Band 121 Nr. 20

Allgemeine Dimensionierung und Spannungsberechnung vorgespannter Eisenbetonträger

Von Ing. Dr. PIERRE LARDY, Zürich

In einem Aufsatz: «Eigenspannungen und vorgespannter Beton»[1]) hat der Verfasser eine allgemeine, vereinfachte Theorie der Eigenspannungen mit Hilfe fiktiver Kräfte und als wichtigste Anwendung davon die Berechnung der vorgespannten Eisenbetonbalken unter voller Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität des Betons erläutert. Wir wollen die dort gewonnenen Spannungsgleichungen für den praktischen Gebrauch etwas umformen und an einem Beispiel zeigen, wie einfach und übersichtlich die Spannungsberechnung damit wird. Sodann wird als Hauptproblem dieser Arbeit das *Dimensionierungs-* oder *Bemessungsproblem* von vorgespannten Eisenbetonträgern behandelt. Dazu gehen wir von der allgemeinen Spannungsgleichung für Eigenspannungen [siehe Fussnote [1])] sowie den Gleichgewichtsbedingungen aus und gelangen zu bemerkenswert einfachen Dimensionierungsformeln, die auch in komplizierten, praktisch vorkommenden Fällen eine rasche und genaue Dimensionierung erlauben und sich daher für die Praxis gut eignen dürften. Das Dimensionierungsproblem ist u. W. bis heute noch nicht gelöst worden[2]); eine Lösung im Sinne der bisher üblichen Berechnungsweise würde an der verwickelten und kaum zu bewältigenden Rechenarbeit scheitern.

Nach der Behandlung des allgemeinen Dimensionierungs-Problems, das durch ein Beispiel illustriert wird, führen wir noch einige Spezialfälle an.

I. Die Spannungsberechnung

Bezeichnet in einem symmetrischen Querschnitt z die Ordinate, gemessen von der ideellen Schweraxe aus ($\int E z\, dF = 0$), $\varepsilon(z)$ das Schwindmass, $E(z)$ den Elastizitätsmodul (beide mit z variierend) und σ die Eigenspannung in der Faser z, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma\, dF = 0 \quad . \; . \; (1) \quad \text{und} \quad \int \sigma z\, dF = 0 \quad . \; . \; (2)$$

sowie aus der Navier-Bernoulli'schen Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte folgende Spannungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z\,\frac{M}{(EJ)}} \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{I})$$

Darin ist N eine fiktive Normalkraft: $N = \int \varepsilon E\, dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i$, M das Moment von N bezogen auf die ideelle Schweraxe: $M = \int \varepsilon E z\, dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i z_i$; die Nennergrössen bedeuten: $(EF) = \int E\, dF = \sum_i E_i F_i$, $(EJ) = \int E z^2 dF = \sum_i E_i J_i$. Sämtliche Integrale erstrecken sich über den ganzen Querschnitt (Stadium 1). $\frac{N}{(EF)} = \varepsilon_t$ ist die «spezifische» Axdehnung und $\frac{M\,ds}{(EJ)} = d\varphi$ die Winkeldrehung des Querschnittes. Mit Hilfe der Gl. (I) können beliebig komplizierte Verhältnisse einfach behandelt werden.

Für die Anwendung auf den vorgespannten Beton ist es zweckmässig, Gl. (I) etwas umzuformen. Das Schwindmass ε für die vorgespannten Eisen F_{ei} (es können mehrere Lagen mit verschiedenen Vorspannungen vorhanden sein) wird definiert als:

$$\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma^v_{ei}}{E_e} \quad (\sigma^v_{ei} < 0)$$

Unter Berücksichtigung des Schwindens im Beton ist $\varepsilon_b = \varepsilon_s$. Damit folgt für die fiktiven Kräfte:

$$N = \varepsilon_s E_b F_b - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei}$$

$$M = \varepsilon_s E_b F_b z_s - \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei}$$

(z_s = Abstand von $S_{id.}$ und S_b, $z_s = -kn \sum \mu_i z_{ei}$).

Darin berücksichtigt das erste Glied das Schwinden, das zweite die Vorspannungen. Die Plastizität des Betons kommt im Verhältnis $\frac{E_e}{E_b} = kn$ zur Geltung (k = Plastizitätsfaktor). Werden obige Ausdrücke in Gl. (I) eingesetzt, so ergeben sich daraus die Betonspannung σ_b in der Faser z_b und die Eisenspannung σ_{ei} in der Faser z_{ei}:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_b &= -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + z_b \frac{M}{J_{id.}} \\ \sigma_{ei} &= \sigma^v_{ei} + kn \frac{N}{F_{id.}} + kn z_{ei} \frac{M}{J_{id.}} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &. \; . \; (3) \\ &. \; . \; (4) \end{aligned} \quad \left.\right\} \text{Allgemeine Gleichungen des Spannungsproblems}$$

$$\text{mit:}\quad N = \varepsilon_s E_b F_b - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei}$$

$$M = \varepsilon_s E_b F_b z_s - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei} z_{ei}$$

$$F_{id.} = F_b + kn \sum_i F_{ei}$$

$$J_{id.} = J_b + kn \sum_i J_{ei}$$

z, $J_{id.}$ und M bzgl. der ideellen Schweraxe

$\sigma > 0$: Druck, $\sigma < 0$: Zug.

Mit diesen aus Gl. (I) entstandenen Gleichungen ist das Spannungsproblem des vorgespannten Betons gelöst. Zur Kontrolle der Berechnung muss Gl. (1) erfüllt sein:

$$\int \sigma_b\, dF_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = 0$$

Beispiel:

Gegeben sei ein Rechteckquerschnitt 12×20 cm, mit den Armierungen und Vorspannungen:

$F_{e1} = 5 \varnothing 6 = 1{,}414$ cm², $\mu_1 = 0{,}590\,\%$, $\sigma^v_{e1} = -14\,000$ kg/cm²

$F_{e2} = 3 \varnothing 6 = 0{,}850$ cm², $\mu_2 = 0{,}354\,\%$, $\sigma^v_{e2} = -14\,000$ kg/cm²

$F_{e3} = 3 \varnothing 4 = 0{,}377$ cm², $\mu_3 = 0{,}157\,\%$, $\sigma^v_{e3} = -6\,000$ kg/cm²

Ferner wird angenommen: $E_e = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm², $kn = 20$, also $E_b = 1{,}05 \cdot 10^5$ kg/cm². $\varepsilon_s = 0{,}0004$.

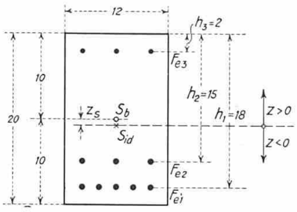

Abb. 1

Aus Abb. 1 und aus dem Flächenmoment für S_b folgt:

$$(E_b F_b + E_e \sum_i F_{ei})\, z_s = \;= E_e \sum_i F_{ei}(h_i - 10)$$

oder

$$z_s = kn \frac{\sum_i F_{ei}(h_i - 10)}{F_{id.}} = 0{,}858 \text{ cm}$$

und daraus nach Definition:

$F_{id.} = 292{,}8$ cm², $J_{id.} = 10\,500$ cm⁴

Die fiktiven Kräfte sind:

$$N = N_s + N_e = 10\,080 + 33\,960 = 44\,040 \text{ kg}$$

$$M = M_s + M_e = -161\,960 \text{ cm kg}$$

Eingesetzt folgt:

$$\sigma_b = -42 + \frac{44\,040}{292{,}8} - z_b \frac{161\,960}{10\,500} = 108{,}5 - 15{,}42\, z_b$$

und für die Randspannungen σ_u ($z_u = -9{,}142$ cm) und σ_0 ($z_0 = +10{,}858$ cm):

$$\sigma_u = +249{,}5 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck}, \quad \sigma_0 = -58{,}8 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug}.$$

Die Eisenspannungen ergeben:

$$\sigma_{ei} = \sigma^v_{ei} + 20\,\frac{44\,040}{292{,}8} - 20\,\frac{161\,960}{10\,500}\, z_{ei} = \sigma^v_{ei} + 3010 - 308{,}4\, z_{ei}$$

und daraus:

$\sigma_{e1} = -8790$ kg/cm², $\sigma_{e2} = -9713$ kg/cm², $\sigma_{e3} = -5720$ kg/cm²

Die Kontrolle bestätigt obiges Resultat:

$$\int \sigma_b\, dF_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = \frac{\sigma_0 + \sigma_u}{2} F_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = \;= 22\,870 \text{ kg} - 22\,860 \text{ kg} \cong 0$$

Es dürfte noch von Interesse sein, den Einfluss des Schwindens getrennt zu bestimmen. Dafür setzen wir $\varepsilon_s = 0$, d. h. wir bekommen den Zustand der «reinen» Vorspannung. Es wird:

$$N = 33\,960 \text{ kg}, \quad M = -170\,600 \text{ cm kg}$$

$$\sigma_b = 116 - 16{,}25\, z_b \text{ und daraus: } \begin{cases} \sigma_u = 264{,}6 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_0 = -60{,}3 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{ei} = \sigma^v_{ei} + 2320 - 325\, z_{ei} \text{ und: } \begin{cases} \sigma_{e1} = -9\,360 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{e2} = -10\,334 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{e3} = -6\,560 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Sämtliche Spannungen sind in diesem Falle grösser; ein Teil der Vorspannung geht durch das Schwinden verloren.

[1]) SBZ vom 30. Januar 1943, Bd. 121, S. 51*.

[2]) *E. Mörsch* gibt im «Spannbetonträger» am Schlusse einige Kurven-Tafeln an, die jedoch nur für einen ganz bestimmten Querschnitt des Trägers mit bestimmten Armierungen gelten.