

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 117/118 (1941)
Heft: 1

Artikel: Zur allgemeinen Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke
Autor: Stüssi, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83359>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Zur allgemeinen Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke. — Die Taubstummenanstalt Riehen bei Basel. — Erfahrungen beim Trassieren der Reichsautobahnen. — Wärme unmittelbar aus mechanischer Arbeit. — Spannungs- und Dehnungsmesser mit laufendem Werkstoff. — Mitteilungen: Wasserwirtschaftliche Pläne in Abes-

sinien. Unipolarmaschine BBC. Rationelles Waschen von Baumwolle und Leinen. Anruf-Umleiter. Gasbehälterheizung mit Grundwasser. Säurefeste Kohlenstoffsteine für Behälter-Auskleidungen. Eine Ehrung. Ein Kirchgemeindehaus in Wangen bei Olten. Eidg. Techn. Hochschule. — Nekrologe: Werner Luder. — Literatur. — Vortrags-Kalender.

Zur allgemeinen Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E. T. H., Zürich

1. Grundgleichungen

Auf den Versteifungsträger einer Hängebrücke (Abb. 1) wirken ausser den äusseren Belastungen q_0 (Eigengewicht g , Verkehrslast p) die Hängestangenkräfte, die wir bei dicht ausgeteilten Hängestangen und bei Berücksichtigung nur der lotrechten Kabelverschiebungen (übliche Formänderungstheorie) mit $H(y'' + \eta_K'')$ einführen können. Die Gesamtbelastung des Versteifungsträgers im an den Hängestangen aufgehängten Trägereil beträgt somit

$$q = q_0 + H(y'' + \eta_K'') \quad (1)$$

Der Horizontalzug H des Kabels ist mit einer Elastizitätsbedingung, die die Unverschieblichkeit der Kabelendpunkte ausdrückt, zu bestimmen. Bei frei verschieblichen Zwischenstützpunkten (Pendelstützen), d. h. bei über die Brückenlänge gleichbleibendem Horizontalzug H , lautet diese Bedingung

$$H \frac{L}{E_K F_K} + \alpha_t t L_t + \int_c^F y'' \eta_K dx = 0 \quad (2)$$

Die Kabeldurchbiegungen η_K unterscheiden sich von den Durchbiegungen η_V des Versteifungsträgers um die Hängestangenverlängerungen Δh :

$$\eta_K = \eta_V - \Delta h \quad (3)$$

Gewöhnlich wird Δh vernachlässigt; aus Gl. 1 ergibt sich dann mit $\eta_K = \eta_V = \eta$ die das Hängebrückenproblem beherrschende Grundgleichung

$$q_0 + H y'' + H \eta'' = (E J \eta'')'' \quad (4)$$

Es bietet jedoch keine Schwierigkeiten, in einem zweiten Rechnungsgang das Glied $H(\Delta h)''$ als zusätzliches Belastungsglied zu berücksichtigen.

Im Glied $H \eta''$ der Gl. 4, das den Einfluss der Formänderungen ausdrückt, sind sowohl H wie η'' von der Belastung q_0 abhängig; das Problem ist nicht mehr linear, das Superpositionsgesetz nicht mehr gültig. Ersetzen wir jedoch in diesem Glied $H \eta''$ den mit der Belastung veränderlichen Kabelzug H durch einen gedachten Festwert N , der grundsätzlich gleich gross sein soll wie H , so erscheint die Grundgleichung linearisiert und das Superpositionsgesetz ist wieder gültig¹⁾. Wir dürfen somit die Belastung q_0 in Teilbelastungen zerlegt denken, die einfach zu behandeln sind, und diese Teilergebnisse superponieren, wobei nur zu beachten ist, dass der eingeführte Festwert N auch bei der Untersuchung der Teilbelastungen dem Kabelzug H_{tot} , des gesamten Belastungszustandes entsprechen soll. Noch wichtiger ist jedoch, dass wir nun, dank der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, auch die Durchbiegungen η in Teildurchbiegungen zerlegen dürfen:

$$\eta = \eta_0 + \left. \begin{aligned} H \eta_H = 1 \\ \eta'' = \eta_0'' + H \eta_H'' = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Gl. 4 zerfällt damit in zwei voneinander unabhängig lösbare Teilgleichungen

$$\left. \begin{aligned} q_0 + N \eta_0'' &= (E J \eta_0'')'' \\ \text{und, nach Kürzung durch } H, \\ 1 y'' + N \eta_H'' &= 1 = (E J \eta_H'')'' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

von denen sich die erste auf die gegebene äussere Belastung q_0 , die zweite auf den Belastungszustand $H = 1$ bezieht.

Wir können die beiden Lastanteile q_0 und $N \eta_0''$ zusammenfassen:

$$\bar{q}_0 = q_0 + N \eta_0'';$$

die zugehörigen Momente und Querkräfte im Grundsystem einschliesslich Formänderungseinfluss sollen mit $\bar{M}_0$ und $\bar{Q}_0$ bezeichnet werden. Die Momente und Querkräfte im wirklichen, einfach statisch unbestimmten Tragwerk ergeben sich, nach Lösung der Elastizitätsbedingung, aus der Superposition

$$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M}_0 + H \bar{M}_H = 1 \\ Q &= \bar{Q}_0 + H \bar{Q}_H = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Elastizitätsbedingung Gl. 2 kann nun so geschrieben werden, dass sie eine direkte Bestimmung des überzähligen Horizontalschubes H erlaubt:

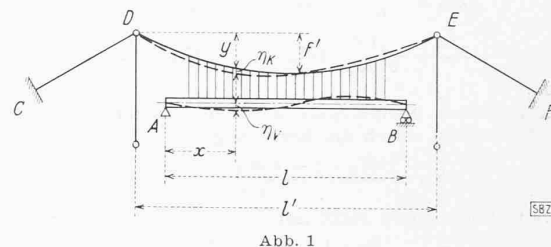


Abb. 1

$$\begin{aligned} H \left(\frac{L}{E_K F_K} + \int_c^F y'' \eta_H = 1 dx \right) + \int_c^F y'' \eta_0 dx + \alpha_t t L_t &= 0 \\ \int_c^F y'' \eta_0 dx + \alpha_t t L_t &= - \frac{L}{E_K F_K} + \int_c^F y'' \eta_H = 1 dx \\ H &= - \frac{\int_c^F y'' \eta_0 dx + \alpha_t t L_t}{\frac{L}{E_K F_K} + \int_c^F y'' \eta_H = 1 dx} = - \frac{a_{10} + a_{1t}}{a_{11}} \quad (8) \end{aligned}$$

Bei gleichen Spannweiten von Versteifungsträger und Kabel kann aus Gl. 4 durch zweimalige Integration eine Grundgleichung von der Form

$$M_0 - H y - N \eta = - E J \eta''$$

gewonnen werden; auf diese Gleichung zweiter Ordnung bezieht sich die bis heute fast ausschliesslich verwendete «normale» Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke, wobei das ausgeführte Tragwerk mit dem der Berechnung zu Grunde gelegten meist nur annäherungsweise übereinstimmt, wie z. B. bei Tragwerken nach Abb. 1.

Im Folgenden wird für die Gleichung 6 ein baustatisches Auflösungsverfahren angegeben, das für konstante und veränderliche Steifigkeit EJ des Versteifungsträgers anwendbar ist. Während eine Integration der Grundgleichung in mathematischer Form über die Unstetigkeitsstellen bei den äussersten Hängestangen hinaus nicht möglich ist, sodass dort unerwünschte, weil den Rechnungsgang komplizierende Hilfsgrössen eingeführt werden müssen²⁾, fällt diese Schwierigkeit bei dem vorzuschlagenden Lösungsverfahren dahin. Dieses Verfahren stellt die baupraktische Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten dar. Allerdings soll zunächst, mit Rücksicht auf einfachste Darstellung, der Fall konstanter Trägersteifigkeit, $EJ = EJ_c = \text{konst.}$, für sich allein behandelt werden.

Für die praktische Bemessung ist die Verwendung von Einflusslinien zweckmässig. In unserm Grundsystem, d. h. dem der linearisierten Differentialgleichung Gl. 6 gehörenden Versteifungsträger, ergibt sich die Einflusslinie für das Biegemoment M_{om} als Biegelinie η_0 für eine an der Stelle m eingeführte Winkeländerung $\Delta \varphi = R = 1$; die Einflusslinie im wirklichen Tragwerk ergibt sich durch Superposition.

Bei der Berechnung der Durchbiegungen η ist in die Gl. 6 ein geschätzter Festwert N einzuführen, der im allgemeinen mit dem für den zu untersuchenden Belastungsfall gültigen Kabelzug H nicht übereinstimmen wird. Die Einflusslinien werden deshalb am einfachsten für zwei verschiedene Werte von N , $N_1 \cong H_{\min}$ und $N_2 \cong H_{\max}$, berechnet, worauf die gesuchten Schnittgrössen für $N = H$ durch Interpolation bestimmt werden können. Wie nachstehend gezeigt werden soll, bestehen zwischen den Einflusslinien für $\bar{M}_0$ und $\bar{Q}_0$ benachbarter Schnitte des Grundsystems einfache Beziehungen, die die Aufstellung von Rekursionsformeln erlauben. Damit müssen nur einige wenige Einflusslinien durch Lösung der Grundgleichung Gl. 6 direkt bestimmt werden, worauf alle übrigen leicht aus diesen berechnet werden können.

¹⁾ F. Stüssi: Zur Berechnung verankerter Hängebrücken. «Abhandlungen» I. V. B. H. Bd. 4, 1936.

²⁾ K. Klöppel und K. Lie: Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers, «Stahlbau» 1940, S. 109 ff. Siehe auch A. Hertwig: Beitrag zum Hängebrückenproblem, «Stahlbau» 1940, S. 105 ff.

2. Die baupraktische Lösung der Differentialgleichung Gl. 6 für $EJ = \text{konst.}$

Wenn wir bei der Lösung irgendeiner baustatischen Aufgabe zu einer Belastung q_0 die Durchbiegungen η_0 benötigen, so zeichnen oder rechnen wir zwei Seilpolygone: ein erstes, das uns aus den Belastungen q_0 die Biegemomente M_0 und ein zweites, das uns aus den reduzierten Momenten M_0/EJ_c die Durchbiegungen η_0 liefert. Dabei fassen wir die Belastungen gewöhnlich mit der Trapezformel zu Knotenlasten zusammen, die für gleiche Trägereile Δx die Werte

$$K_m = \frac{\Delta x}{6} (q_{m-1} + 4q_m + q_{m+1}) \quad (9a)$$

$$R_m = \frac{\Delta x}{6EJ_c} (M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1}) \quad (9b)$$

besitzen.

Beim ersten Seilpolygon wird die Differentialgleichung $q = -M''$ ersetzt durch die Beziehung

$$K_m = \frac{M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}}{\Delta x}; \quad (10a)$$

das zweite Seilpolygon stellt mit

$$R_m = \frac{\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}}{\Delta x} \quad (10b)$$

die Differentialgleichung $M/EJ_c = -\eta''$ dar.

Bei unserer Aufgabe, der Lösung der Gl. 6, besteht nun einzig die Besonderheit, dass die Belastung $\bar{q}_0$ durch die Durchbiegungen η_0 beeinflusst ist. Dies hat zur Folge, dass wir die beiden Gleichungssysteme 10a und 10b nicht mehr je für sich allein auflösen können, sondern durch Elimination von M zu einem einzigen Gleichungssystem zusammenfassen müssen. Dies ist jedoch nach meiner Meinung kein Grund dafür auf die Anwendung der baustatischen Zusammenhänge der Gleichungen 9 und 10, die durch Carl Culmann und Otto Mohr in graphischer Form in die Baustatik eingeführt wurden, und denen wir einige der wesentlichsten Fortschritte der Baustatik seit den Arbeiten von Louis Navier verdanken, hier zu verzichten.

Bei der Aufstellung eines einzigen Gleichungssystems zwischen den Werten K und η unter Elimination von M handelt es sich aus praktischen Gründen darum, Gleichungen mit möglichst wenig Gliedern zu erhalten. Der Ersatz der linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Beziehungen der Gleichungen 9 und 10 führt auf ein dreigliedriges Gleichungssystem³⁾, der Ersatz der Gleichung vierter Ordnung auf ein fünfgliedriges.

Die gesuchte Elimination von M gelingt, wenn wir die Gleichung 10b für die Teilpunkte $m-1$ und $m+1$ einmal, für den Teilpunkt m doppelt und mit negativem Vorzeichen anschreiben, wobei wir die Abkürzung $U = 6EJ_c/\Delta x^2$ einführen:

[Gleichung (10c) am Fuss dieser Seite]

Damit können nun die M -Werte zu Gruppen zusammengefasst und nach Gl. 10a durch die Knotenlasten K ersetzt und dadurch eliminiert werden. Die Addition dieser drei Gleichungen liefert damit den gesuchten Zusammenhang zwischen K und η in der Form der Gleichung (11) [am Fuss dieser Seite]

³⁾ Siehe z. B. F. Stüssi: Baustatische Methoden, «Schweiz. Bauzeitung» Bd. 107, S. 277 (1935) und: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers, «Abhandlungen» I.V. B. H. Bd. 3, 1935 usw. — Die Brauchbarkeit eines solchen Integrationsverfahrens ist auch von dritter Seite festgestellt worden: vgl. E. Chwalla: Die Kippstabilität gerader Träger mit doppelt-symmetrischem I-Querschnitt, «Forschungshefte Stahlbau» 1939.

Die Knotenlasten haben wir hier mit $\bar{K}$ bezeichnet, weil sie noch den Belastungsanteil $N\eta''$ enthalten. Dieser Anteil kann nun sehr leicht zu Knotenlasten zusammengefasst werden; es ist nämlich für einen normalen Zwischenpunkt

$$K_{m,N} = \frac{\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}}{\Delta x} N$$

oder

$$\Delta x K_{m,N} = (\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) N \quad (12)$$

Das Belastungsglied der Gleichung 11 beträgt somit [Gleichung (13) am Fuss dieser Seite]

Führen wir diese Gleichung 13 in Gleichung 11 ein, so gelangen wir zum gesuchten fünfgliedrigen Gleichungssystem. [Gleichung (14) am Fuss dieser Seite]

Das durch die Winkeländerungen R ausgedrückte Belastungsglied werden wir bei der Berechnung von Einflusslinien für Momente benötigen.

Bei den äussersten Hängestangen tritt für die Berechnung der Knotenlast K_N eine Besonderheit auf (Abb. 2). Es ist hier:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x K_{n-1,N} &= 0 \\ \Delta x K_{n,N} &= \left[-\left(1 + \frac{a}{\Delta x}\right) \eta_n + \eta_{n+1} \right] N \\ \Delta x K_{n+1,N} &= (\eta_n - 2\eta_{n+1} + \eta_{n+2}) N \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

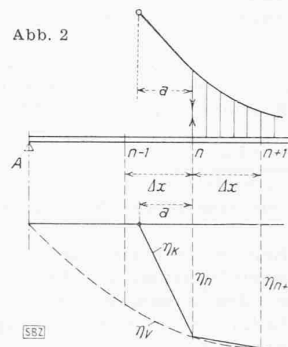
und an Stelle einer Gleichung 14 ist beispielsweise für den Punkt η im Gleichungssystem folgende Gleichung 16 einzuführen: [Gleichung (16) am Fuss dieser Seite]

In der Knotenlast $K_{n,N}$ ist ausser der Knotenlast infolge der verteilten Belastung $N\eta''$ des Feldes $n \div n+1$ auch die Ablenkungskraft infolge der plötzlichen Richtungsänderung des Kabels bei n enthalten. Die Berücksichtigung dieser konzentrierten Einzellast, die eine einfache Lösung bei mathematischer Integration der Differentialgleichung Gl. 6 verunmöglicht, bietet also hier nicht die geringsten Schwierigkeiten. Wir haben noch zur Vervollständigung unseres Gleichungssystems die Randbedingungen zu formulieren. Wegen $\eta_A = 0$, $\eta_B = 0$ fallen für die Endpunkte A und B die Gleichungen aus.

Ferner ist wegen der freien Drehbarkeit der Balkenenden $\eta_A'' = 0$, $\eta_B'' = 0$. In unser Gleichungssystem übertragen bedeutet dies, dass nicht nur die Knotenlasten K_A und K_B , sondern auch R_A und R_B von den Auflagern übernommen werden und unser Gleichungssystem somit nicht belasten. Damit können wir die Gleichung für den Knotenpunkt 1 wie folgt zusammensetzen:

$$\left. \begin{aligned} 4U\eta_1 - 2U\eta_2 &= -8M_1 - 2M_2 \\ U\eta_1 - 2U\eta_2 + U\eta_3 &= M_1 + 4M_2 + M_3 \end{aligned} \right\} = \Delta x (4\bar{K}_1 + \bar{K}_2) = U\Delta x (-2\bar{R}_1 + R_2)$$

Führen wir, beispielsweise für den Fall von bis zum Trägerende angeordneten Hängestangen, nun noch die Trennung der Knotenlasten $\bar{K}$ in K_0 und K_N entsprechend Gleichung 13 ein,



$$\left. \begin{aligned} U\eta_{m-2} - 2U\eta_{m-1} + U\eta_m &= M_{m-2} + 4M_{m-1} + M_m \\ -2U\eta_{m-1} + 4U\eta_m - 2U\eta_{m+1} &= -2M_{m-1} - 8M_m - 2M_{m+1} \\ U\eta_m - 2U\eta_{m+1} + U\eta_{m+2} &= M_m + 4M_{m+1} + M_{m+2} \end{aligned} \right\} \quad (10c)$$

$$U\eta_{m-2} - 4U\eta_{m-1} + 6U\eta_m - 4U\eta_{m+1} + U\eta_{m+2} = \Delta x (\bar{K}_{m-1} + 4\bar{K}_m + \bar{K}_{m+1}) = U\Delta x (\bar{R}_{m-1} - 2\bar{R}_m + \bar{R}_{m+1}) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x (\bar{K}_{m-1} + 4\bar{K}_m + \bar{K}_{m+1}) &= \Delta x (K_{0,m-1} + 4K_{0,m} + K_{0,m+1}) + N(\eta_{m-2} - 2\eta_{m-1} + \eta_m) \\ &\quad + N(4\eta_{m-1} - 8\eta_m + 4\eta_{m+1}) \\ &\quad + N(\eta_m - 2\eta_{m+1} + \eta_{m+2}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (U - N)\eta_{m-2} - (4U + 2N)\eta_{m-1} + (6U + 6N)\eta_m - (4U + 2N)\eta_{m+1} + (U - N)\eta_{m+2} &= \\ = \Delta x (K_{0,m-1} + 4K_{0,m} + K_{0,m+1}) = U\Delta x (R_{0,m-1} - 2R_{0,m} + R_{0,m+1}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$U\eta_{n-2} - 4U\eta_{n-1} + \left[6U + \left(3 + 4 \frac{\Delta x}{a} \right) N \right] \eta_n - (4U + 2N)\eta_{n+1} + (U - N)\eta_{n+2} = \Delta x (K_{0,n-1} + 4K_{0,n} + K_{0,n+1}) \quad (16)$$

so ergibt sich die erste Gleichung unseres Gleichungssystems in der Form

$$(5U + 7N)\eta_1 - (4U + 2N)\eta_2 + (U - N)\eta_3 = \mathcal{J}x(4K_{01} + K_{02}) = U\mathcal{J}x(-2R_{01} + R_{02}) \quad (14a)$$

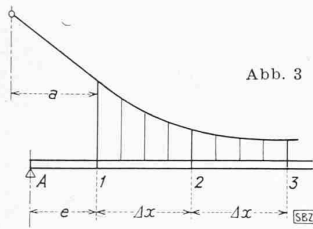


Abb. 3

Die Aufstellung eines Gleichungssystems Gl. 14 für beliebig veränderliche Feldweiten $\mathcal{J}x$ ist, wie wir im 4. Abschnitt noch zeigen werden, im allgemeinen nicht möglich. Dies bedeutet jedoch keine wesentliche Einschränkung des Anwendungsbereichs, wenn es wenigstens gelingt, ein abnormales Endfeld $e \leq \mathcal{J}x$

einzuführen, um die Feldteilung, wie beispielsweise in dem in Abb. 1 skizzierten Fall, der Form des Tragwerks anpassen zu können. Für diesen Fall soll die Endgleichung noch angegeben werden (Abb. 3).

Die Grundgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} U\left[\eta_1\left(1 + \frac{\mathcal{J}x}{e}\right) + \eta_2\right] &= 2M_1\left(\frac{e}{\mathcal{J}x} + 1\right) + M_2 \\ U(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) &= M_1 + 4M_2 + M_3 \\ \mathcal{J}x\bar{K}_1 &= -\left(1 + \frac{\mathcal{J}x}{e}\right)M_1 + M_2 \\ \mathcal{J}x\bar{K}_2 &= M_1 - 2M_2 + M_3 \end{aligned}$$

Durch Elimination der M ergibt sich daraus die Gleichung

$$U\left(7\frac{\mathcal{J}x}{e} + 6\frac{\mathcal{J}x^2}{e^2} + 2\right)\eta_1 - U\left(8\frac{\mathcal{J}x}{e} + 4\right)\eta_2 + U\left(\frac{\mathcal{J}x}{e} + 2\right)\eta_3 = \mathcal{J}x\left[12\bar{K}_1 + \left(\frac{\mathcal{J}x}{e} + 2\right)\bar{K}_2\right]$$

Führen wir noch die Knotenlasten K_N nach Gleichung 15 ein, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung für den Fall der Abb. 3 die vollständige Endgleichung (14b): [am Fuss dieser Seite]

Für $e = a = \mathcal{J}x$ stimmt Gleichung 14b mit Gleichung 14a überein.

Wir haben in Gleichung 9b den Drehwinkel R durch die sogenannte Trapezformel ausgedrückt. Für eine stetig gekrümmte Momentenfläche könnten wir durch Verwendung der Parabelformel

$$R_m = \frac{\mathcal{J}x}{12EJ_c}(M_{m-1} + 10M_m + M_{m+1})$$

eine etwas grössere Genauigkeit erreichen, müssten dann aber auf die Berücksichtigung von Einzellasten, wie sie hier vorkommen, verzichten. Für die mit den äussersten Hängestangen zusammenfallenden Knotenpunkte n müsste wegen der Einzellast $K_{n,N}$ der Drehwinkel R_n etwa in der Form

$$R_n = \frac{\mathcal{J}x}{24EJ_c}(-M_n - 2 + 6M_{n-1} + 14M_n + 6M_{n+1} - M_{n+2})$$

eingeführt werden. Das Gleichungssystem würde dadurch umständlicher als bei Verwendung der Trapezformel, sodass der Vorteil der etwas grösseren Genauigkeit durch die praktischen Nachteile mehr als aufgewogen wird. Im übrigen beruhen ja die bisher verwendeten Verfahren zur Ermittlung von Biegunslinien (Stabzugverfahren, Verfahren der elastischen Gewichte) auch auf der Trapezformel, ohne dass sich daraus bei nicht allzu grossen Feldweiten wesentliche Nachteile für die Bemessungspraxis ergeben würden.

Mit der Trapezformel führen wir polygonale Momentenflächen im Versteifungsträger ein. Diesen entspricht im Zusammenhang unserer Gleichungen eine polygonale Form des Kabels, dessen Durchbiegungen nur in den Knotenpunkten mit denen des Versteifungsträgers übereinstimmen. Dieser Umstand ist bei der Berechnung des Integrals $\int y''\eta_K dx$ bzw. $\int \eta_K dx$ für $y'' = \text{konst.}$, wie es bei der Auswertung der Elastizitätsbedingung benötigt wird, zu beachten.

Nach der Auflösung des Gleichungssystems Gl. 14 können die Knotenlasten $\bar{K} = K_0 + K_N$ und damit die Momente $\bar{M}_0$ und die Querkräfte $\bar{Q}_0$ des Grundsystems nach den bekannten Verfahren der Baustatik bestimmt werden. Die Durchbiegungen η erlauben

nun auch die Auflösung der Elastizitätsbedingung Gl. 8, worauf die endgültigen Schnittgrössen und Durchbiegungen sich aus den in den Gleichungen 5 und 7 angegebenen Superpositionen ergeben.

3. Einflusslinien und Rekursionsformeln

Da wir durch die Einführung des gedachten Festwertes N unsere Grundgleichung linearisiert haben, gilt das Maxwell'sche Reziprozitätsgesetz. Die Durchbiegungen $\eta_H = 1$, die wir direkt durch Auflösung des Gleichungssystems Gl. 14 für die Belastungen $q_0 H = 1 = y''$ erhalten, stellen somit schon die Belastungsglieder a_{0i} der Elastizitätsbedingung Gl. 8 für den Fall einer wandernden Einzellast $P = 1$ dar; die Einflusslinie für den Kabelzug H ergibt sich somit zu

$$e_H = -\frac{\eta_H = 1}{a_{11}} \quad \dots \quad (17)$$

Die Ordinaten von Einflusslinien sollen einheitlich mit e bezeichnet werden. Es ist also $H = \Sigma P e_H$, $M = \Sigma P e_M$ usw. Dank der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes können wir auch die Einflusslinien für die Durchbiegungen sehr einfach bestimmen: die Einflusslinie e_{η_m} ist ja nichts anderes als die Biegunslinie infolge $P_m = 1$, die damit durch Gleichung 5 bestimmt ist zu

$$e_{\eta_m} = \eta_{P_m = 1} = \eta_0 P_m = 1 + H_{P_m} = 1 + \eta_H = 1 \quad \dots \quad (18)$$

Die Einflusslinie für das Biegemoment M_m ist die Biegunslinie infolge einer an der Stelle m eingeführten Winkeländerung $R_m = 1$. Für das Grundsystem, $H = 0$, erhalten wir diese Biegunslinie, indem wir $R_m = -1$ in die Belastungsglieder des Gleichungssystems (14) einführen, also in den Gleichungen für

$$\begin{aligned} \text{Knotenpunkt } m-1 & \text{ das Belastungsglied } -U\mathcal{J}x \\ \text{Knotenpunkt } m & \text{ das Belastungsglied } +2U\mathcal{J}x \\ \text{Knotenpunkt } m+1 & \text{ das Belastungsglied } -U\mathcal{J}x \end{aligned}$$

Die Einflusslinie im statisch unbestimmten Tragwerk ergibt sich darauf zu

$$e_{M_m} = \eta_0 R_m = 1 + M_{mH=1} e_H \quad \dots \quad (19)$$

Um die Einflusslinie für die Querkraft Q_m im Grundsystem zu erhalten, müssten wir die Balkenquerschnitte links und rechts von m gegenseitig um den Betrag $\mathcal{J}e = 1$ verschieben. Da unser Gleichungssystem im übrigen sich nur auf gerade Ableitungen von η bezieht, ist die Einführung einer solchen Verschiebung, die ja die erste Ableitung einer Winkeländerung darstellt, unbequem. Wir können sie aber ersetzen dadurch, dass wir im Knotenpunkt $m-1$ die Winkeländerung

$$R_{m-1} = \frac{1}{2\mathcal{J}x}$$

und in $m+1$

$$R_{m+1} = -\frac{1}{2\mathcal{J}x}$$

anbringen. Nun werden aber bei dieser Biegunslinie, die sich gegenüber der gewünschten, um die beiden in Abb. 4 schraffierten

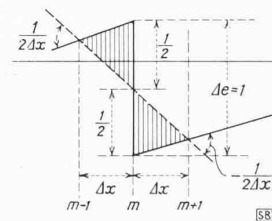


Abb. 4

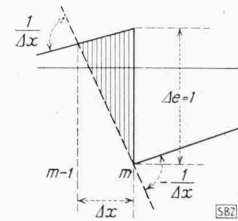


Abb. 5

Dreiecke unterscheidet, in unserm Gleichungssystem die Formänderungseinflüsse K_N infolge der beiden Ablenkungswinkel R_{m-1} und R_{m+1} mitberücksichtigt, obwohl sie in Wirklichkeit nicht vorhanden sind. Wir korrigieren diesen Fehler dadurch, dass wir diese Formänderungseinflüsse auch im Belastungsglied aufnehmen, d. h. dort die korrigierten Winkeländerungen

$$R_{m-1} = \frac{1}{2\mathcal{J}x}\left(1 - \frac{N}{U}\right), \quad R_{m+1} = -\frac{1}{2\mathcal{J}x}\left(1 - \frac{N}{U}\right) \quad (20)$$

einführen. Nun brauchen wir aber für diese Belastungsglieder das Gleichungssystem Gl. 14 gar nicht aufzulösen, wenn wir die

$$\begin{aligned} &U\left(7\frac{\mathcal{J}x}{e} + 6\frac{\mathcal{J}x^2}{e^2} + 2\right) + N\left(10 + 12\frac{\mathcal{J}x}{a} - \frac{\mathcal{J}x}{e}\right)\eta_1 - \left[U\left(8\frac{\mathcal{J}x}{e} + 4\right) + N\left(8 - 2\frac{\mathcal{J}x}{e}\right)\right]\eta_2 + \left[U\left(\frac{\mathcal{J}x}{e} + 2\right) - N\left(\frac{\mathcal{J}x}{e} + 2\right)\right]\eta_3 = \\ &= \mathcal{J}x\left[12K_{01} + \left(\frac{\mathcal{J}x}{e} + 2\right)K_{02}\right] \quad \dots \quad (14b) \end{aligned}$$



Abb. 3. Taubstummenanstalt Riehen bei Basel. Gesamtbild aus Süden

Einflusslinien $e_{0M_m-1} = \eta_0 R_{m-1} = 1$ und e_{0M_m+1} schon berechnet haben, sondern wir können direkt aus diesen beiden Linien die Einflusslinie e_{0Q_m} berechnen:

$$e_{0Q_m} = \frac{U - N}{2 \Delta x U} (e_{0M_m+1} - e_{0M_m-1}) \quad (21)$$

Im Punkt m der so berechneten Einflusslinie haben wir entsprechend Abb. 4 noch die zusätzlichen Ordinaten $\pm \frac{1}{2}$ beizufügen. Die Einflusslinie e_{0Q_m} im statisch unbestimmten Tragwerk ergibt sich nun aus der Superposition

$$e_{0Q_m} = e_{0Q_m} + Q_{mH-1} e_H \quad (22)$$

Wir hätten die Querverschiebung $\Delta e = 1$ statt nach Abb. 4 nun auch nach Abb. 5 durch zwei Winkeländerungen ersetzen können. Unter Berücksichtigung der Formänderungen müssten wir dann die korrigierten Winkeländerungen

$$R_{m-1} = \frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{N}{U} \right)$$

und

$$R_m = -\frac{1}{\Delta x} \left(1 + \frac{2N}{U} \right)$$

in die Belastungsglieder unseres Gleichungssystems einführen, oder aber wir können e_{0Q_m} direkt aus den Einflusslinien e_{0M_m-1} und e_{0M_m} berechnen:

$$e_{0Q_m} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{U + 2N}{U} e_{0M_m} - \frac{U - N}{U} e_{0M_m-1} \right) \quad (23)$$

Vergleichen wir nun die Gleichungen 21 und 23, so stellen wir fest, dass wir durch die Gleichsetzung

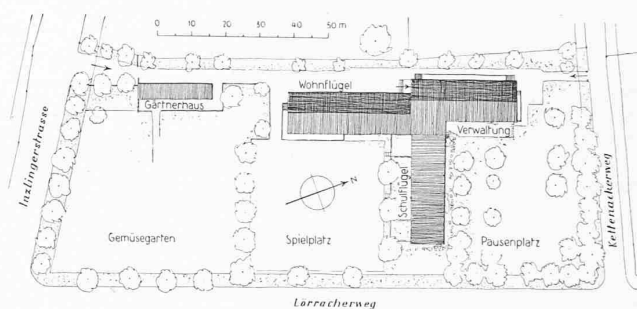


Abb. 2. Lageplan

1:2000

$$e_{0M_m+1} \frac{U - N}{2U} - e_{0M_m-1} \frac{U - N}{2U} = e_{0M_m} \frac{U + 2N}{U} - e_{0M_m-1} \frac{U - N}{U}$$

die Rekursionsformel

$$e_{0M_m+1} = e_{0M_m} 2 \frac{U + 2N}{U - N} - e_{0M_m-1} \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{2U}{U - N} \right) \quad (24)$$

gewinnen können. Im Punkt m (und nur in diesem) ist entsprechend dem Unterschied zwischen den Abbildungen 4 und 5 das eingeklammerte Korrekturglied infolge der halben Querverschiebung zu berücksichtigen.

Die Rekursionsformel Gleichung 24 erlaubt uns nun eine erhebliche Abkürzung der Berechnung: Wenn wir für zwei benachbarte Schnitte die Einflusslinien e_{0M} durch Auflösung des Gleichungssystems Gl. 14 gewonnen haben, so können wir daraus mit Gleichung 24 die übrigen Einflusslinien e_{0M} und mit Gleichung 21 die Einflusslinien e_{0Q} berechnen, allerdings mit einer Einschränkung. Wir haben nämlich die Rekursionsformel für an den Hängestangen aufgehängte Felder abgeleitet und sie gilt folglich auch nur für solche. Die Rekursionsformel kann also bis zum Knotenpunkt n einer äussersten Hängestange, nicht aber über diesen hinaus verwendet werden. Ist also der Versteifungsträger einer Hängebrücke nicht durchgehend, sondern mit Unterbrechungen aufgehängt, so ist für jeden stetig aufgehängten Trägereil die direkte Bestimmung von zwei Einflusslinien notwendig. Dabei steht für die Enden auch die Einflusslinie $e_{0M_A} = 0$ zur Verfügung. Für die Bestimmung der Einflusslinien e_{0Q} in nicht aufgehängten Trägereilen gelten die Gleichungen 21 und 23, wenn hier $N = 0$ gesetzt wird.

(Schluss folgt)



Abb. 5. Schulflügel vom Knaben-Wohnraum aus gesehen