

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 125/126 (1945)
Heft: 4

Artikel: Ein Schwingungsproblem aus dem Flugzeugbau: Ruderfrequenz und Flatterfrequenz
Autor: Grossmann, K.H. / Bader, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83704>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

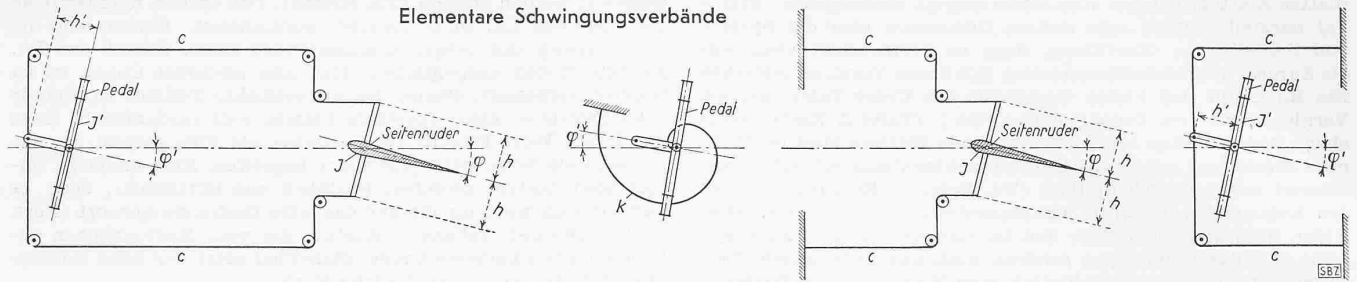
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Abb. 3a. Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{p}$ Abb. 3b. Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{p}{p'}}$ Abb. 3c. Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{p_0}$ Abb. 3d. Eigenfrequenz $\omega' = \sqrt{p'}$

$$\left. \begin{aligned} (-Ip + 2ch^2)A - 2chh'A' &= M_1 \\ -2chh'A + (-I'p + 2ch'^2 + k)A' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

p bezeichnet das Frequenzquadrat:
 $p = \omega^2$

Es folgt:

$$\frac{D(p)}{-I'p + 2ch'^2 + k} A = M_1 \quad (3)$$

Hierin ist $D(p)$ die Determinante des Gleichungssystems (2):

$$D(p) = \begin{vmatrix} -Ip + 2ch^2 & -2chh' \\ -2chh' & -I'p + 2ch'^2 + k \end{vmatrix} =$$

$$= (-Ip + 2ch^2 + k)(-Ip + C) \quad (4)$$

mit

$$C = 2ch^2 \left(1 - \frac{2ch'^2}{-I'p + 2ch'^2 + k} \right) \quad (5)$$

Mit Rücksicht auf (4) kann man (3) in folgender Form schreiben:

$$-IpA + CA = M_1 \quad \text{oder} \quad I\ddot{\varphi} + C\varphi = M \quad (6)$$

Es sieht also aus, als ob das Ruder ausser M einer Rückstellfeder von der Steifigkeit C (Moment/radians) ausgesetzt wäre. In der Tat pflegt man bei Flatterrechnungen den wirklichen Schwingverband (Abb. 1) einfach durch ein so gefedertes Ruder (Abb. 2, unten) zu ersetzen. Dessen Eigenfrequenz ist

$$\omega^* = \sqrt{p^*} \quad p^* = C/I \quad (7)$$

Dreierlei ist zu beachten: Erstens ist C kein Festwert, sondern die durch (5) gegebene Funktion von p . Zweitens wird C für einen gewissen p -Bereich negativ. Die einer «Feder» von negativer Steife ausgesetzte Schwungmasse ist aber offenbar keiner harmonischen Eigenschwingung fähig; die durch (7) definierte (imaginäre) «Ruderfrequenz» verliert mit dem Vorzeichenwechsel ihren physikalischen Sinn. Drittens ist die Amplitude M_1 des äusseren Momentes, immer unter Voraussetzung einer harmonischen, das Seitensteuer miterfassenden Flatterschwingung, keine Konstante, sondern, wie hier nicht zu begründen, proportional zu A :

$$M_1 = f(p, V) A$$

Bei gegebener Flughöhe hängt der komplexe Proportionalitätsfaktor f , wie angedeutet, ausser von p , von der Fluggeschwindigkeit V ab. Nach (6) folgt somit aus $A \neq 0$ die komplexe Bestimmungsgleichung

$$-Ip + C(p) = f(p, V) \quad (8)$$

für das Wertepaar p, V .

Die Eigenschwingungen des Schwingverbandes

Bei Eigenschwingungen, die sich spontan, für $M_1 = 0$ einstellen, muss die Determinante $D(p)$ des Gleichungssystems (2) verschwinden:

$$D(p) = 0 \quad (9)$$

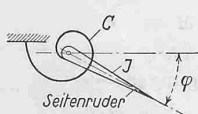


Abb. 2. Ersatz-Seitensteuer Ruderfrequenz
 $\omega^* = \sqrt{p^*}$

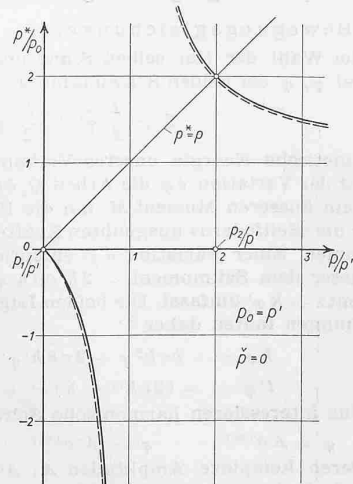


Abb. 4a.

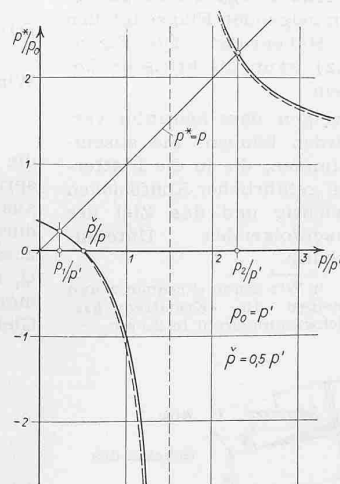


Abb. 4b.

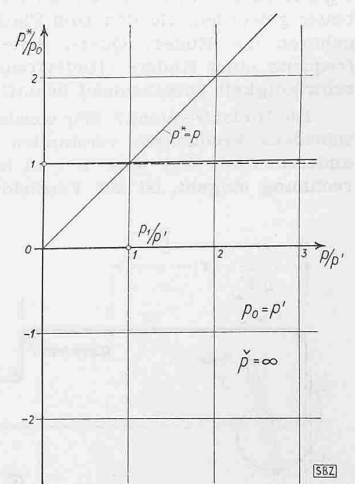


Abb. 4c.

Zusammenhang zwischen Flatter- und Ruderfrequenz bei verschiedenen Einspannungsgraden des Pedals.
 Gestrichelte Kurven: Verlauf nach der genaueren Theorie

Betrachten wir zunächst statt des unsrigen die vier in Abb. 3 skizzierten einfacheren Verbände a bis d. Die Frage nach den bezüglichen Eigenfrequenzen $\bar{\omega}$, $\check{\omega}$, ω_0 , ω' führt beim ersten Schwingverband auf die Gleichung

$$D_1(p) = 0$$

mit

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} -Ip + 2ch^2 & -2chh' \\ -2chh' & -I'p + 2ch'^2 \end{vmatrix} =$$

$$= II'p^2 - 2c(I'h^2 + Ih'^2)p \quad (10)$$

Für den ersten Verband gilt demnach:

$$\bar{p} = \bar{\omega}^2 = \frac{2ch^2}{I} + \frac{2ch'^2}{I'}, \quad (\bar{p}_1 = 0) \quad (11)$$

Für den zweiten Verband gilt:

$$\check{p} = \check{\omega}^2 = \frac{k}{I'} \quad (12)$$

Für den dritten offenbar:

$$p_0 = \omega_0^2 = \frac{2ch^2}{I} \quad (13)$$

Für den vierten:

$$p' = \omega'^2 = \frac{2ch'^2}{I'} \quad (14)$$

Offenbar ist

$$D(p) = D_1(p) + k(-Ip + 2ch^2) =$$

$$= II'[p^2 - (\bar{p} + \check{p})p + p_0\check{p}] \quad (15)$$

Die beiden Lösungen von (9) sind somit:

$$p_{1,2} = \frac{\bar{p} + \check{p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{p} + \check{p})^2 - 4p_0\check{p}} \quad (16)$$

Das Ersatzruder

Man pflegt, wie gesagt, bei Flatterrechnungen das Seitenruder nach Abb. 2 als eine durch eine elastische Feder der Steifigkeit C (Moment/radians) zurückgehaltene Schwungmasse zu schematisieren. Das schadet solange nicht, als man die «Eigenfrequenz» ω^* des Idealruders nicht mit den tatsächlichen Eigenfrequenzen $\omega_1 = \sqrt{p_1}$, $\omega_2 = \sqrt{p_2}$ verwechselt. Diese sind zwei durch die mechanischen Parameter gemäss (16) gegebene Festwerte; jene hängt gemäss (7) und (4) oder (5) vom Frequenz-

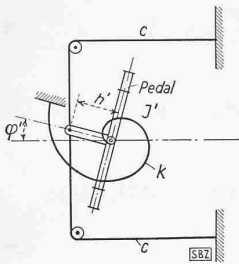


Abb. 5. Elementarer Schwingverband, Eigenfrequenz $\sqrt{p+p'}$

Quadrat $p = \omega^2$ des (beim Grenzübergang zur Eigenschwingung verschwindenden) äusseren Momentes ab:

$$p^* = \frac{C}{I} = \frac{D(p)}{I(-I'p + 2ch'^2 + k)} = p_0 \left(1 - \frac{p'}{p + p' + \bar{p}} \right)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\bar{p} - p}{p'}} \quad (17)$$

Seile wirken hemmend, dem Ruderausschlag entgegen, auf das Ruder. Anders für

$$\bar{p} < p < \bar{p} + p' \quad \dots \quad (b_2)$$

In diesem zweiten Teilbereich von (b) versagt die durch Abb. 2 angedeutete Vorstellung: Die Seile wirken antreibend, im Sinne seines Ausschlags, auf das Ruder; C und damit p^* ist negativ.

Bei fest eingespanntem Pedal ist, unabhängig von der Flatterfrequenz, $p^* = p_0$. Auch bei federnder, ja bei fehlender Einspannung kommt p^* diesem Grenzwert beliebig nahe, sofern die Flatterfrequenz nur hoch genug ist: Ein genügend hoch frequentes Seilmoment vermag an dem Pedal nicht mehr merklich zu rütteln. In der Tat ist nach (18)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{h'A'}{hA} = 0$$

Denkt man sich die Flatterschwingung dagegen immer mehr verlangsamt, so zügelt das in entgegengesetzter Phase schwingende Pedal mittels der Seile das Ruder immer stärker, bis zum Stillstand bei Annäherung von $\sqrt{\bar{p}}$ an die Resonanzfrequenz $\sqrt{\bar{p} + p'}$ des in Abb. 5 skizzierten Schwingverbandes:

$$\lim_{p \rightarrow \bar{p} + p'} \frac{hA}{h'A'} = 0$$

Es ist, als ob die Ersatzfeder der Abb. 2 sich grenzenlos versteife. In $p = \bar{p} + p'$ schlägt ihre «Steifigkeit» C ins negativ Unendliche um, steigt alsdann, bei weiter abnehmendem p , erneut an, von $p = \bar{p}$ an wiederum positiv, bei verschwindendem p dem Grenzwert $p_0 / \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right)$ zustrebend.

Wie aus (4) und (7) hervorgeht, ist p dann und nur dann eine Wurzel eines Polynoms $D(p)$, wenn $p = p^*$: Genau dann, wenn die Flatter- mit einer Eigenfrequenz des wirklichen Schwingverbandes (Abb. 1) zusammenfällt, besteht auch Resonanz mit dem fiktiven Schwinger (Abb. 2). Dieser Umstand ist in Abb. 4 (unter der Annahme $p' = p_0$) zur graphischen Bestimmung der Eigenfrequenzquadrate p_1 und p_2 benutzt. Ersichtlich nehmen, im Einklang mit (16), mit stärkerer Pedal-Einspannung (größerem $\bar{p}$) beide Eigenfrequenzen zu: p_1 wächst von 0 (freies Pedal) bis p_0 (festes Pedal), p_2 wächst von $\bar{p} = p_0 + p'$ nach ∞ .

Die Eigenfrequenzen sind experimentell leicht zu ermitteln. Ignoriert man bei freiem Pedal (Abb. 4a) die Eigenfrequenz $\omega_1 = 0$, bei festem Pedal die Eigenfrequenz $\omega_2 = \infty$, so wird man überrascht feststellen, dass «die» Eigenfrequenz bei unendlich starker Pedaleinspannung kleiner ist als bei fehlender Einspannung! Es ist eben

$$(0 = p_1 \text{ frei} < p_1 \text{ fest} < p_2 \text{ frei} < p_2 \text{ fest} = \infty)$$

Zur bequemeren Einsicht in die Abhängigkeit der Ruderfrequenz vom «Einspannungsgrad» des Pedals diene Abb. 6, die p^*/p_0 für verschiedene Werte von p/p' in Funktion von $\bar{p}/p'$ darstellt. Diese Hyperbeln zeigen, dass bei gegebener Flatterfrequenz die Ruderfrequenz mit stärkerer Einspannung ansteigt. Allerdings springt, sofern $\bar{p} > p'$, sofern also die Flatter- die Eigenfrequenz des Schwingverbandes der Abb. 3 d übertrifft, die Ruderfrequenz bei Ueberschreiten der Stelle $\bar{p} = p - p'$, also bei Resonanz zwischen der Flatterschwingung und der Eigenschwingung des Verbandes der Abb. 5, von $+\infty$ auf $-\infty$ über,

sodass für $\bar{p} > p - p'$ die Ruderfrequenz durchweg kleiner ist für $\bar{p} < p - p'$.

Anhang: Vergleich mit einer genaueren Theorie

Die bisherige Auffassung der Seile als Federn berücksichtigt einzig ihre Elastizität. Will man die Bewegung der Seilenden genauer bestimmen, so hat man die harmonische Längs-Schwingung zu untersuchen, deren das Seil als nicht bloss ela-

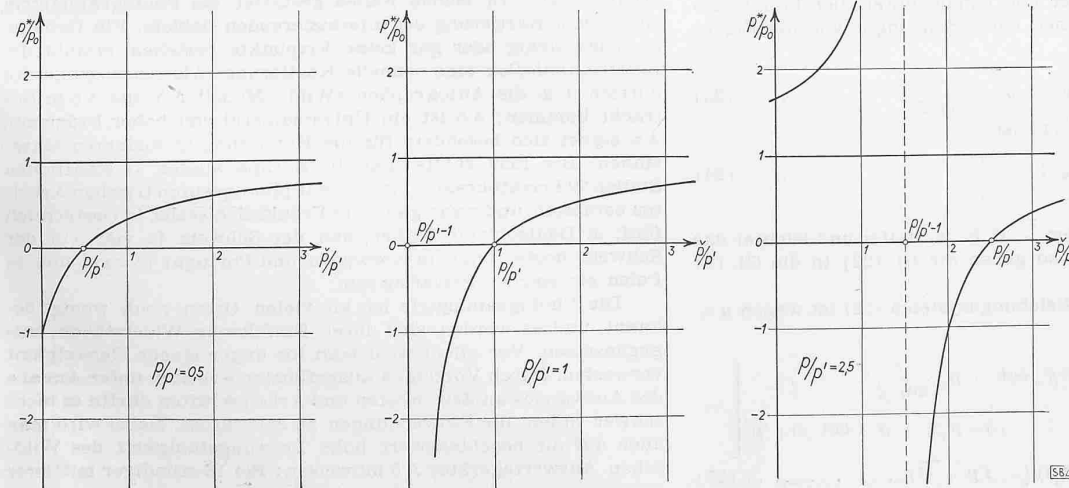


Abb. 6. Abhängigkeit der Ruderfrequenz vom Einspannungsgrad des Pedals bei verschiedenen Flatterfrequenzen

Diskussion

Bei der Untersuchung eines bestimmten Flatterfalles, an dem ausser dem Seitensteuer sich etwa noch der Flugzeugrumpf mit einer Biege- oder Drehschwingung beteiligt, ist neben der kritischen Geschwindigkeit V , die diese gemeinsame Flatter-Schwingung ermöglicht, deren Frequenzquadrat p die zweite Unbekannte; p ist auch das Frequenzquadrat des oben eingeführten äusseren Momentes M . Eine komplexe (zwei reellen äquivalente) Bestimmungsgleichung wie (8) für V und die Flatterfrequenz $\omega = \sqrt{p}$ ergibt sich aus der Berechnung sämtlicher mitwirkender aerodynamischen, elastischen und Trägheitskräfte; in dieser Berechnung bildet der hier erörterte Zusammenhang zwischen ω und der sogenannten Ruderfrequenz $\omega^* = \sqrt{p^*}$ ein wesentliches Glied. Diesen durch (17) gelieferten Zusammenhang veranschaulicht Abb. 4a für $\bar{p} = 0$ (freies Pedal), Abb. 4b für $\bar{p} = 0,5 p'$, Abb. 4c für $\bar{p} = \infty$ (festes Pedal).

Vergleichen wir, um diese Hyperbeln besser zu verstehen, die komplexen Schwingungsamplituden hA und $h'A'$ der Enden eines Seils! Nach (2), (12) und (14) ist

$$\frac{hA}{h'A'} = \frac{p' + \bar{p} - p}{p'} = 1 + \frac{\bar{p} - p}{p'} \quad \dots \quad (18)$$

Demnach sind drei p -Bereiche zu unterscheiden: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{hA}{h'A'} < 0 & \quad \text{für } \bar{p} + p' < p \\ 0 < \frac{hA}{h'A'} < 1 & \quad \text{für } \bar{p} < p < \bar{p} + p' \\ 1 < \frac{hA}{h'A'} & \quad \text{für } 0 < p < \bar{p} \end{aligned}$$

Im Bereich

$$\bar{p} + p' < p \quad \dots \quad (a)$$

schwingen Ruder und Pedal in entgegengesetzter, im Bereich

$$0 < p < \bar{p} + p' \quad \dots \quad (b)$$

in gleicher Phase. Im Bereich (a), wie auch im Teilbereich

$$0 < p < \bar{p} \quad \dots \quad (b_1)$$

des Bereiches (b) trifft die Schematisierung der Abb. 2 zu: Die

stisches, sondern auch massebehaftetes Gebilde fähig ist. Betrachten wir etwa das obere Seil, Abb. 1. Die Längsverschiebung w eines im Abstand x vom Pedalende des Seiles gelegenen Seilpunktes ist bei einer solchen Schwingung eine harmonische Funktion der Zeit mit einer von x abhängigen (komplexen) Amplitude:

$$w(x, t) = U(x) e^{i\omega t} \quad 0 \leq x \leq L$$

Da w der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 w$$

gehört (E = Elastizitätsmodul, ρ = Dichte des Seils), $U(x)$ also der Differentialgleichung

$$U'' + \frac{\rho}{E} \omega^2 U = 0,$$

ist $U(x)$ gleichfalls harmonisch:

$$U(x) = P \sin\left(\beta \frac{x}{L}\right) + Q \cos\left(\beta \frac{x}{L}\right) \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \omega \quad (19)$$

Drücken wir P und Q durch die Schwingungsamplituden der Winkel φ und φ' , Abb. 1, aus! Da

$$w(0, t) = h' \varphi' = h' A' e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad w(L, t) = h \varphi = h A e^{i\omega t} \quad (20)$$

ist

$$U(0) = h' A' \quad \text{und} \quad U(L) = h A$$

somit

$$Q = h' A' \quad \text{und} \quad P = \frac{h A}{\sin \beta} - h' A' \cot \beta \quad (21)$$

Die nämliche Ueberlegung gilt offenbar auch für das untere Seil, wenn man auf ihm die Verschiebung im entgegengesetzten Sinn positiv rechnet wie auf dem oberen Seil: ihre Amplitude ist gleichfalls von der Form (19), mit den selben, durch (21) gegebenen Konstanten P und Q . Jeder Punkt des unteren Seils bewegt sich also entgegengesetzt gleich wie der ihm auf dem oberen Seil gegenüberliegende Punkt.

Der Ueberschuss K der in einem Seil übertragenen Kraft über die Vorspannung ist bei geeigneter Vorzeichenkonvention

$$K = EF \frac{\partial w}{\partial x} = EF U'(x) e^{i\omega t}$$

(F = Seilquerschnitt). Daher sind die von den beiden Seilen auf das Pedal und auf das Ruder ausgeübten Kräftepaare (im Uhrzeigersinn positiv gerechnet) beziehentlich

$$M_0 = 2h' EF U'(0) e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad M_L = -2h EF U'(L) e^{i\omega t}$$

Der Drallsatz ergibt:

$$I' \ddot{\varphi}' + k \varphi' = M_0 \quad I \ddot{\varphi} = M + M_L$$

oder

$$-I' p A' + k A' = 2h' EF U'(0), \quad -I p A = M_1 - 2h EF U'(L)$$

also, mit Rücksicht auf (19), (21) und (1):

$$\left. \begin{aligned} (-I p + 2c h^2 \frac{\beta}{\sin \beta} \cos \beta) A - 2c h h' \times \frac{\beta}{\sin \beta} A' &= M_1 \\ -2c h h' \frac{\beta}{\sin \beta} A + \\ &+ (-I' p + 2c h'^2 \frac{\beta}{\sin \beta} \cos \beta + k) A' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Man kann sich die Steifigkeit c und die Masse $\rho L F$ eines Seils getrennt in einer Feder und einem materiellen Punkt verkörpert denken, die zusammen einen Schwinger von der Eigenfrequenz

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{p}{p_0}} \quad \bar{p} = \frac{c}{\rho L F} \quad (23)$$

ausmachen. Nach (19) und (1) ist

$$\beta = \frac{\omega}{\bar{\omega}} \quad (24)$$

also umso kleiner, je grösser $\bar{\omega}$, d. h. je steifer und leichter das Seil ist. Strebt β nach 0, so gehen die Gl. (22) in die Gl. (2) über.

Die Determinante des Gleichungssystems (22) ist wegen $p = \bar{p} \beta^2$:

$$\begin{aligned} \bar{D}(\beta) = II' & \begin{vmatrix} -\bar{p} \beta^2 + p_0 \beta \cot \beta & -p_0 \frac{\beta}{\sin \beta} \\ -p' \frac{\beta}{\sin \beta} & -\bar{p} \beta^2 + p' \beta \cot \beta + \bar{p} \end{vmatrix} = \\ & = I' N(\beta) (-I p + \bar{C}) \quad (25) \end{aligned}$$

mit

$$\bar{C} = I p_0 \left(\beta \cot \beta - \frac{p' \beta^2}{N(\beta) \sin^2 \beta} \right) \quad (26)$$

und

$$N(\beta) = -\bar{p} \beta^2 + p' \beta \cot \beta + \bar{p} \quad (27)$$

Für eine Eigenschwingung ist

$$\bar{D}(\beta) = 0$$

d. h., mit Rücksicht auf die Definitionen (11), (13), (14):

$$\frac{\cot \beta}{\beta} = \frac{\bar{p} \beta - (p_0 p' + \bar{p} p)/\beta}{\bar{p} \bar{p} \beta - p_0 p'/\beta} \quad (28)$$

Jeder dieser Gleichung genügende Wert β liefert gemäss (24) eine Eigenfrequenz ω .

Aus (22) folgt mit der Abkürzung (27):

$$\frac{\bar{D}(\beta)}{I' N(\beta)} A = M_1$$

oder, wegen (25):

$$(-I p + \bar{C}) A = M_1$$

Wie oben kann man als «Ruderfrequenz» definieren:

$$\bar{p} = \frac{\bar{C}}{I} \quad (29)$$

sodass

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}}{p_0} &= \beta \cot \beta - f(\beta), \quad f(\beta) = \\ &= \frac{\beta^2}{\sin^2 \beta} \frac{p'}{p + p' \beta \cot \beta - \bar{p} \beta^2} \quad (30) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (30) und (24) bestimmen, wie $\bar{p}$ von p abhängt. Wiederum sind, wegen (29) und (25), genau jene p -Werte, für welche

$$\bar{p} = p$$

ist, Eigenfrequenzquadrate.

In der Abb. 4 bezeichnen neben den durchgezogenen Kurven für p^*/p_0 die gestrichelten Kurven die genaueren Werte $\bar{p}/p_0$ in Funktion von p/p' , dies bei der Annahme $\bar{p}/p' = 30$. In dem betrachteten p/p' -Bereich ist unsere Auffassung der vorgespannten Steuerseile als elastischer Federn ersichtlich legitim.

MITTEILUNGEN

Topographische Arbeiten im Dienste des europäischen Wiederaufbaues. Eine der wichtigsten Grundlagen für die Planung des Wiederaufbaues sind zuverlässige Karten und Pläne; man braucht sie in den Massstäben 1:500 bis 1:5000; Photopläne in solchen von 1:2000 bis 1:10 000. Dieses Material muss möglichst bald in ausreichender Zahl und zu mässigen Kosten zur Verfügung stehen. Die klassischen topographischen Aufnahmeverfahren taugen hierfür nicht; ausser Zeit und Geldmitteln würde es namentlich für ihre Anwendung an den nötigen Vermessungsfachleuten fehlen. Dagegen ist die *Stereophotogrammetrie* das für diese Verhältnisse am besten geeignete Verfahren¹⁾.

Bei solchen Arbeiten ist vieles vorzusehen, denn es gibt Zonen, in denen durch die Kriegereignisse alles zerstört ist: Katasterarchive, Eigentums- und Steuerregister, Pläne, Karten, Fixpunkte usw. In andern Zonen werden einzelne Elemente noch erhalten sein. In beiden Fällen gestattet die Photogrammetrie eine rasche Kartierung der interessierenden Gebiete. Für Gebiete, in denen wenig oder gar keine Fixpunkte bestehen, erlaubt die *Lufttriangulation* eine schnelle Kartierung. Als Auswertegeräte dürften u. a. die Autographen «Wild», Modell A5 und A6 in Betracht kommen; A5 ist ein Universalgerät von hoher Präzision, A6 eignet sich besonders für die Kartierung in kleineren Massstäben. Bis 1939 zählte man in Europa ausser 31 staatlichen Stellen 29 Privatbureaux, die sich mit photogrammetrischen Arbeiten befassen, und zwar gab es in Frankreich sechs, in Oesterreich fünf, in Deutschland, Italien und der Schweiz je vier, (in der Schweiz heute fünf), in Norwegen und Portugal je zwei und in Polen ein solches Privatbureau.

Die Photogrammetrie ist an vielen Orten noch wenig bekannt, und es werden sich ihrer Einführung Widerstände entgegengesetzt. Vor allem wird man ihr ungenügende Genauigkeit vorwerfen. Durch Vorzeigen ausgeführter Arbeiten unter Angabe des Aufwandes an Zeit, Kosten und Arbeitskräften dürfte es nicht schwer fallen, die Einwendungen zu entkräften. Dabei wird man auch auf die beachtenswert hohe Leistungsfähigkeit des Wildschen Auswertegerätes A5 hinweisen: Bei 16-stündiger mittlerer

¹⁾ Vgl. SBZ Bd. 123, S. 80* und S. 253 (1944).