

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 67 (1949)  
**Heft:** 28

**Artikel:** Anstrengung und Bruchgefahr fester Körper  
**Autor:** Roš, M. / Eichinger, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84091>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Anstrengung und Bruchgefahr fester Körper

Von Prof. Dr. M. ROŠ und Dipl. Ing. A. EICHINGER, Zürich

DK 539.4.011

Die Zurückführung der Festigkeits- und Verformungseigenschaften auf die besonderen Strukturen der beanspruchten Stoffe ist nicht Ziel dieses Berichtes. Diese Aufgabe gehört in das Gebiet der Kristall-Physik und Kristall-Chemie. Der vorliegende Bericht betrifft die technologische Mechanik<sup>1)</sup>, d. h. diejenige Disziplin der Naturwissenschaften, die neben der Statik und Dynamik starrer oder idealelastischer Körper auf Grund von Beobachtungen am beanspruchten Stoff jene Grundphänomene aufzuzeigen und die darauf sich stützenden Stammbegriffe zu definieren vermag, welche die Mechanik der Vorgänge makroskopischer Art im Material beherrschen. Hierzu gehören namentlich die elastische Formänderung und die plastische Verformung, wie auch andere mechanische Veränderungen des Stoffes bis zum Auftreten von Schäden, Rissen und schliesslich der Ausbildung von Bruchflächen. Für diese makroskopische Betrachtungsweise wählte W. Thomson die Bezeichnung «molar», im Gegensatz zu der mikroskopischen, die er «molekular» nannte<sup>2)</sup>.

Demnach ist die Aufgabe der nachfolgend erörterten Theorie der Fliess- und Bruchgefahr anzugeben, wie man die Art und den Grad der Gleichgewichtsstörung der inneren Kräfte in festen Körpern feststellen kann, d. h. die entscheidenden äusseren Merkmale der Anstrengung für irgendeine Beanspruchung eines festen Körpers durch mechanische Kräfte aufzuzeigen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe stützt man sich in der Regel auf die unserer räumlichen Anschauung entspringenden Begriffe des Spannungs- und Formänderungszustandes. Je nach der Art der Beziehung zwischen dem Spannungszustand und dem von diesem bewirkten Formänderungszustand hat man es mit einer elastischen Formänderung oder mit einer bei zäh sich verhaltenden Stoffen plastischen, auf Gleitungen beruhenden Verformung zu tun, auf deren Betrachtung wir uns im folgenden beschränken wollen. Dabei soll es sich um kompakte, quasiisotrope, metallische Vielkristallkörper handeln, deren Verhalten gegenüber den Beanspruchungen auf Zug und Druck (Bild 6) bis weit über die Fliessgrenze hinaus, gleich ist, wenn man die wirkende Kraft auf den jeweilig verformten Querschnitt bezieht und die zugeordneten Komponenten der bildsamen Verformung in sinngemässer Weise entsprechend der Gleichung

$$(1) \quad \delta = \int_1^l \frac{dl}{l} = \ln l$$

ermittelt werden (Bild 4).

Bei einem makroskopisch quasiisotropen Stoff, wenn auch die den Körper aufbauenden und regellos orientierten Kristallite mikroskopisch anisotrop sind, erzeugt der einaxige Zug

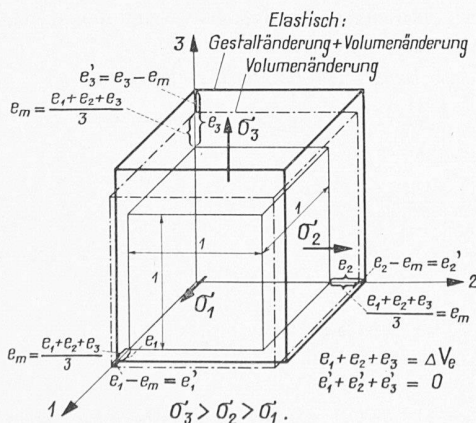


Bild 1. Formänderungszustand eines dreiaxig beanspruchten Körperelementes

<sup>1)</sup> Benennung seit Prof. P. Ludwig, Wien. Siehe Elemente der technologischen Mechanik, Berlin 1909.

<sup>2)</sup> Vorlesungen über Molekulardynamik und die Theorie des Lichts. Uebersetzt von B. Weinstein, Leipzig und Berlin 1909.

eine spezifische Dehnung in der Kraftrichtung von  $e = \sigma/E$  und gleichzeitig winkelmäßig dazu (Querrichtung) eine spezifische Verformung umgekehrten Vorzeichens von der Grösse  $-e/m$ . Die Stoffcharakteristik  $E$  ist der Young'sche Elastizitätsmodul in kg/cm<sup>2</sup> (oder in kg/mm<sup>2</sup>) und  $m$  die Poisson'sche Querdehnungszahl, die bei Metallen für elastische Formänderung zwischen 3 und 4 liegt und für die plastische Verformung 2 beträgt. Im Falle eines dreiaxigen Spannungszustandes kann man, solange die elastische Formänderung im Vergleich zu der ursprünglichen Längeneinheit klein ist, die Wirkungen der drei im Raum winkelmäßig aufeinander stehenden Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  einfach überlagern, so dass man für die spezifischen Hauptdehnungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  in den drei Hauptrichtungen die bekannten Elastizitätsgleichungen anschreiben kann:

$$(2) \quad \begin{aligned} e_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{mE} \\ e_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{mE} \\ e_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{mE} \end{aligned}$$

wobei die elastische Volumenänderung  $\Delta V_e = e_1 + e_2 + e_3$  beträgt<sup>3)</sup> (Bilder 1, 2 und 3).

Aus den drei gekoppelten linearen Gleichungen (2) können auch umgekehrt die drei Hauptspannungs-Komponenten  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  ermittelt werden, z. B. in Lamé'scher Schreibweise<sup>4)</sup>, wenn man die mittlere spezifische Dehnung  $e_m = 1/3 (e_1 + e_2 + e_3)$  setzt zu:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{3mE}{(m+1)(m-2)} e_m + \frac{mE}{m+1} e_1 \\ \sigma_2 &= \frac{3mE}{(m+1)(m-2)} e_m + \frac{mE}{m+1} e_2 \\ \sigma_3 &= \frac{3mE}{(m+1)(m-2)} e_m + \frac{mE}{m+1} e_3 \end{aligned}$$

\*

Die grundsätzlich anders geartete Aufspaltung des Spannungszustandes in einen ersten Teil, der nur reine Volumenänderung  $\Delta V_e$  verursacht und einen zweiten Teil, der ausschliesslich die Gestaltänderung zur Folge hat und für welchen die Volumenänderung = 0 ist, führt zu den nachfolgenden Elastizitätsgleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + \sigma_1' = \frac{mE}{m-2} e_m + \frac{mE}{m+1} e_1' \\ \sigma_2 &= \sigma_m + \sigma_2' = \frac{mE}{m-2} e_m + \frac{mE}{m+1} e_2' \\ \sigma_3 &= \sigma_m + \sigma_3' = \frac{mE}{m-2} e_m + \frac{mE}{m+1} e_3' \end{aligned}$$

wobei die Werte für  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  Funktionen von  $E, m, e_m$  und  $e'$  sind, während  $\sigma_m = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  gleich dem hydrostatischen Druck ist; hieraus ergeben sich die die reine Gestaltänderung erzeugenden Hauptspannungs-Komponenten zu:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2}{3} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - \sigma_m = \frac{2}{3} \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \\ \sigma_3' &= \sigma_3 - \sigma_m = \frac{2}{3} \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \end{aligned}$$

während die Komponenten der reinen Gestaltänderung sind:

$$e_1' = e_1 - e_m; \quad e_2' = e_2 - e_m; \quad e_3' = e_3 - e_m$$

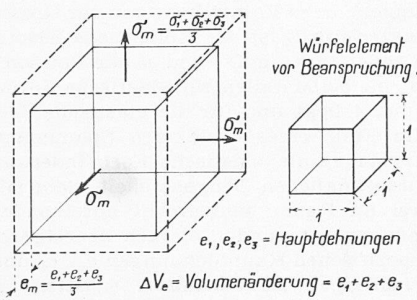
Die dazu symmetrische Aufspaltung des Formänderungszustandes nimmt die Form an:

<sup>3)</sup> Die gesamten Hauptdehnungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  eines durch die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  beanspruchten Würfelementes lassen sich zerlegen in die elastischen Anteile  $e_1, e_2$  und  $e_3$  und die plastischen Anteile  $\delta_1, \delta_2$  und  $\delta_3$  (siehe Gleichungen (2) und (11) und Bilder 2 und 3) somit  $e_n = e_n + \delta_n$ .

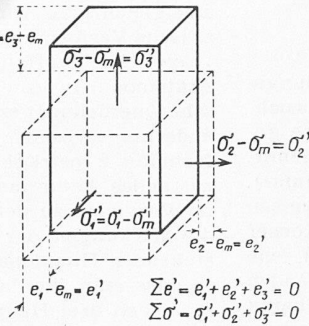
<sup>4)</sup> G. Lamé: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852; siehe auch A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität. Uebersetzt von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 121 und 640.

## Elastische Formänderung

Elastische Volumenänderung

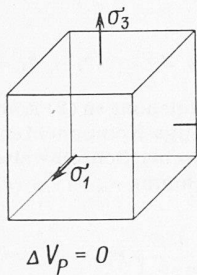


Elastische Gestaltänderung



## Plastische Verformung

Plastische Volumenänderung



Plastische Gestaltänderung

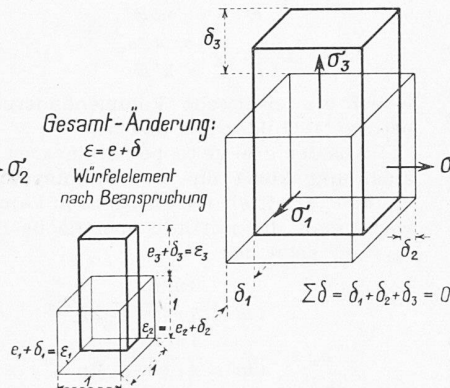


Bild 2. Gesamte Änderung des Körperelementes als Überlagerung der elastischen Formänderung und der plastischen Verformung

$$(6) \quad \begin{aligned} e_1 &= e_m + e'_1 = \frac{m-2}{mE} \sigma_m + \frac{m+1}{mE} \sigma'_1 \\ e_2 &= e_m + e'_2 = \frac{m-2}{mE} \sigma_m + \frac{m+1}{mE} \sigma'_2 \\ e_3 &= e_m + e'_3 = \frac{m-2}{mE} \sigma_m + \frac{m+1}{mE} \sigma'_3 \end{aligned}$$

Hier sind die Hauptdehnungs-Werte  $e_1, e_2$  und  $e_3$  Funktionen von  $E, m, \sigma_m$  und der  $\sigma'$ -Komponenten.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass die rechte Seite der Gleichungen (3) nicht etwa die beiden Anteile der Formänderungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  bedeutet, nämlich der reinen Volumenänderung  $\Delta V_e$  (Bilder 1 und 2), ausgedrückt durch  $e_1, e_2$  und  $e_3$  (erstes Glied) und der reinen Gestaltänderung, ausgedrückt durch die zugeordneten spezifischen Dehnungen  $e'_1 = e_1 - e_m, e'_2 = e_2 - e_m, e'_3 = e_3 - e_m$  (zweites Glied, Bild 2). Dies geht eindeutig aus der Tatsache hervor, dass sich die zweiten Glieder der Gleichungen (3) wie die gesamten elastischen Dehnungen  $e_1 : e_2 : e_3$  und nicht entsprechend den Gestaltänderungs-Anteilen  $e'_1 : e'_2 : e'_3$  verhalten, Gleichungen (4).

Trotz der äusseren Ähnlichkeit der Elastizitäts-Gleichungen (3) (Lamé) und (4) — reine Volumenänderung und Gestaltänderung — darf man sie nicht identifizieren, weil deren Bedeutung im einzelnen grundverschieden ist.

Für  $m = 10/3$  nehmen die beiden vorerwähnten Gleichungen (3) und (4) nachfolgende Werte an, nach Volumen- und Gestaltänderung getrennt:

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 2,5 E e_m + 0,77 E (e_1 - e_m) \\ \sigma_2 &= 2,5 E e_m + 0,77 E (e_2 - e_m) \\ \sigma_3 &= 2,5 E e_m + 0,77 E (e_3 - e_m) \end{aligned}$$

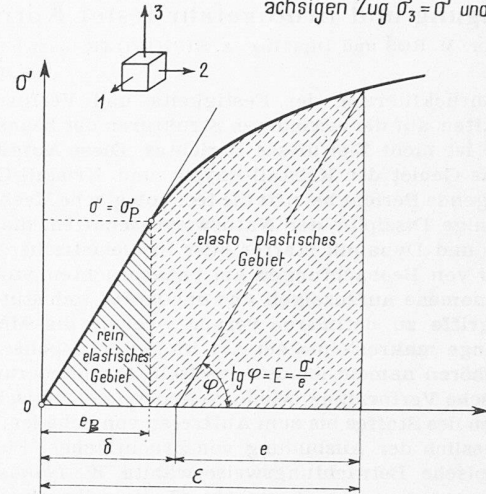
nach der Lamé'schen Schreibweise:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 1,73 E e_m + 0,77 E e_1 \\ \sigma_2 &= 1,73 E e_m + 0,77 E e_2 \\ \sigma_3 &= 1,73 E e_m + 0,77 E e_3 \end{aligned}$$

Der Unterschied ist offensichtlich.

\*

Spannungsdehnungs-Diagramm der gesamten Formänderung in einer Hauptrichtung, beispielsweise für einachsigen Zug  $\sigma'_3 = \sigma'$  und  $\sigma'_2 = \sigma'_1 = 0$



Elastizitätsgleichungen:

elastische Dehnungen

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{E} \left( \sigma'_3 - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{m} \right) \\ e_2 &= \frac{1}{E} \left( \sigma'_2 - \frac{\sigma'_3 + \sigma'_1}{m} \right) \\ e_1 &= \frac{1}{E} \left( \sigma'_1 - \frac{\sigma'_2 + \sigma'_3}{m} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$E = \text{Elastizitätsmodul} = \tan \varphi = \frac{\sigma'}{e}$

Volumenänderung  $\Delta V_e = e_1 + e_2 + e_3$

Plastizitätsgleichungen:

plastische Dehnungen

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{1}{D} \left( \sigma'_3 - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_3}{D} \\ \delta_2 &= \frac{1}{D} \left( \sigma'_2 - \frac{\sigma'_3 + \sigma'_1}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_2}{D} \\ \delta_1 &= \frac{1}{D} \left( \sigma'_1 - \frac{\sigma'_2 + \sigma'_3}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_1}{D} \end{aligned} \quad (2)$$

$D = \text{Plastizitätsmodul} = \tan \varphi = \frac{\sigma'_{\text{res}}}{\delta_{\text{res}}}$  — siehe Abb. 11 —

Volumenänderung  $\Delta V_p = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$

sonit nur reine Gestaltänderung.

Gesamte Dehnungen:  $\epsilon_3 = e_3 + \delta_3$  $\epsilon_2 = e_2 + \delta_2$  $\epsilon_1 = e_1 + \delta_1$ 

Bild 3. Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit der gesamten Formänderung in einer Hauptrichtung

In der Vergangenheit wurden verschiedene *Hypothesen* über jenen Teil des gesamten Spannungszustandes, der für die Anstrengung eines festen, quasiisotropen Werkstoffes wie Metall massgebend sein soll, aufgestellt, wobei der Beurteilung des Grenzzustandes eine bestimmte Anstrengung zu Grunde gelegt wurde. So wurde noch vor nicht allzulanger Zeit namentlich im Maschinenbau die sogenannte *Dehnungshypothese* als zutreffend angenommen, wonach die grösste positive Dehnung ( $+e_3$ ) für einen bestimmten Grenzzustand — wie Elastizitäts-, Proportionalitäts-, Fließ- oder Bruchgrenze — einen von der Art des Spannungszustandes unabhängigen, konstanten Kennwert des Werkstoffes gerade noch erreichen darf<sup>5)</sup>. Mit zunehmender Entwicklung und gesteigerten Anforderungen an die Bau- und Werkstoffe stellten sich in vermehrtem Masse und immer häufiger Unzulänglichkeiten dieser Hypothese ein, so dass man zu umfangreichen

<sup>5)</sup> C. Bach: «Elastizität und Festigkeit». Verlag Julius Springer, Berlin.

## Das Spannungs-Gesetz der plastischen Verformung.

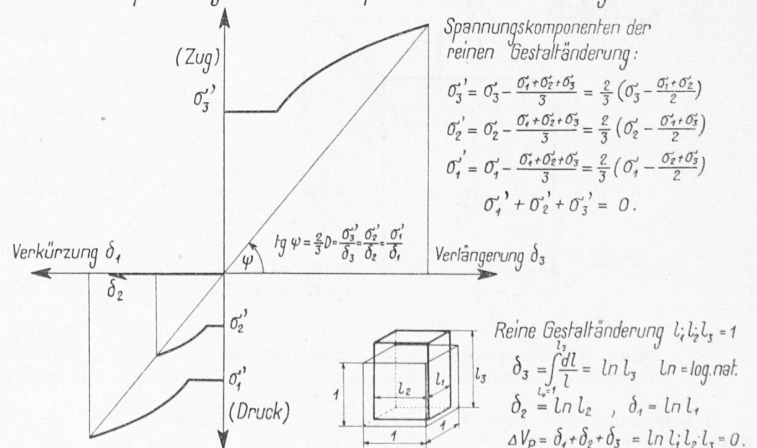


Bild 4. Das Spannungs-Dehnungs-Gesetz der plastischen Verformung



Versuchen schreiten musste, um zwischen den verschiedenen Hypothesen einen Entscheid treffen zu können.

Die an verschiedenen Forschungsinstituten durchgeführten Versuche<sup>6)</sup> haben die Dehnungshypothese eindeutig widerlegt, so dass sie als Plastizitätsbedingung bei metallischen Werkstoffen nicht mehr in Frage kommen kann. Greifen wir aus den Versuchsreihen nur drei typische und auch für die Praxis wichtige Spannungszustände heraus, nämlich den einaxigen Zug:

+  $\sigma_3$  ( $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$ )  
den zweiaxigen Zug:

+  $\sigma_3 = +\sigma_2$  ( $\sigma_1 = 0$ )  
den reinen Schub (Torsion)

+  $\sigma_3 = -\sigma_1$  ( $\sigma_2 = 0$ )

so erhält man als Verhältniszahlen nach dieser Hypothese und nach den Versuchen (Wirklichkeit) nachfolgende Werte (Bild 18, II. Teil):

|                               | einaxiger Zug | zweiaxiger Zug | reiner Schub |
|-------------------------------|---------------|----------------|--------------|
| Dehnungshypothese (gerechnet) | 1             | 1,43           | 0,77         |
| Wirklichkeit (beobachtet)     | 1             | 1              | 0,58         |
| Unterschied                   | 0             | + 43 %         | + 33 %       |

Bild 5. Darstellung des allgemeinen Spannungszustandes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  mit Hilfe der Normalspannung  $\sigma_n = \sigma_m$  und der Schubspannung  $\tau_0$  der Oktaederebene

Zahlreiche, sehr sorgfältig ausgeführte Versuche<sup>6)</sup> haben erwiesen, dass die zahlenmässigen Ergebnisse für die bildsame Verformung von Metallen praktisch genau mit der Hypothese von Maxwell-Huber-v. Mises-Haigh-Hencky<sup>7)</sup>

<sup>6)</sup> M. Roß und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Bruchgefahr. «Diskussionsberichte der EMPA», Zürich: Nr. 14, I. Flusstahl. September 1926; Nr. 28, II. Nichtmetallische Stoffe, Juni 1928; Nr. 34, III. Metalle, Februar 1929. — W. Lode: Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. «Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.» 5 (1925), Heft 2 u. «Zeitschrift für Physik» 36 (1926), Heft 11/12 sowie «Forschungsarbeiten Ing. Wes, VDI», Heft 303 (1928). — E. Siebel und A. F. Maier: Einfluss des Spannungszustandes auf das Formänderungsvermögen, «Mitt. MPA, Stuttgart», VDI-Verlag, 1935. — A. L. Nadai: The flow of metals under various stress conditions. «Inst. Mech. Eng.», Appl. Mech., Proc. 1947, Vol. 157, p. 121–160.

<sup>7)</sup> J. C. Maxwell in einem Brief an W. Thomson (Lord Kelvin) vom 18. Dez. 1856, siehe F. van Iterson: «Traité de plasticité», 2. éd., Liège-Paris (1947), S. 85. — M. T. Huber: «Czasop. Techn.», Lwow, 1904, siehe auch neuerdings: Teoria Sprezystosci, Tom I, Krakow, 1948, S. 137. —

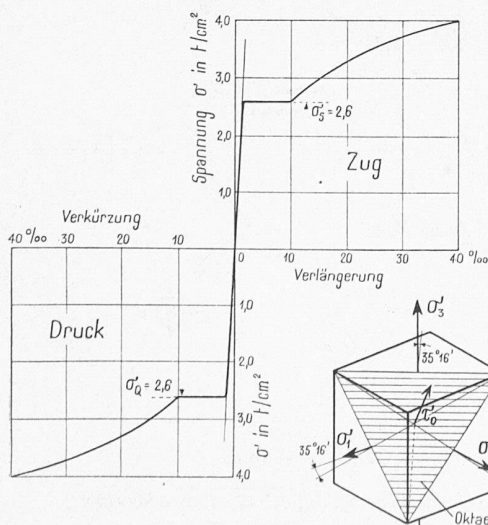
übereinstimmen, laut welcher die reine Gestaltänderungs-Energie an der Fließgrenze — unabhängig von der Art des Spannungszustandes — einen unveränderlichen, Materialkennwert aufweisen soll (Bilder 9 und 10). Diese durch wohlgedachte Versuche gestützte Hypothese liegt heute der Theorie der Anstrengung fester Körper mit Gleitungsbruch (vorwiegend Metalle) zu Grunde.

#### I. Die EMPA-Anstrengungs-Theorie der Konstanz der resultierenden Schubspannung bzw. der Schwerpunkts-Verschiebung der Oktaederfläche des Würfelementes

Die vorerwähnten EMPA-Versuche (Fussnote 6) mit polykristallinen, quasihomogenen und quasiisotropen metallischen Werkstoffen, deren Zug-Dehnungs- und Druck-Stauchungs-Diagramm übereinstimmenden Verlauf aufweisen (Bild 6) und deren Verformungsmechanismus ausschliesslich bzw. vorwiegend auf Gleitungen beruht, wie normaler Konstruktionsstahl, sowie später ausgeführte Versuche mit den Leichtmetallen Avional «M» und Anticorodal «B» ergaben bei ein-, zwei- und dreiaxiger Beanspruchung die praktische Uebereinstimmung der Diagramme der Vergleichsspannung  $\sigma_{res}$  und der Vergleichsdehnung  $\delta_{res}$  (Bilder 9 und 10) für das Gebiet der plastischen Verformung mit der Theorie. Dabei unterscheiden sich  $\sigma_{res}$  und  $\delta_{res}$  nur durch an sich frei wählbare Faktoren

R. von Mises: «Göttinger Nachrichten», 1913, S. 582. — B. P. Haigh: «Engineering» 109 (1920), S. 158. — H. Hencky: «Z. ang. Math. u. Mechanik» 5 (1924), S. 323, s. auch P. Malaval: «Mémoires de l'Artillerie Française», Bd. III, H. 3 (1924), S. 803, 48.

Stahl „N“



Schubspannung in der Oktaeder-Ebene:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

Vergleichsspannung an der Fließgrenze:

$$\sigma_{res} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \text{konst.}$$

Vergleichsdehnung an der Fließgrenze:

$$\delta_{res} = \frac{2}{3} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_3 - \delta_3\delta_1} = \text{konst.}$$

Normalspannung

$$\text{der Oktaeder-Ebene: } p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  = Hauptspannungen

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  = plastische Hauptdehnungen

Schubspannung der Oktaederebene

$\tau_0$  - Polfigur ist ein Kreis

Spannungs-Zustand an der Fließgrenze:

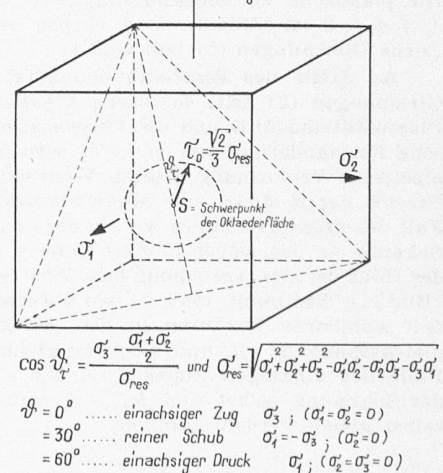


Bild 7. Orientierung der Schubspannung  $\tau_0$  in der Oktaederebene

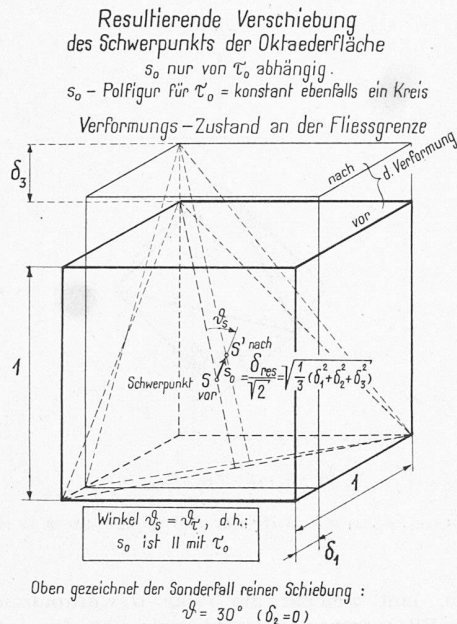


Bild 8. Plastische Verschiebung  $s_0$  des Schwerpunktes der Oktaederfläche in Richtung der Schubspannung  $\tau_0$

von der Schubspannung  $\tau_0$  und von der Schwerpunktverschiebung  $s_0$  der Oktaederfläche (Bilder 5 bis 8), deren Normale den gleichen Winkel mit den drei Hauptrichtungen einschliesst.

Die Normalspannung dieser Oktaederebene:  $\sigma_n = \sigma_m = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  (Bilder 5 und 6) bewirkt lediglich eine elastische Volumenänderung, die gemäss Versuchen ohne Einfluss auf die plastische Verformung ist, wogegen die Schubspannung dieser Ebene

$$(9) \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

nebst einer elastischen, auch eine plastische Verschiebung in der selben Ebene und Richtung wie  $\tau_0$  (Bild 7 und 8) zur Folge hat, und zwar im Betrage von:

$$(10) \quad s_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_3 - \delta_3 \delta_1}$$

worin  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  die Komponenten der plastischen Verformung (plastische Hauptdehnungen) bedeuten<sup>3)</sup>, nämlich:

$$(11) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{D} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma_1'}{D} \\ \delta_2 &= \frac{1}{D} \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma_2'}{D} \\ \delta_3 &= \frac{1}{D} \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\sigma_3'}{D} \end{aligned} \quad (\text{Bilder 2 und 3})$$

Die plastische Volumenänderung  $\Delta V_p$  ist gleich 0, da  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$  ist (Bild 2). Und ebenso ist  $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$  (siehe Gleichungen (5) und Bild 4).

An Stelle des Elastizitätsmoduls  $E$  in den Elastizitätsgleichungen (2) tritt in diesen Plastizitätsgleichungen der Plastizitätsmodul  $D$  und die Poisson'sche Zahl für die elastische Formänderung von  $m \cong 10/3$  wird durch  $m = 2$  für die plastische Verformung ersetzt. Während aber im elastischen Bereich der  $E$ -Modul eine Materialkonstante war, indem im Fall des einaxigen Zuges sowohl die Tangente  $d\sigma/de$ , wie die Sekante  $\sigma/e$  den selben  $E$ -Wert lieferte, ist der  $D$ -Modul von der Höhe der Beanspruchung bzw. Anstrengung  $\sigma_{res}$  abhängig (Bild 11). Bestimmt man — wie vorerwähnt — die an sich frei wählbaren Faktoren in den Ausdrücken für die Vergleichsspannung  $\sigma_{res}$  und Vergleichsdehnung  $\delta_{res}$ , so dass im Falle des einaxigen Zuges  $\sigma_3$  ( $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$ );  $\sigma_{res} = \sigma_3$  somit der Spannung selbst und  $\delta_{res} = \delta_3$  und damit der Dehnung selbst gleich werden, nämlich:

$$(12) \quad \sigma_{res} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

und

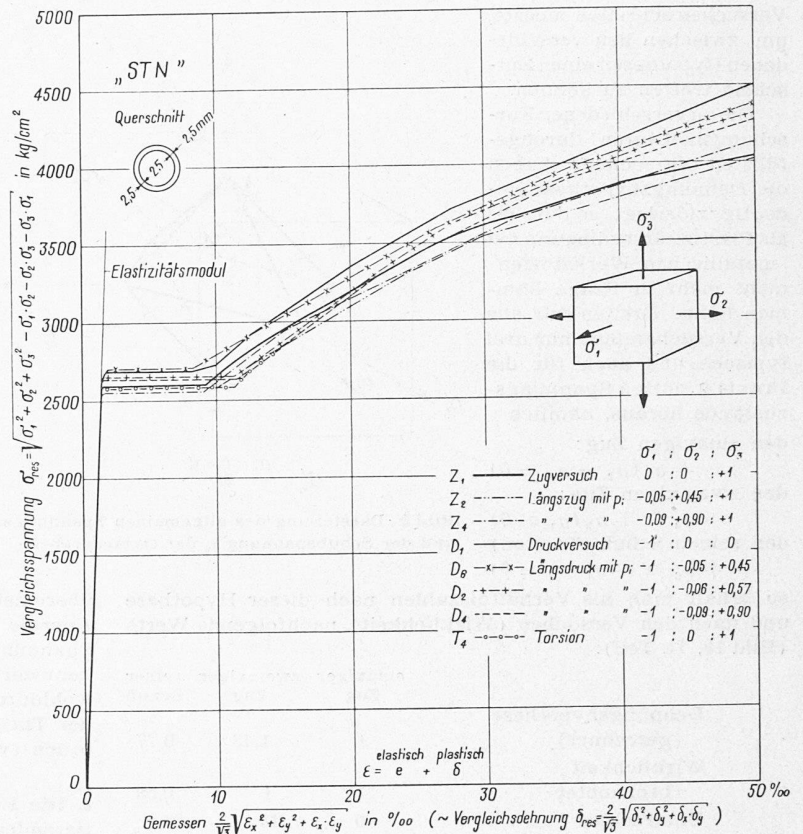
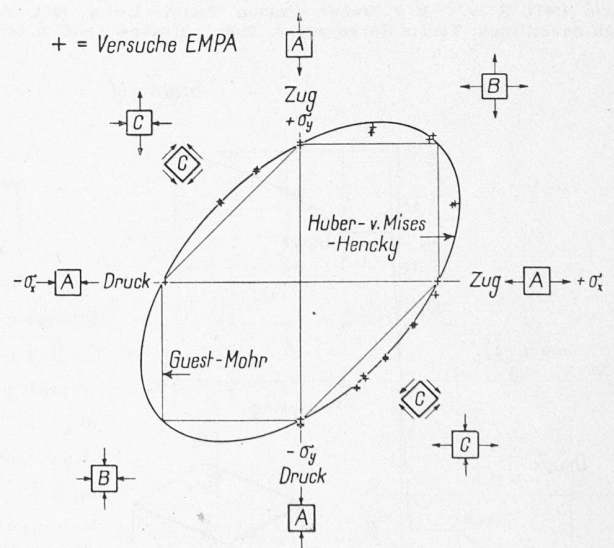


Bild 9. Gemessene Fließkurven  $\delta_{res}$  als Funktion von  $\sigma_{res}$ . Versuche EMPA mit Flusstahl (1926)

$$(13) \quad \delta_{res} = \frac{2}{3} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_3 - \delta_3 \delta_1}$$

so lässt sich der den verschiedenen Anstrengungszuständen auch oberhalb der Fließgrenze zugeordnete Plastizitätsmodul  $D$  bestimmen aus der Beziehung

$$(14) \quad D = \frac{\sigma_{res}}{\delta_{res}} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}}{\frac{2}{3} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_3 - \delta_3 \delta_1}} = \frac{\sigma_{einaxig}}{\delta_{einaxig}} \quad (\text{Bild 11})$$



$$\text{Guest-Mohr: } \tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \text{konstant.}$$

$$\text{Huber-v. Mises-Hencky: } \sigma_{res} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} = \text{konstant.} \quad (\text{bei } \sigma_3 = 0)$$

Bild 10. Fließgrenzen bei zweiachsigen Spannungszuständen, an Flusstahl ermittelt



was demnach schon an Hand des einaxigen Zugversuches allein geschehen kann.

Diese EMPA-Theorie der resultierenden Verschiebung in der Form der eindeutigen Zuordnung von  $\delta_{res} = f(\sigma_{res})$ , die durch eingehende EMPA-Versuche als zutreffend ausgewiesen wurde, ist eine Weiterführung des Coulomb-Mohr'schen Grundgedankens\*) unter Einbeziehung der mittleren Hauptspannung  $\sigma_2$ , deren Einfluss auf die bildsame Verformung gemäss den angeführten Versuchsergebnissen nicht vernachlässigt werden darf.

Zwei Körper befinden sich im gleichen Anstrengungszustand, wenn die Werte der Vergleichsspannung  $\sigma_{res}$  und damit auch  $\delta_{res}$  einander gleich sind (Bild 12). Jedem Wert

\*) Ch. A. Coulomb: Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture. «Mémoires de Mathem. et de Phys.», présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savants. Année 1773, Paris 1776, S. 343/82. — O. Mohr: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials. «Z. VDI» (1900), S. 1524; Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Zweite Auflage. Berlin, 1914.

## Das Kraftwerk Plons-Mels

Nach Mitteilungen von Oberingenieur A. L. CAFLISCH, Zürich; Ing. K. J. FETZ, Zürich und Obering. W. SCHÜEPP, Zürich; zusammengefasst von Dipl. Ing. A. OSTERTAG

### 1. Vorarbeiten

Ausser der Seez befinden sich im sehr ausgedehnten Gebiet der Gemeinde Mels verschiedene Bergbäche, die dem grossen Hochplateau zwischen dem Seetal und dem bei Flums ausmündenden Schulstal entspringen und schon Ende des letzten Jahrhunderts als ausbauwürdige Wasserkräfte erkannt worden sind. So reichte bereits am 14. Juli 1897 die Firma Oskar Neher & Cie. A.-G., Plons-Mels, ein erstes Konzessionsgesuch für die Verwertung der Schmelzibach-Wasserkräfte an das Justizdepartement des Kantons St. Gallen ein.

Aber auch die Gemeinde Mels interessierte sich an einer möglichst rationellen Ausnützung dieser in ihrem Gebiet liegenden Wasserkräfte. Ihr erstes Konzessionsbegehren datiert vom 28. August 1913. Sie liess durch kompetente Fachleute die günstigsten Möglichkeiten eingehend untersuchen und verfolgte mit Geschick und Umsicht ihre diesbezüglichen Bauvorhaben.

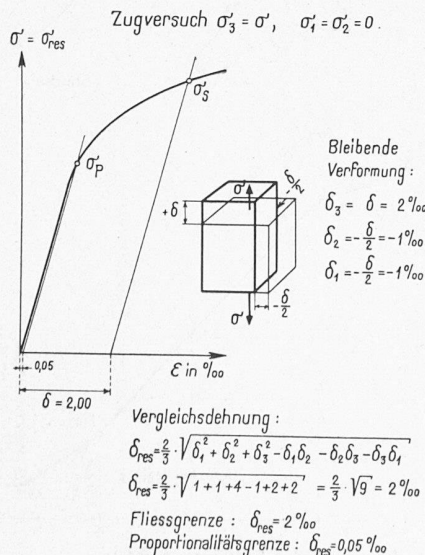


Bild 13a. Vergleichsdehnung  $\delta_{res}$  bei einaxigem Zug

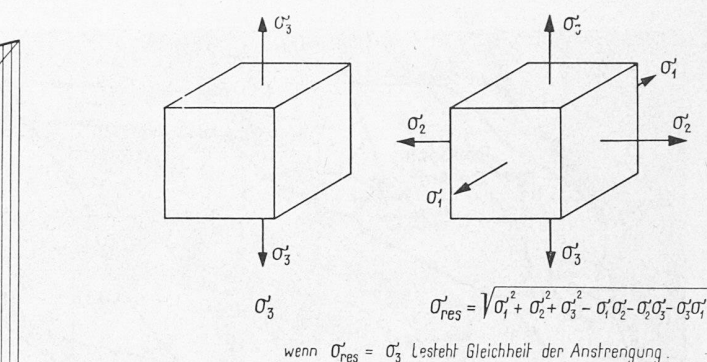


Bild 12. Das Mass der Anstrengung für den allgemeinen Spannungszustand

der Vergleichsspannung  $\sigma_{res}$  ist ein nur vom Material abhängiger Wert der plastischen Vergleichsdehnung  $\delta_{res}$  zugeordnet, was die Ermittlung der gleichwertigen Verformungsgrenzen, z. B. der sogenannten 2‰-Grenze (Fließgrenze) für verschiedene Spannungszustände ermöglicht (Bilder 13a und 13b).

Das gesamte Spannungs-Verformungsgebiet und damit die Anstrengung sich zähl verhaltender Körper, deren Verformungsmechanismus auf Gleitungen beruht, wird dadurch in bezug auf die Gleichwertigkeit bzw. Zuordnung der Anstrengung und der am Körper wahrnehmbaren mechanischen Veränderungen im plastischen Gebiet von einem einheitlichen Gedanken beherrscht, der sinngemäss auch für das elastische Gebiet gilt (Bilder 9 und 10).

(Schluss folgt)

Als während des zweiten Weltkrieges die Nachfrage nach elektrischer Energie in der Schweiz stark anwuchs, beauftragte der Gemeinderat Mels im Spätherbst 1944 Ingenieur K. J. Fetz, beratender Ingenieur, Zürich, in Arbeitsgemeinschaft mit dem Ingenieurbureau Scheitlin & Hotz, St. Gallen, mit der Ausarbeitung eines generellen Vorprojektes, das dem technischen Fortschritt im Kraftwerkbau und der Lage auf dem Energiemarkt Rechnung trug. Die Projektbearbeiter sahen die Zusammenfassung des Lutzbaches, des Schmelzibaches, des Kohlschlagerbaches und des Röllbaches sowie die Erstellung eines Speicherbeckens vor (Bild 1, S. 388).

Nach langwierigen Verhandlungen mit verschiedenen Grossverbrauchern ist es schliesslich im Juni 1946 gelungen, mit den Nordostschweizerischen Kraftwerken A.-G. (NOK) einen Stromlieferungsvertrag abzuschliessen, in dem dieses Unternehmen sich zur restlosen Abnahme der über den Eigenbedarf der Gemeinde Mels hinausgehenden Energiemenge verpflichtete, unter der Bedingung, dass mit der Energielieferung am 1. Januar 1948 begonnen werde.

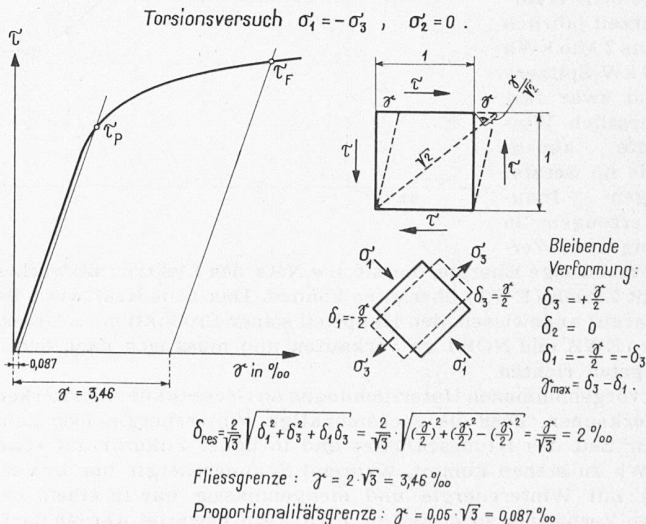


Bild 13b. Vergleichsdehnung  $\delta_{res}$  bei reinem Schub