

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 66 (1948)
Heft: 3

Artikel: Zuordnung von Drehzahlen umlaufender Rotoren: theoretischer Teil
Autor: Föppl, O.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56647>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zuordnung von Drehzahlen umlaufender Rotoren

Theoretischer Teil

DK 621-253

Von O. FÖPPL, Wöhler-Institut, Braunschweig

Vorbemerkung. Das im vorliegenden Aufsatz behandelte Problem, bei dem der Gang einer ersten Rotationsmaschine durch den einer zweiten beeinflusst wird, liegt z. B. bei der zweistufigen Gasturbine vor. Hier läuft der eine Maschinensatz, der mit dem Generator gekuppelt ist, mit konstanter Drehzahl, während sich die Drehzahl des andern mit den ND-Kompressoren je nach der Belastung in weitem Bereich verändert. Es ist sehr wahrscheinlich, dass der von O. Föppl untersuchten Erscheinung bei Gasturbinen besondere Bedeutung zukommt. Sie dürfte aber auch in vielen anderen Fällen eine gewisse Rolle spielen. Dem vorliegenden theoretischen Teil wird in der nächsten Nummer ein experimenteller Teil nachfolgen.

Red.

1. Einführung

In einem früheren Aufsatz¹⁾ habe ich die Berechnung der kritischen Drehzahlen von umlaufenden Schaufelrädern unter Berücksichtigung der Kreiselmomente angegeben. Es wurde dort gezeigt, dass man durch Einführung eines reduzierten Trägheitsmomentes die umlaufende Welle auf eine ruhende Welle zurückführen kann, die die gleiche Eigenschwingungszahl hat.

Im Anschluss an die an jener Stelle niedergelegte Ueberlegung soll die gegenseitige Beeinflussung von zwei benachbart aufgestellten Maschinen behandelt werden, von denen in der einen (1) etwa eine Turbinentrommel umläuft, die Biegeschwingungen ausführen kann, während die andere (2) Erschütterungen so auf das Fundament der Maschine 1 überträgt, dass deren Trommel, die mit der Frequenz ω_1 umläuft, zu Biegeschwingungen mit der Frequenz ω_2 von der Maschine 2 her erregt wird. Zur Drehzahl n_1 der Maschine 1 gehört also eine störende Drehzahl n_2 derart, dass eine Maschine in der Nachbarschaft, die mit der Drehzahl n_2 umläuft, störende Erscheinungen an der Maschine 1 hervorrufen kann.

2. Die kritische Drehgeschwindigkeit ω_{Wk}

Wie hier¹⁾ bereits angegeben, kann man die kritische Drehgeschwindigkeit ω_{Wk} , bei der die Drehfrequenz ω_W der Welle gleich der Biegefrequenz ω_B ist, berechnen, wenn man ein reduziertes Trägheitsmoment $\Theta_{red k}$ einführt, das bei der nicht umlaufenden Welle Eigenschwingungen mit der gleichen Frequenz ω_{Wk} ausführt. Wir bezeichnen mit $\Theta_y = \Theta_z$ das axiale Massenträgheitsmoment der Schwungmasse bezogen auf die in der Querschnittebene liegende Axe y und mit Θ_x das polare Trägheitsmoment, das sich auf die in der Querschnittebene in einem Punkt projizierende x -Axe bezieht. Unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung folgt dann nach der angegebenen Stelle:

$$(1) \quad \Theta_y \omega_B^2 - \Theta_x \omega_W \omega_B = \Theta_{red k} \omega_{B_0}^2$$

Wenn die Eigenschwingungsfrequenz ω_{B_0} der nicht umlaufenden Welle gleich $\omega_W = \omega_{Wk}$ ist, folgt aus Gleichung (1) zunächst die Grösse des reduzierten kritischen Trägheitsmomentes $\Theta_{red k}$, das, auf die nicht umlaufende Welle gesetzt, eine Biegeschwingungszahl hervorruft, die gleich ist der kritischen Drehzahl der tatsächlich umlaufenden Welle.

Man kann aus der Gleichung (1) auch unmittelbar die der Maschine 1 zugeordnete Drehzahl berechnen, wobei die zugeordnete Drehzahl n_2 eine Funktion der Drehzahl n_1 der Maschine 1 ist. Bevor das geschieht, haben wir einige Bemerkungen zum kritischen reduzierten Trägheitsmoment $\Theta_{red k}$ beizufügen.

Für eine unsymmetrisch auf der Welle sitzende Turbinentrommel kann stets eine kritische Drehzahl angegeben werden, die aus der Zusammensetzung der Massenschwingung und der Schwingung des Trägheitsmomentes hervorgeht. Man kann stets ein reduziertes Trägheitsmoment Θ_{red} angeben, das bei nicht umlaufender Welle die gleiche Biegeschwingungsfrequenz ω_B hat. Es ist:

$$(2) \quad \Theta_{red k} = \Theta_y - \Theta_x$$

Für schmale Scheiben wird $\Theta_{red k}$ negativ. Unter einem negativen Trägheitsmoment verstehen wir ein Moment $M = M_0 \cos \omega t$, das bei der Schwingung entgegengesetzt gerichtete

Rückwirkungen auf die Welle ausübt gegenüber einem positiven Trägheitsmoment von gleichem Absolutwert.

Wenn $\Theta_{red k}$ nach Gleichung (2) einen positiven Wert aufweist, treten zwei Schwingungsfrequenzen ω (1. und 2. Grades) bei der Welle, die eine Masse m zwischen den Lagern trägt (Bild 1), auf, je nachdem, ob sich die von der Kraft P und dem Moment M herrührenden Ausschläge addieren oder subtrahieren. Ich habe die beiden Frequenzen mit Schwingungen 1. und 2. Grades²⁾ bezeichnet, wiewohl nur eine Masse auf der Welle sitzt. Die nicht umlaufende Welle mit $\Theta_{red k}$ biegt sich bei der Schwingung gerade so durch, wie die umlaufende Welle, auf der die Schwungmasse m mit dem axialen Trägheitsmoment Θ_y und dem polaren Trägheitsmoment Θ_x sitzt.

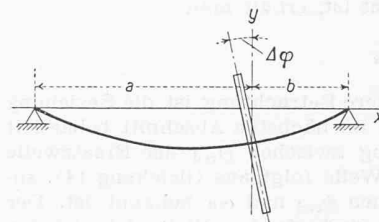


Bild 1. Schwingung einer Welle unter Berücksichtigung der Schrägstellung der Schwungmasse

Wenn $\Theta_y > \Theta_x$, ist das

Verhältnis des Biegemomentes M zur Kraft P bei der tatsächlichen umlaufenden und der reduzierten nicht umlaufenden Welle gleich gross oder $\kappa = M/Pa$ hat den gleichen Wert (Bild 1).

Diese Angabe gilt aber nicht nur für die kritische Drehzahl, sondern für jede Drehzahl. Man kann zu jeder Drehzahl der Maschine die Eigenschwingungsfrequenz ω_B der ohne Exzentrizität gelagerten und mit der Frequenz ω_W umlaufenden Welle berechnen und zu diesem Zweck ein reduziertes Trägheitsmoment Θ_{red} angeben, das bei der nicht umlaufenden Welle die gleiche Biegeschwingungsfrequenz ω_B liefert. Θ_{red} ist in diesem Fall eine Funktion von ω_W . Es ist also $\Theta_{red k}$ das Trägheitsmoment, das bei der nicht umlaufenden Welle eine Eigenschwingungsfrequenz ω_{Wk} liefert, die gleich der kritischen Eigenschwingungsfrequenz ist und $\Theta_{red} = f(\omega_W)$ das Trägheitsmoment, das bezüglich Eigenschwingungsfrequenz zur Drehfrequenz ω_W der Welle gehört.

3. Die zur Wellendrehgeschwindigkeit ω_W zugeordnete Biegeschwingungsfrequenz ω_B

Für die Turbinentrommel, für die wir die Abhängigkeit der Eigenschwingungsfrequenz ω_B von der Drehfrequenz ω_W berechnen wollen, müssen die Abmessungen der Welle und die Werte m , Θ_y und Θ_x bekannt sein. Wir betrachten eine Vergleichswelle mit gleichen Abmessungen, bei der Θ_y durch beliebige Werte Θ_{red} ersetzt ist und berechnen ω_B dieser Vergleichswelle, die nicht umläuft. Da durch den Umlauf der tatsächlichen Welle das axiale Trägheitsmoment Θ_y scheinbar verringert wird, soll Θ_{red} beliebige Werte zwischen Θ_y und $-\infty$ annehmen. Die Werte $\Theta_{red} > \Theta_y$ haben kein praktisches Interesse, weil sie sich auf den Gegenlauf beziehen, dessen Schwingungen infolge der Werkstoffdämpfung sehr rasch abklingen. Zu $\Theta_{red} = \Theta_y$ gehört nach Gleichung (1) die Biegeschwingungsfrequenz ω_{B_0} der nicht umlaufenden Welle. Wir nennen die Drehzahl, die zu $\Theta_{red} = 0$ gehört ω_1 . Wir berechnen zunächst nach Gleichung (1) die Eigenschwingungsfrequenz ω_{B_1} der Welle, bei der die Eigenschwingungsfrequenz ω_{B_1} der tatsächlichen umlaufenden Scheibe gleich ω_1 zugehörend zu $\Theta_y = 0$ ist:

$$(3) \quad \omega_{W1} = \omega_{B1} \frac{\Theta_y}{\Theta_x} = \omega_1 \frac{\Theta_y}{\Theta_x}$$

ω_{B1} ist grösser als die Schwingungsfrequenz ω_{B_0} der nicht umlaufenden Welle mit dem Trägheitsmoment Θ_y . Der Umlauf der Scheibe bewirkt eine Erhöhung der Schwingungsfrequenz. Wenn ω_W noch weiter wächst ($\omega_W > \omega_{W1}$), nimmt Θ_{red} nach Gleichung (1) negative Werte an. Zu $\omega_W = \infty$ gehört nach Gleichung (1) ein Wert $\Theta_{red} = -\infty$. Zu einem unendlich grossen negativen Trägheitsmoment Θ_{red} der aufgesetzten Schwungmasse gehört eine endliche Biegeschwingungsfrequenz $\omega_{B_2} = \lambda_p \omega_1$, bei der das Trägheitsmoment seine Richtung bei der Schwingung nicht ändert ($\Delta \varphi = 0$).

Wenn $\Theta_{red} = +\infty$ ist, ist es die Schwingung 2. Grades, die eine endliche Schwingungsfrequenz $\lambda_p \omega_1$ hat (mit $\Delta \varphi = 0$).

²⁾ O. Föppl: Mittlg. d. Wöhler-Inst., Heft 40, auch Biezeno-Grammel sprechen in Techn. Dynamik auf S. 807 »vom Charakter einer kritischen Drehzahl 2. Ordnung«.

¹⁾ Siehe SBZ 1947, Nr. 20, S. 259*.

Wenn $\Theta_{\text{red}} = -\infty$, ist es die Schwingung 1. Grades (eine Schwingung 2. Grades gibt es hierfür nicht), die die Schwingungsfrequenz $\lambda_p \omega_1$ grösser als ω_1 hat.

Wir wollen die Betrachtung am Beispiel der unsymmetrisch belasteten Welle nach Bild 1 durchführen. Die Abmessungen der Welle und der Schwingscheibe seien bekannt. Es ist die Aufgabe gestellt, die Eigenfrequenz ω_B der Biegeschwingung in Abhängigkeit von ω_W anzugeben. Um diese Aufgabe zu lösen, ziehen wir eine nicht umlaufende Ersatzwelle heran, die bei gleichen übrigen Abmessungen das reduzierte Trägheitsmoment Θ_{red} (statt Θ_y) hat. Nach Gleichung (1), in der $\omega_B = \omega_{B_0}$ gesetzt ist, erhält man:

$$(4) \quad \Theta_{\text{red}} = \Theta_y - \frac{\omega_W}{\omega_B} \Theta_x$$

Die Grundlage für die weitere Betrachtung ist die Beziehung zwischen Θ_{red} und ω_{B_0} , die im nächsten Abschnitt behandelt werden wird. Die Beziehung zwischen Θ_{red} der Ersatzwelle und ω_W der tatsächlichen Welle folgt aus Gleichung (4), sobald die Zuordnung zwischen Θ_{red} und ω_B bekannt ist. Der zweidimensionale Fall der umlaufenden Welle ist auf den eindimensionalen Fall der schwingenden, nicht umlaufenden Welle zurückgeführt.

4. Biegeschwingungsfrequenz ω_{B_0} in Abhängigkeit von Θ_{red} der nicht umlaufenden Welle

Für die zweifach gelagerte Welle nach Bild 1 soll ω_{B_0} in Abhängigkeit von Θ_{red} berechnet werden. Die Grundgleichung für die Schwingungen der Welle lautet in diesem Fall:

$$(5) \quad \omega_{B_0}^2 = \frac{M_W}{(\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2) \Theta_{\text{red}}} = \frac{P}{(f_1 + f_2) m}$$

In dieser Gleichung sind f_1 und f_2 die Durchbiegungen, die von der Kraft P bzw. vom Moment M_W herrühren, während $\Delta \varphi_1$ und $\Delta \varphi_2$ die entsprechenden Winkeländerungen sind. Mit κ bezeichnen wir das Verhältnis M_W/Pa , wobei κ so bestimmt werden muss, dass die Masse m und das Trägheitsmoment Θ_{red} nach Gleichung (5) gleich rasch schwingen. Es ist³⁾:

$$(6) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{P}{3 E J} \frac{a^2 b^2}{l}; f_2 = \frac{M_W}{3 E J} \frac{a b (b-a)}{l} = \\ = \frac{\kappa P}{3 E J} \frac{a^2 b}{l} (b-a) \\ l \Delta \varphi_1 = \frac{P}{3 E J} a b (b-a); \quad l \Delta \varphi_2 = \\ = \frac{M_W}{3 E J} (a^2 + b^2 - a b) = \frac{\kappa P}{3 E J} (a^2 + b^2 - a b) a \end{cases}$$

Die Werte aus Gleichung (6) setzen wir in die zweite Gleichsetzung 5 ein und bestimmen κ :

$$(7) \quad \begin{aligned} \kappa &= \frac{\Theta_{\text{red}}}{m a^2} \frac{(\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2) a}{f_1 + f_2} = \\ &= \frac{\Theta_{\text{red}}}{m a^2} \frac{b(b-a) + (a^2 + b^2 - a b) \kappa}{b^2 + \kappa b(b-a)} = \\ &= \kappa \frac{\nu(\nu-1) + (\nu^2 + 1 - \nu) \kappa}{\nu^2 + \kappa \nu(\nu-1)} \end{aligned}$$

oder nach κ aufgelöst:

$$(7a) \quad \kappa_{1,2} = \frac{\nu(\nu^2 - \nu + 1) - \nu^2}{2\nu(\nu-1)} \pm \frac{\sqrt{[\nu^2 - \nu(\nu^2 - \nu + 1)]^2 + 4\nu^2(\nu-1)^2}}{2\nu(\nu-1)}$$

In dieser Gleichung ist ν das Verhältnis b/a und κ das Verhältnis $\Theta_{\text{red}}/m a^2 = (i_{\text{red}}/a)^2$. Wenn wir κ aus Gleichung (7) in die erste Gleichsetzung (5) einsetzen und dabei Gleichung (6) berücksichtigen, erhalten wir die Biegeschwingungsfrequenz ω_B in Abhängigkeit von κ für die nicht umlaufende Welle.

Für $b = 2a$ oder $\nu = 2$ erhalten wir nach Gleichung (7) z. B. für $\kappa = \pm \infty$ ausser $\kappa_1 = \infty$.

$$(8) \quad \kappa_2 = -2/3; \quad \omega_{B_0}^2 = \frac{P}{m f_1} \frac{f_1}{f_1 + f_2} = \omega_1^2 \frac{1}{1 + \kappa_2 \frac{\nu-1}{\nu}} = \lambda_p^2 \omega_1^2; \quad \lambda_p = 1,22$$

In dieser Gleichung ist ω_1 die Schwingungsfrequenz, die zu $\Theta_{\text{red}} = 0$ und $\lambda_p \omega_1$ diejenige, die zu $\Theta_{\text{red}} = -\infty$ gehört.

³⁾ Siehe z. B. Th. Pöschl: «Elementare Festigkeitslehre». Verlag J. Springer, Berlin 1936.

Die Gleichung (5) schreiben wir in der Form:

$$(9) \quad \omega_{B_0}^2 = \frac{P}{m f_1} \frac{f_1}{f_1 + f_2} = \omega_1^2 \frac{\nu}{\nu + \kappa(\nu-1)}$$

Wenn wir κ aus Gleichung (7a) in Gleichung (9) einsetzen, erhalten wir $\omega_{B_0} = f(\kappa)$. Wenn aber die Abhängigkeit zwischen ω_B und Θ_{red} bekannt ist, folgt aus Gleichung (4) die Drehfrequenz ω_W , die zu Θ_{red} bzw. ω_B gehört.

Mit diesen Beziehungen ist zwar nicht $\omega_B = f(\omega_W)$ in einfacher Form dargestellt, aber die Abhängigkeit zwischen den beiden Grössen ω_B und ω_W ist mit Hilfe des reduzierten Trägheitsmomentes Θ_{red} in einfacher und übersichtlicher Weise ausgedrückt.

5. Beispiele

I. Die Abhängigkeit zwischen ω_B und i_{red} und zwischen ω_W und i_{red} soll an zwei Beispielen gezeigt werden. Wir nehmen zunächst eine dünne Scheibe an, für die $i_x^2 = \Theta_x/m$ angenähert gleich $2i_y^2$ ist und die auf einer zweifach gelagerten Welle (Bild 1) sitzt. Weiter soll sein: $b = 2a$ oder $\nu = 2$. Wir setzen ferner die besondere Anordnung voraus, für die $i_y = a$. Aus Gleichung (4) wird:

$$(10) \quad i_{\text{red}}^2 = i_y^2 - \frac{\omega_W}{\omega_B} i_x^2; \quad \kappa = \frac{i_{\text{red}}^2}{a^2} = \frac{i_{\text{red}}^2}{i_y^2} = 1 - 2 \frac{\omega_W}{\omega_B}$$

Die Abhängigkeit zwischen ω_W und ω_B folgt aus:

$$(11) \quad \omega_W = \omega_B \frac{1 - \kappa}{2}$$

Durch Einsetzen der Werte ν und κ in Gleichung (7a) folgt:

$$(12) \quad \kappa_{1,2} = \frac{3\kappa - 2 \pm \sqrt{(3\kappa - 2)^2 + 16\kappa}}{4}$$

Aus Gleichung (9) wird:

$$(13) \quad \omega_B^2 = \frac{2}{2 + \kappa} \omega_1^2$$

Endlich folgt aus Gleichung (11) und Gleichung (13)

$$(14) \quad \omega_W = \frac{1 - \kappa}{2} \omega_1 \sqrt{\frac{2}{2 + \kappa}}$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (10) bis (14) sind in Bild 2 eingetragen. Der Wert $\kappa = 1$ gehört zu der nicht umlaufenden Welle ($\omega_W = 0$), für die der reduzierte Trägheitsradius i_{red} gleich ist dem tatsächlichen axialen Trägheitshalbmesser i_y . Das Gebiet $\kappa < 1$ gehört zum Gleichlauf. Das Gebiet $\kappa > 1$ (Gegenlauf) ist hier nur deshalb mit angegeben, weil es in der Literatur behandelt wird.

Es tritt sowohl eine Schwingungsfrequenz 1. Grades (ω_{B_1}) als auch eine solche 2. Grades (ω_{B_2}) auf. Da nach Gleichung (11) ω_W von ω_B abhängig ist, sind auch zwei verschiedene Drehfrequenzkurven ω_{W_1} und ω_{W_2} zu berücksichtigen, wobei ω_{W_1} zu ω_{B_1} und ω_{W_2} zu ω_{B_2} gehören.

Die kritische Drehfrequenz liegt dann vor, wenn $\omega_B = \omega_W$ ist. Das trifft im Gleichlauf für den Punkt K_1 zu, in dem sich die Kurven ω_{W_1} und ω_{B_1} schneiden. Die kritische Drehzahl unter den gemachten Annahmen liegt also bei $\kappa = -1$ oder $i_{\text{red}}^2 = -i_y^2$.

Die Kurven für die Schwingung 2. Grades schneiden sich nicht. Zum Wert $\kappa = 0$ gehören zwar die Werte $\omega_{B_2} = \infty$ und $\omega_{W_2} = \infty$; die Kurven haben aber im Unendlichen keinen Schnittpunkt. Beim Gegenlauf treten die übereinanderliegenden Schnittpunkte K_1' und K_2' auf, die keine praktische Bedeutung haben.

Wenn man für eine bestimmte Welle die Beziehung zwischen ω_W und ω_B angeben, d. h. die zur Drehfrequenz ω_W zugeordnete Erregerfrequenz ω_B bestimmen will, muss man für die besonderen Abmessungen das Diagramm nach Bild 2 links von $\kappa = 1$ aufzeichnen. Wenn also z. B. die kritische Drehzahl n_c der Maschine ohne Berücksichtigung der Schrägstellung mit 10000 1/min (Punkt $\kappa = 0$) und die Eigenschwingungszahl n_0 der nicht umlaufenden Welle mit Berücksichtigung der Schrägstellung mit 8000 1/min berechnet worden ist (Stelle 1 mit $\omega_B/\omega_1 = 0,8$), dann liegt für die besonderen Abmessungen, die Bild 2 zu Grunde gelegt sind, K_1 an der Stelle $\kappa = -1$ mit $n_{Wk} = 10880$ 1/min. Wenn die Betriebsdrehzahl der Maschine z. B. bei 4000 1/min liegt (Punkt $\kappa = 0,18$), dann ist die zugeordnete Erregerfrequenz, die von der Maschine 2 nicht übertragen werden soll, 9770 1/min und die 2. Ordnung (Punkt $\kappa = 0,60$) 20000 1/min.

