hier soll nun auf einfache Art die Berechnung des Temperaturverlaufes für die beiden Fälle nach Abb. 1 und 2 gleichzeitig abgeleitet, und sollen die Endtemperaturen mit Hilfe von Kurventafeln in eine für die Praxis leicht verwendbare Form gebracht werden, unter Voraussetzung eines stationären Wärmeaustausches und einer turbulenten Strömung längs der wärmeübertragenden Fläche. Weiter soll die Wärmedurchgangszahl k als konstant längs des gesamten Verlaufes angenommen werden³⁾.

Es bedeuten:

- G = Gewicht der strömenden Medien in kg/h.
- c = ihre mittlere spezifische Wärme bei konstantem Druck in kcal/kg °C.
- k = mittlere Wärmedurchgangszahl in kcal/m²h °C.
- F = Wärmeübertragungsfläche längs des U-Rohres in m².
- F_{tot} = Gesamte Wärmeübertragungsfläche in m².
- t_e = Eintrittstemperatur in °C.
- t_a = Austrittstemperatur in °C.
- Δt = Unterschied der Eintritts- und der Austrittstemperatur des selben Mediums.
- Δt_e = Temperaturdifferenz zwischen Eintritt des warmen Mediums und Eintritt des kalten Mediums.
- t_2 = Temperatur des inneren Mediums am Rohrbogen.
- t = Temperatur eines der Medien an irgend einer Stelle F der Wärmeaustauschfläche.
- t_1 = Temp. an irgend einer Stelle des ersten U-Rohrschenkels,
- t_2 = desgleichen im zweiten U-Rohrschenkel.
- $\varepsilon = G/G'$.
- Q = Uebertragene Wärmemenge in kcal/h.

¹⁾ Die Wärmeübertragung im Lokomotivrauchrohr. «Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens», 1934, Heft 15 und 16.

²⁾ In Müllers Abhandlung dient die Aufgabe allerdings nur als Sprungbrett zur Berechnung der Verhältnisse im Lokomotivrauchrohr. (Im Lokomotivrauchrohr müssen die Rauchgase oder das äussere Medium ausser an die U-förmigen Ueberhitzerrohre, noch Wärme nach aussen an das Kesselwasser abgeben.)

³⁾ Hinsichtlich der Bestimmung der Wärmedurchgangszahlen sei auf die einschlägige Literatur verwiesen. (Vgl. z. B. M. ten Bosch, «Die Wärmeübertragung», Verlag Springer, 3. Auflage.)

Durch die Bezeichnung mit Strich' z. B. G' , c' , t' , im Gegensatz zu G , c , t , sollen die beiden Medien voneinander unterschieden werden.

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen für den Temperaturverlauf wollen wir für die in Abb. 1 und 2 schraffierten und schwarz angelegten Volumenelemente die Wärmebilanz anschreiben: Der Unterschied der beiden Wärmemengen, die durch das strömende Medium einerseits in ein solches Element zugeführt, andererseits aus ihm abgeführt werden, wird durch die wärmeübertragende Wand mit der Umgebung ausgetauscht.

So wird für das schwarze Volumenelement im ersten U-Rohrschenkel unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$G c \frac{dt_1}{dF} = \frac{k}{2} (t_1 - t') \dots \dots \dots (1)$$

und für das schwarze Element im zweiten U-Rohrschenkel:

$$- G c \frac{dt_2}{dF} = \frac{k}{2} (t_2 - t') \dots \dots \dots (2)$$

Diese beiden Gleichungen gelten für die Abb. 1 und 2. Zur parallelen Behandlung der beiden Fälle sollen im Folgenden die Gleichungen, die sich auf Abb. 1 beziehen, mit Index a , die auf Abb. 2 bezüglichen Gleichungen mit Index b angeschrieben werden. So folgt aus der Wärmebilanz für das kreuzweise schraffierte Volumenelement:

$$- G' c' \frac{dt'}{dF} = \frac{k}{2} (2t' - t_1 - t_2) \dots \dots \dots (3a)$$

$$\text{bzw. } G' c' \frac{dt'}{dF} = \frac{k}{2} (2t' - t_1 - t_2) \dots \dots \dots (3b)$$

Durch Integration folgt aus diesen drei ersten Gleichungen die Wärmebilanz für eine Teilfläche F vom Rohrbogen aus gemessen:

$$G' c' (t' - t'_e) = G c (t_1 - t_2) \dots \dots \dots (4a)$$

$$G' c' (t'_a - t') = G c (t_1 - t_2) \dots \dots \dots (4b)$$

und aus (1) und (2) erhält man

$$G c \frac{d(t_1 + t_2)}{dF} = \frac{k}{2} (t_1 - t_2) \dots \dots \dots (5)$$

Im Folgenden setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &= y \\ t' - t'_e &= u \end{aligned} \right\} (6a) \quad \left| \quad \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &= y \\ t'_a - t' &= v \end{aligned} \right\} (6b)$$

Dann wird Gl. (5) unter Berücksichtigung von (4):

$$\frac{dy}{dF} = \frac{k G' c'}{2 G^2 c^2} u \quad (7a) \quad \left| \quad \frac{dy}{dF} = \frac{k G' c'}{2 G^2 c^2} v \quad (7b)$$

Nach Addition und Subtraktion von $k t'_e$ in (3a) und $k t'_a$ in (3b) erhält man

$$\frac{du}{dF} = \frac{k}{2 G' c'} (y - 2u - 2t'_e) \dots \dots \dots (8a)$$

$$\frac{dv}{dF} = \frac{k}{2 G' c'} (y + 2v - 2t'_a) \dots \dots \dots (8b)$$

Die Gleichungen (7) und (8) bilden zwei lineare simultane Differentialgleichungen. Durch Einsetzen von (7) in die nach F abgeleitete Gleichung (8) erhält man eine weitere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den Temperaturverlauf des äusseren Mediums.

$$\frac{d^2 u}{dF^2} + \frac{k}{G' c'} \frac{du}{dF} - \frac{k^2}{4 G^2 c^2} u = 0 \dots \dots \dots (9a)$$

$$\frac{d^2 v}{dF^2} - \frac{k}{G' c'} \frac{dv}{dF} - \frac{k^2}{4 G^2 c^2} v = 0 \dots \dots \dots (9b)$$

Die allgemeine Lösung hat die Form:

$$u \text{ bzw. } v = C_1 e^{\gamma_1 F} + C_2 e^{\gamma_2 F} \dots \dots \dots (10)$$

wobei r_1 und r_2 die Wurzeln aus der quadratischen Gleichung

$$r^2 + \frac{k}{G'c'} r - \frac{k^2}{4G^2c^2} = 0 \dots (11a)$$

$$r^2 - \frac{k}{G'c'} r - \frac{k^2}{4G^2c^2} = 0 \dots (11b)$$

sind.

Die Konstanten C_1 und C_2 folgen aus den Grenzbedingungen: für $F = 0$ sind u und $v = 0$ und somit $C_1 = -C_2$ für $F = F_{tot}$ sind u und $v = t_{a'} - t_{e'}$ und somit

$$C_1 = -C_2 = \frac{t_{a'} - t_{e'}}{e^{r_1 F_{tot}} - e^{r_2 F_{tot}}} \dots (12)$$

Als weitere Grenzbedingungen gelten noch:

$$y = 2t_z \text{ für } F = 0 \text{ und}$$

$$y = t_e + t_a \text{ für } F = F_{tot}$$

Für den Temperaturverlauf des äusseren Mediums erhält man aus Gl. (10) unter Berücksichtigung von (11) und (12)

$$t' = t_{e'} + u = t_{e'} + A(t_{a'} - t_{e'}) e^{\frac{k}{2G'c'}(F_{tot} - F)} \dots (13a)$$

$$t' = t_{a'} - v = t_{a'} - A(t_{a'} - t_{e'}) e^{-\frac{k}{2G'c'}(F_{tot} - F)} \dots (13b)$$

mit

$$A = \frac{sh \frac{kF}{2Gc} \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{sh \frac{kF_{tot}}{2Gc} \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \dots (14)$$

Nach Integration von Gl. (7) unter Berücksichtigung von (13) erhält man $y = t_1 + t_2$, aus Gl. (4) die Differenz $t_1 - t_2$ und damit den Temperaturverlauf in den beiden U-Rohrschenkeln:

$$t = t_{e'} + \frac{t_{a'} - t_{e'}}{2} e^{\frac{k}{2G'c'}(F_{tot} - F)} \left[\left(1 \pm \frac{1}{\varepsilon}\right) A + B \right] \dots (15a)$$

$$t = t_{a'} - \frac{t_{a'} - t_{e'}}{2} e^{-\frac{k}{2G'c'}(F_{tot} - F)} \left[\left(1 \mp \frac{1}{\varepsilon}\right) A - B \right] \dots (15b)$$

mit

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \frac{ch \frac{kF}{2Gc} \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{sh \frac{kF_{tot}}{2Gc} \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \dots (16)$$

Durch das obere Vorzeichen innerhalb der Gl. (15) wird der Temperaturverlauf t_1 , durch das untere der Temperaturverlauf t_2 ausgedrückt.

In der Praxis interessieren meistens die Austrittstemperaturen in Funktion der bekannten Eintrittstemperaturen der beiden Medien. Sie lassen sich aus Gl. (15) für t_2 , also mit dem unteren Vorzeichen, und aus Gl. (4) nach Einsetzung der Grenzbedingungen und einigen Zwischenrechnungen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} t_a &= -\frac{1}{\eta} \Delta t_e + t_e \\ t_{a'} &= \frac{\varepsilon}{\eta} \Delta t_e + t_{e'} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

mit

$$\eta = \frac{1 + \varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2th \frac{kF_{tot}}{2Gc} \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \dots (18)$$

Aus Kurventafel Abb. 5 lässt sich η in Funktion von ε und $\frac{kF_{tot}}{Gc}$

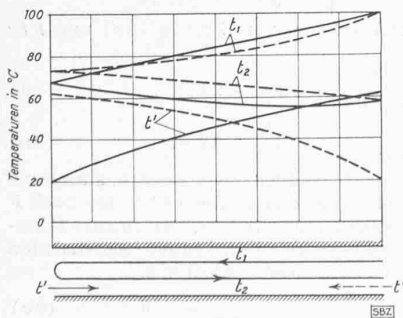


Abb. 6. Beispiel eines Temperaturverlaufes in einem U-Rohr-Austauscher ($\varepsilon = 1$ und $k F_{tot}/G \cdot c = 1,6$)
 ———— Zufluss des äusseren Mediums von der Seite des U-Rohrbogens her,
 - - - - - desgl. von den U-Rohrschenkeln

rasch ablesen. Die Gleichungen (17) und (18) gelten für die beiden Fälle nach Abb. 1 und 2.

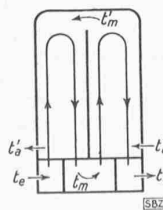


Abb. 7. Prinzip eines Wärmeaustauschers durch Kombination von Abb. 1 und 2

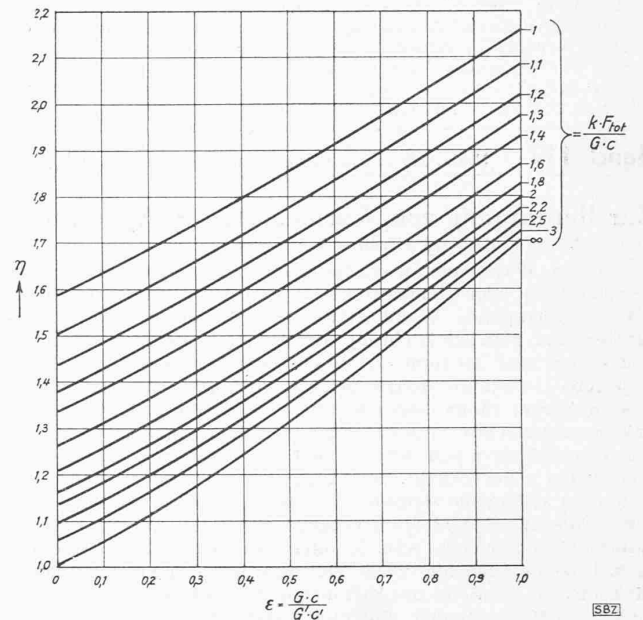


Abb. 5. Faktor zur Berechnung von Wärmeaustauschern nach Abb. 1 und 2

Die Temperatur am Rohrbogen berechnet sich aus Gl. (15) mit $F = 0$.

Man kann auch die übertragene Wärmemenge Q und die Fläche F_{tot} in Funktion der bekannten Eintrittstemperaturen anschreiben. Sie lauten:

$$Q = \frac{Gc}{\eta} \Delta t_e \dots (19)$$

und

$$F_{tot} = \frac{2Gc}{k \sqrt{1 + \varepsilon^2}} arth \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2Gc \Delta t_e - (1 + \varepsilon)} \dots (20)$$

In Abb. 6 ist der Temperaturverlauf für ein Beispiel ($\varepsilon = 1$ und $kF_{tot}/Gc = 1,6$) graphisch dargestellt. Dabei entspricht der ausgezogene, bzw. gestrichelte Temperaturverlauf einer Führung der beiden Medien im Wärmeaustauschapparat nach Abb. 1 bzw. Abb. 2. Eintrittstemperatur des warmen Mediums ist $100^\circ C$ und des kalten $20^\circ C$. Wie man sieht, kann sich der Temperaturverlauf des inneren und äusseren Mediums überschneiden. Am Schnittpunkt tritt eine Umkehrung der Wärmeaustauschrichtung zwischen beiden Medien ein. Wie aber aus Gl. (17) und (18) für die Endtemperaturen folgt, wird trotzdem bei steigender Fläche F_{tot} die Austrittstemperatur des inneren Mediums weiter sinken und für $F_{tot} = \infty$ einem Grenzwert zustreben.

II. Kombination der beiden in Abschnitt I beschriebenen Wärmeaustauscher

Abb. 7 zeigt eine Spezialausführung von Wärmeaustauschern, wie sie öfters in der Praxis verwendet werden. Zwei U-Rohre sind in Reihe geschaltet, und das äussere Medium strömt nacheinander längs dem einen und dann längs dem andern U-Rohr. Wir wollen annehmen, dass die mittlere Trennwand nicht wärmedurchlässig ist, was in vielen Fällen keinen merklichen Fehler durchgeleitet, sodass es sich nicht wesentlich erwärmt und daher auch der Temperaturabfall durch die Trennwand klein bleibt. Wie man leicht erkennt, treten die beiden Fälle von Abb. 1 und 2 nacheinander auf, indem das äussere Medium dem ersten U-Rohr von der Seite der Rohrschenkel und dem zweiten U-Rohr von der Seite des Rohrbogens zuströmt.

Man kann für die beiden Teilkühler die Beziehungen (17) anschreiben, da sie für beide Fälle gültig sind. Man erhält so vier Gleichungen, aus denen man t_a , $t_{a'}$, t_m und $t_{m'}$ berechnen kann. Die gesuchten Austrittstemperaturen t_a und $t_{a'}$ lassen sich ebenfalls in Funktion der bekannten Eintrittstemperaturen der beiden Medien ausdrücken:

$$t_a = -\frac{1}{\varrho} \Delta t_e + t_e \dots (21)$$

$$t_{a'} = \frac{\varepsilon}{\varrho} \Delta t_e + t_{e'} \dots (22)$$

wobei sich der Wert ϱ zu

$$\varrho = \frac{\eta^2 - \varepsilon}{2\eta - (1 + \varepsilon)} \dots (23)$$

Zur Berechnung von Wärmeaustauschern. Von Dipl. Ing. F. BALDAUFF

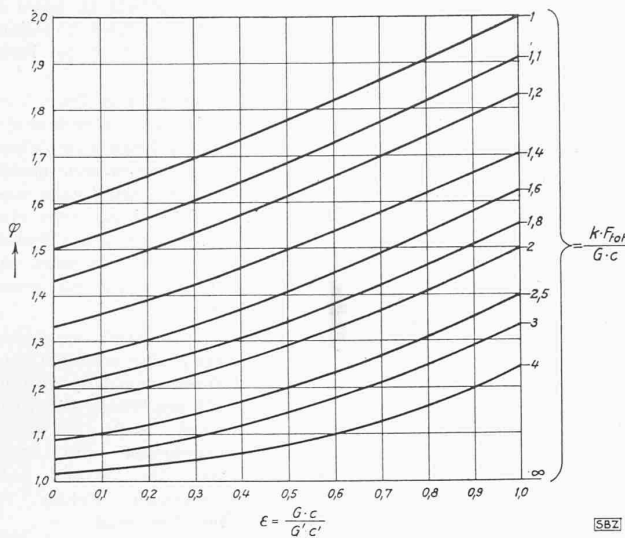


Abb. 8. Faktor zur Berechnung von Wärmeaustauschern nach Abb. 3

berechnet. Für η gilt auch hier die Gleichung (18), wobei zu beachten ist, dass zur Berechnung dieses Faktors nur die Fläche eines U-Rohres eingesetzt werden darf, also die Hälfte der totalen Fläche dieses Wärmeaustauschapparates. Eine Umkehrung der Durchflussrichtung für das äussere Medium ist für diese Anordnung nicht gestattet; die übertragene Wärmemenge würde kleiner werden.

III. Reiner Gegenstrom und reiner Gleichstrom

In Austauschern, in denen die Medien auf beiden Seiten der Wärmeaustauschflächen in entgegengesetzter oder gleicher Richtung strömen, ist das Verhältnis der Differenz zwischen Ein- und Austrittstemperatur eines Mediums zur Temperaturdifferenz zwischen Eintritt des warmen und Eintritt des kalten Mediums bekanntlich konstant. So kann man für Gegen- und Gleichstrom anschreiben:

$$\Delta t = \frac{1}{x} \Delta t_e \dots \dots \dots (24)$$

$$\Delta t' = \frac{\epsilon}{x} \Delta t_e \dots \dots \dots (25)$$

mit $x = \varphi$ für Gegenstrom:

$$\varphi = \frac{1 - \epsilon e^{-\frac{k F_{tot}}{Gc}(1-\epsilon)}}{1 - e^{-\frac{k F_{tot}}{Gc}(1-\epsilon)}} \dots \dots \dots (26)$$

Für den Grenzfall $\epsilon = 1$ wird

$$\varphi_{\epsilon=1} = 1 + \frac{Gc}{k F_{tot}} \dots \dots \dots (27)$$

Für reinen Gleichstrom sei $x = \psi$ bezeichnet:

$$\psi = \frac{1 + \epsilon e^{-\frac{k F_{tot}}{Gc}(1+\epsilon)}}{1 - e^{-\frac{k F_{tot}}{Gc}(1+\epsilon)}} \dots \dots \dots (28)$$

IV. Zusammenstellung

Für sämtliche Wärmeaustauschapparate, wie sie in den Abbildungen 1 bis 4 und 7 dargestellt sind, kann man die Austrittstemperaturen rasch mit Hilfe folgender Beziehungen berechnen:

$$\Delta t = \frac{1}{x} \Delta t_e \dots \dots \dots (a)$$

$$\Delta t' = \frac{\epsilon}{x} \Delta t_e \dots \dots \dots (b)$$

x erhält die Werte η , φ , ψ , Q , je nachdem man Wärmeaustausch-Apparate mit einem U-Rohr nach Abb. 1 und 2, oder solche mit reinem Gegenstrom Abb. 3, oder mit reinem Gleichstrom Abb. 4, oder aber die Kombination nach Abb. 7 berechnen will. η , φ , ψ und Q lassen sich rasch aus den Kurventafeln Abb. 5 und 8 bis 10 in Funktion von ϵ und $k F_{tot}/Gc$ ablesen.

Die übertragene Wärmemenge ist

$$Q = \frac{Gc}{x} \Delta t_e \dots \dots \dots (c)$$

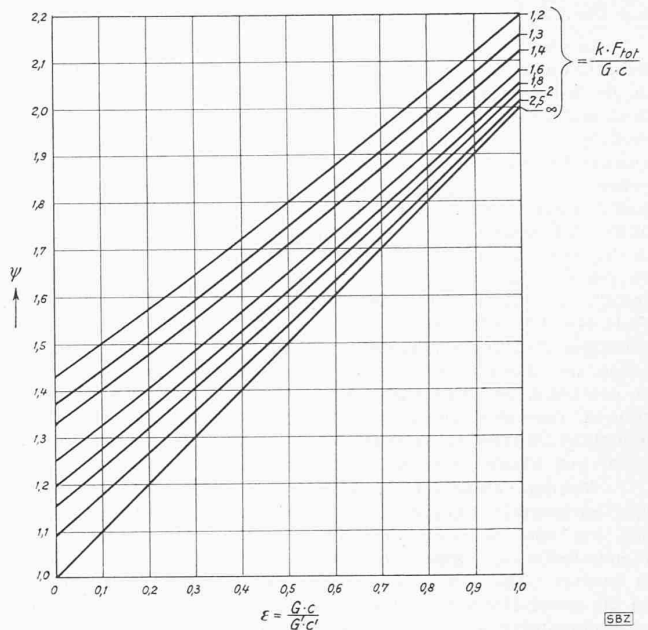


Abb. 9. Faktor zur Berechnung von Wärmeaustauschern nach Abb. 4

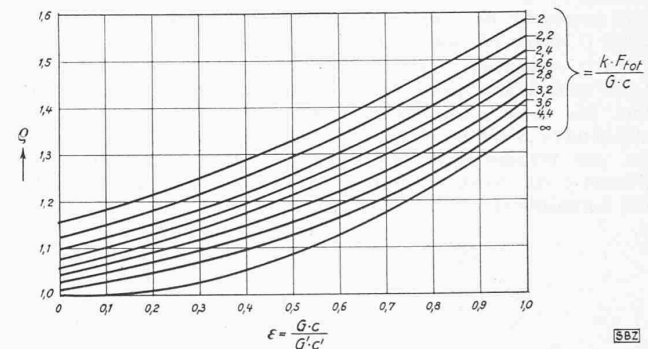


Abb. 10. Faktor zur Berechnung von Wärmeaustauschern nach Abb. 7

Wird ϵ grösser als eins, so nimmt man seinen reziproken Wert zur Bestimmung von x in den genannten Kurventafeln; man muss nur darauf achten, dass in dem Parameter $k F_{tot}/Gc$ im Nenner das kleinere der beiden Produkte Gc und $G'c'$ einzusetzen ist. Man kann dies durch Einsetzen in Gl. (c) beweisen. Hieraus folgt weiter, dass man durch das U-Rohr, im Gegensatz zu Abb. 6, auch das kalte Medium führen kann; die Gl. (a) und (b) bleiben gleich, doch muss man darauf achten, dass die kleinere Temperaturdifferenz zwischen Austritt und Eintritt sich auf jenes Medium bezieht, für welches das Produkt Gc das grössere ist.

Kühlfläche F m ²		10		15		20	
Wassermenge kg/h		1000	2000	1000	2000	1000	2000
Reiner Gegenstrom	t_{la}	30,3	25,9	21,1	17,3	16,5	13,41
	t_{wa}	44,9	28,5	49,5	30,6	51,75	31,6
Reiner Gleichstrom	t_{la}	43,0	34,0	40,8	29,7	40,2	28,5
	t_{wa}	38,5	26,5	39,6	27,6	39,9	27,9
U-Rohr Abb. 1 u. 2	t_{la}	37,64	30,4	33,5	24,4	32,0	22,2
	t_{wa}	41,13	27,4	43,25	28,9	44,0	29,45
Kühler nach Abb. 7	t_{la}	32,2	27,0	24,77	19,0	21,2	15,45
	t_{wa}	43,9	28,25	47,61	30,2	49,4	31,2

Die Tabelle zeigt eine Berechnung von wassergekühlten Luftkühlern für drei verschiedene Kühlflächen und zwei verschiedene Wassermengen. Das durchströmende Luftgewicht ist 2080 kg/h, sodass, mit $c = 0,24$, $G'c' = 500$ wird. Die Wassermenge wurde einmal zu 1000 und einmal zu 2000 kg/h angenommen. $t_{le} = 100^\circ C$, $t_{we} = 10^\circ C$, $k = 100 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^\circ C$.