

# Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies

Autor(en): **Favre, Henry / Gilg, Bernhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **68 (1950)**

Heft 20

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-58015>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies

DK 620.171.5

Suite et fin de la page 257

Par HENRY FAVRE, Professeur à l'E. P. F. et BERNHARD GILG, Assistant à l'E. P. F.

#### § 4. Application à une plaque carrée, reposant en trois points et supportant une force appliquée au centre.

Comme application de la méthode décrite au § 3, nous avons mesuré les moments dans une plaque carrée, de 190 mm de côté, reposant en trois points  $G_1, G_2, G_3$  et supportant au centre une force  $P = 20,29 \text{ kg}^{10}$ , conformément à la figure 11. Cette plaque était formée d'une couche de verre de 2,13 à 2,19 mm d'épaisseur et d'une couche d'allite de 5,65 à 5,93 mm d'épaisseur<sup>17</sup>. L'adhérence de ces deux couches a été obtenue en utilisant une colle de résine artificielle. La délicate opération du collage a été exécutée par l'Institut de Physique technique de l'E. P. F., comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

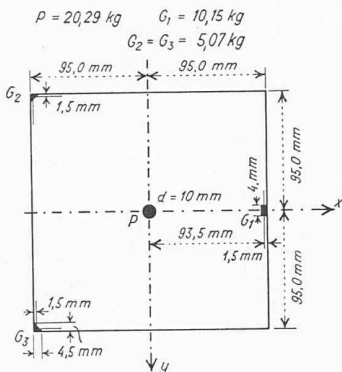


Fig. 11

Pour déterminer les coefficients  $A, B, C$  des équations (12) et (13), nous avons utilisé comme éprouvette une poutre simple de 188,0 mm de portée et de 20,0 mm de largeur, formée de deux couches aussi identiques que possible à celles de la plaque carrée<sup>18</sup>. Cette poutre simple a été chargée symétriquement par deux forces  $P$  égales, uniformément réparties sur la largeur (fig. 12)<sup>19</sup>.

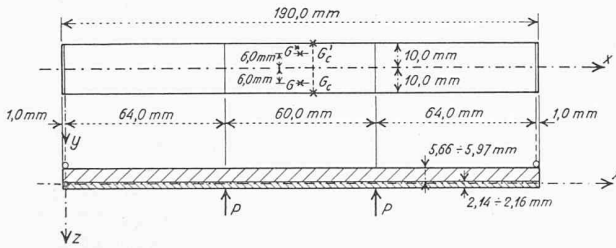


Fig. 12

Dans une telle éprouvette, les moments principaux avaient approximativement pour valeurs, dans la zone comprise entre les forces  $P$ :

$$\begin{cases} M_1 = M_x = \frac{P \cdot 64,0 \text{ mm}}{20,0 \text{ mm}} = 3,2 P, \\ M_2 = M_y = 0; \end{cases}$$

d'où, en introduisant ces valeurs dans les équations (12) et (13):

$$(18) \quad A = \frac{\delta_1}{3,2 P}, \quad B = \frac{\delta_2}{3,2 P}, \quad C = \frac{\delta_3}{3,2 P}.$$

Connaissant la grandeur commune des forces  $P$ , qui a varié de 0,729 kg à 1,638 kg et ayant mesuré les valeurs correspondantes de  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$  aux points symétriques  $G$  et  $G^*$  de l'éprouvette, nous avons déduit les valeurs approchées suivantes pour les coefficients:

<sup>10</sup> La surface de répartition de cette force était un cercle de 10 mm de diamètre.

<sup>17</sup> L'Allite CR 39 que nous avons utilisée est une résine artificielle de très bonne qualité, livrée en lames à faces planes parallèles et polies par l'Homalite Company, à Wilmington (Delaware, USA). L'excellente qualité des faces permet de faire de bonnes mesures à l'interféromètre. Ces lames peuvent également être utilisées en photoélasticité bidimensionnelle, comme le fait le Laboratoire du United States Bureau of Reclamation, à Denver (Colorado), qui a eu l'amabilité de nous rendre attentifs aux qualités exceptionnelles de cette matière.

<sup>18</sup> L'épaisseur du verre de l'éprouvette était de 2,14 à 2,16 mm, celle de l'allite, de 5,66 à 5,97 mm.

<sup>19</sup> Les réactions des appuis étaient également uniformément réparties sur la largeur.

$$(19) \quad \begin{cases} A = -0,3233 \lambda \text{ kg}^{-1}, \\ B = -0,4140 \lambda \text{ kg}^{-1}, \end{cases} \quad C = +0,0907 \lambda \text{ kg}^{-1}.$$

$\lambda = 0,5461 \mu$  (longueur d'onde de la lumière utilisée)

Ces valeurs étaient cependant trop inexactes pour être appliquées à l'étude de la plaque carrée, car la pièce fléchie utilisée comme éprouvette ayant un profil dont la largeur était beaucoup plus grande que la hauteur, il fallait s'attendre que  $M_1$  ne soit pas constant dans la largeur et que  $M_2$  n'y soit pas rigoureusement nul<sup>20</sup>. Des mesures de  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$ , faites en 9 points le long du profil  $G_c G'_c$ , confirmèrent ce point de vue. Elles sont résumées dans la figure 13.

Pour tirer de ces dernières mesures des valeurs plus exactes de  $A, B, C$ , nous avons procédé comme suit. Soient  $F_{\delta_1}, F_{\delta_2}$  et  $F_{\delta_3}$  les aires des surfaces définies par les courbes représentant respectivement  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$ . On a, en appliquant les relations (13):

$$F_{\delta_1} = \int \delta_1 dy = \int A M_1 dy + \int B M_2 dy = A \cdot M_{1 \text{ tot}} + B \cdot M_{2 \text{ tot}},$$

$$(20) \quad F_{\delta_1} = A \cdot M_{1 \text{ tot}} + B \cdot M_{2 \text{ tot}},$$

et de même:

$$(21) \quad F_{\delta_2} = B \cdot M_{1 \text{ tot}} + A \cdot M_{2 \text{ tot}},$$

$M_{1 \text{ tot}}$  et  $M_{2 \text{ tot}}$  désignant les intégrales  $\int M_1 dy$  et  $\int M_2 dy$  relatives à la largeur totale du profil.

D'autre part, en désignant respectivement par  $\delta_{1c}, \delta_{2c}$  et  $\delta_{3c}$  les variations de marche au point  $G_c$  (ou  $G'_c$ ) situé sur le contour de l'éprouvette et par  $M_{1c}$  ( $= M_x$ ) et  $M_{2c}$  ( $= M_y$ ) les moments principaux en ces points, on a, en remarquant encore que  $M_{2c} = 0$ :

$$\delta_{1c} = A \cdot M_{1c}, \quad \delta_{2c} = B \cdot M_{1c},$$

d'où:

$$(22) \quad \frac{A}{B} = \frac{\delta_{1c}}{\delta_{2c}} = k.$$

On tire des relations (20), (21) et (22), en éliminant  $M_{2 \text{ tot}}$  qui est inconnu:

$$(23) \quad \begin{cases} A = \frac{k F_{\delta_1} - F_{\delta_2}}{(k - \frac{1}{k}) M_{1 \text{ tot}}}, & B = \frac{F_{\delta_1} - \frac{1}{k} F_{\delta_2}}{(k - \frac{1}{k}) M_{1 \text{ tot}}}, \\ \text{d'où } C = A - B = \frac{(k - 1) F_{\delta_1} + (\frac{1}{k} - 1) F_{\delta_2}}{(k - \frac{1}{k}) M_{1 \text{ tot}}}. \end{cases}$$

En introduisant dans ces trois formules les valeurs connues de  $M_{1 \text{ tot}} = 3,2 P$  et les valeurs mesurées de  $k = \frac{\delta_{1c}}{\delta_{2c}}$ ,  $F_{\delta_1}$  et  $F_{\delta_2}$ <sup>21</sup>), nous avons obtenu pour les coefficients  $A, B, C$  les valeurs beaucoup plus exactes indiquées dans le tableau suivant:

<sup>20</sup> Ces anomalies proviennent de la dilatation latérale des différentes couches élémentaires.

<sup>21</sup> Pour obtenir la plus grande précision possible, nous avons amélioré, par la méthode des moindres carrés, les valeurs mesurées de  $\delta_{1c}, \delta_{2c}, \delta_{3c}$  ainsi que les valeurs de  $F_{\delta_1}, F_{\delta_2}, F_{\delta_3}$  (obtenues en planimétrant les diagrammes de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ), en s'appuyant sur les deux relations évidentes

$$\delta_{1c} - \delta_{2c} - \delta_{3c} = 0 \text{ et } F_{\delta_1} - F_{\delta_2} - F_{\delta_3} = 0.$$

	A (λ kg <sup>-1</sup> )	B (λ kg <sup>-1</sup> )	C (λ kg <sup>-1</sup> )
Pour P = 1,191 kg:	-0,2816	-0,3678	+0,0862
Pour P = 1,647 kg:	-0,2719	-0,3569	+0,0850
Moyennes arithm.:	-0,2768	-0,3624	+0,0856

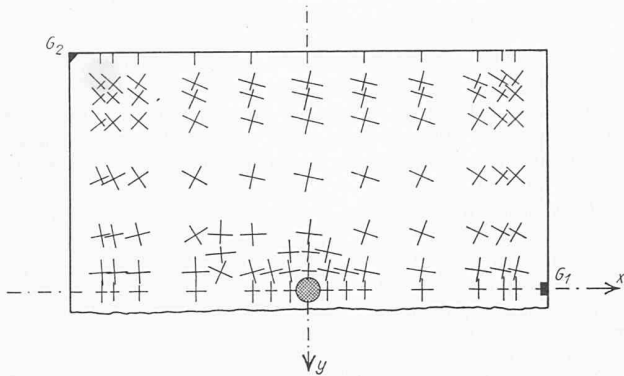


Fig. 14. Directions principales de la plaque fléchie de la figure 11

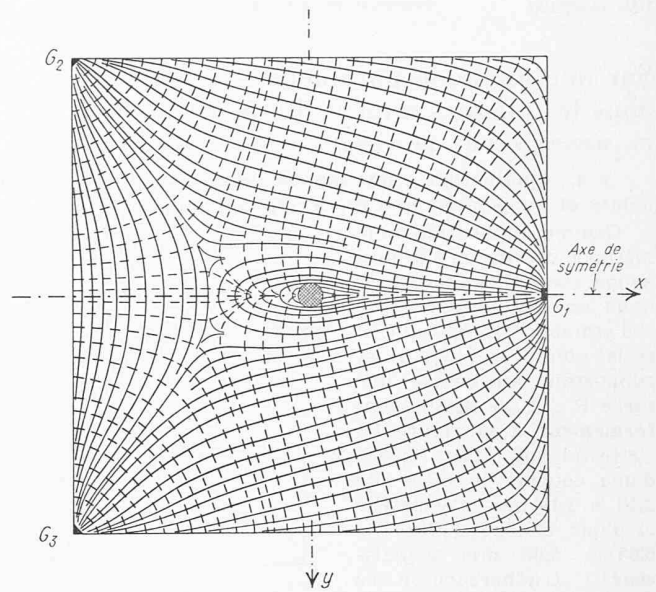


Fig. 15. Trajectoires des moments principaux de la plaque fléchie de la figure 11

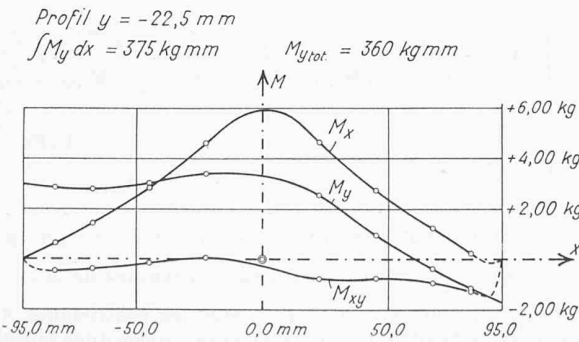
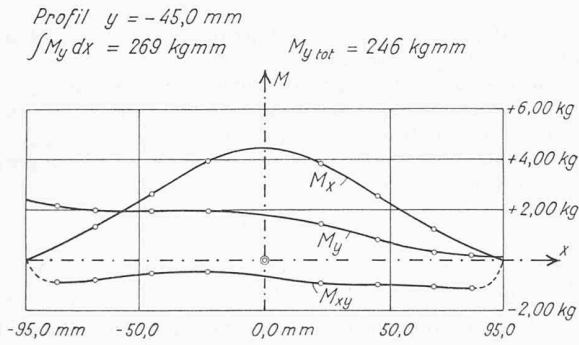
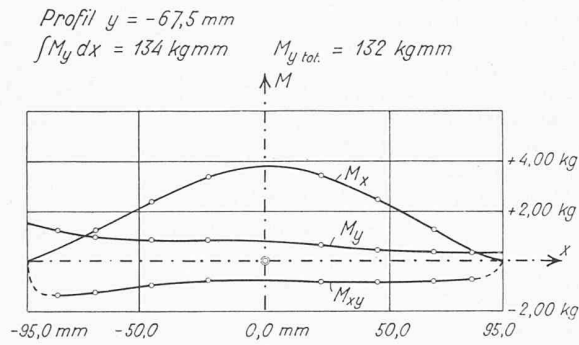
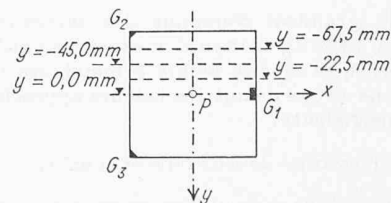
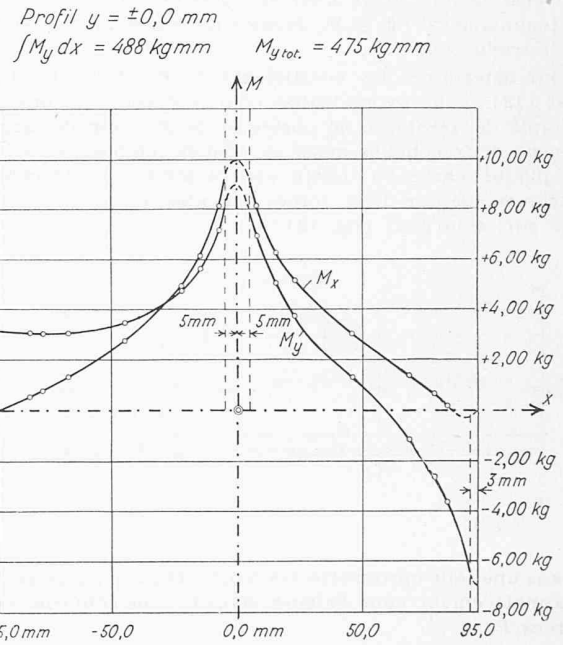


Fig. 18. Diagrammes des moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe  $x$



Les mesures de  $\alpha$  et de  $\delta_3$  dans la plaque carrée de la figure 11 n'ont donné lieu à aucune difficulté particulière. Elles ont été effectuées en 114 points, disposés symétriquement par rapport à l'axe  $x$ . On a ensuite pris les moyennes arithmétiques des valeurs correspondant aux points symétriques.

Les mesures des variations absolues de marche  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  ont été plus délicates à exécuter à cause de l'inclinaison de la surface élastique produite par la déformation de la plaque. Cette inclinaison était en effet une cause d'erreurs pour les mesures de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Ces erreurs, négligeables dans la partie centrale, où la pente était faible, devenaient sensibles en de-

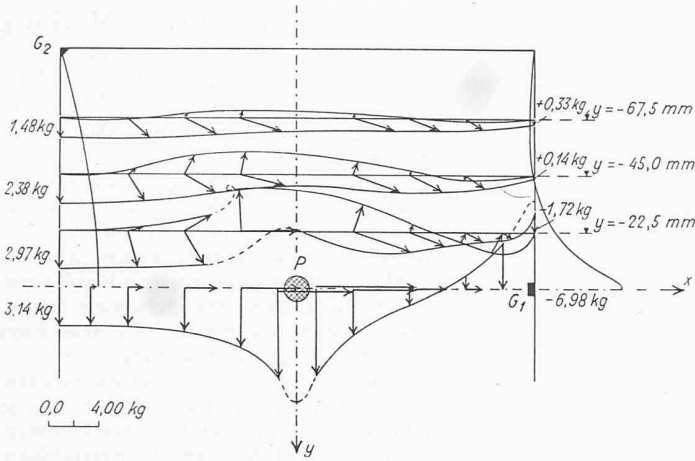


Fig. 16. Diagrammes des moments principaux pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe x

Fig. 17 (à droite) idem pour les profils parallèles à l'axe y

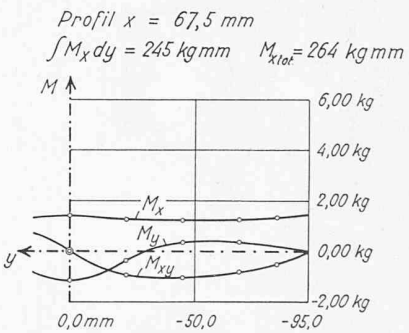
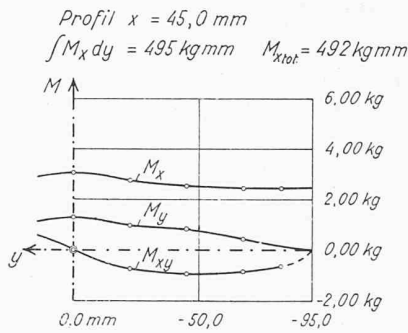
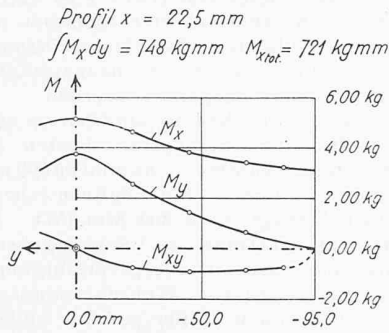
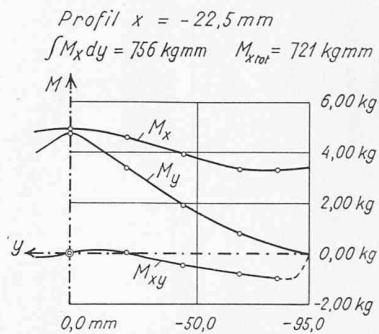
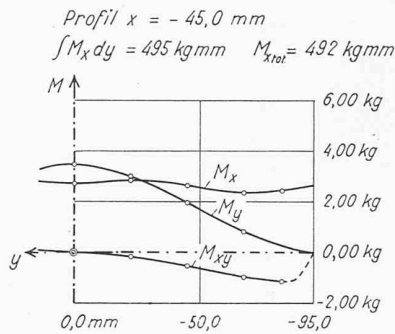
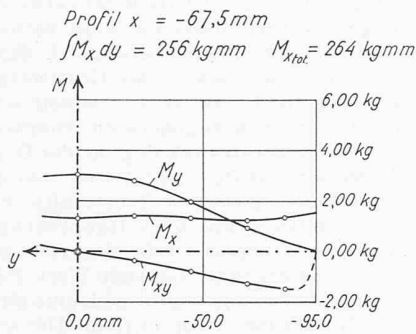
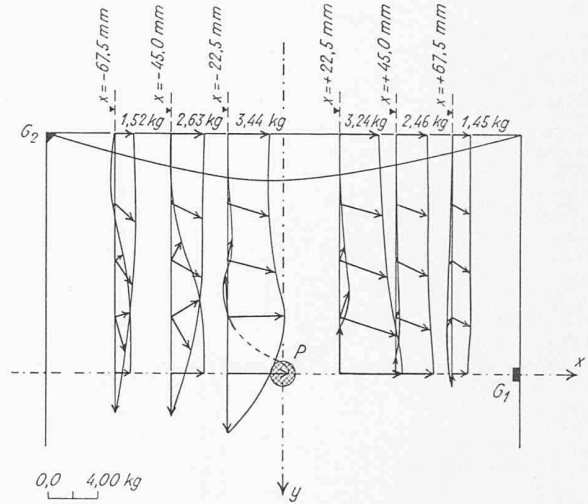
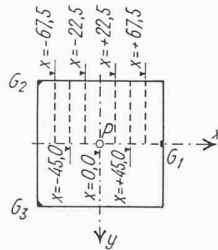


Fig. 19. Diagrammes des moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe y



hors de cette zone<sup>22</sup>). Pour les éliminer, nous avons répété chaque mesure à l'interféromètre, en tournant de 180° la plaque dans son plan et pris la moyenne arithmétique des deux résultats. Ces mesures ont été effectuées en 58 points, répartis symétriquement par rapport à l'axe x. Nous avons pris ensuite les moyennes des valeurs correspondant aux points symétriques.

La figure 14 montre les directions principales et la figure 15, les trajectoires des moments principaux, qui ont été construites à l'aide de ces directions, en utilisant un papier calque.

Les figures 16 et 17 montrent les diagrammes des moments principaux, déduits des mesures de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$  en appliquant les formules (16)<sup>23</sup>, <sup>24</sup>).

<sup>22</sup>) Il a même été impossible de faire les mesures de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  en certains points voisins du contour, où les franges données par l'interféromètre changeaient trop fortement de direction pendant la mise en charge de la plaque.

<sup>23</sup>) Les coefficients de ces équations avaient les valeurs

$$R_{11} = -0,7005 \frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{21} = -0,8641 \frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{31} = 5,7587 \frac{\text{kg}}{\lambda},$$

$$R_{12} = -0,8641 \frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{22} = -0,7005 \frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{32} = -5,7587 \frac{\text{kg}}{\lambda}.$$

Enfin, à titre de vérification, nous avons calculé à l'aide des formules (7) les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  pour un certain nombre de profils. Ces moments sont représentés dans les figures 18 et 19. En planimétrant les diagrammes  $M_y$  des profils parallèles à l'axe x et ceux,  $M_x$ , des profils parallèles à y, on devrait obtenir les valeurs des moments totaux  $M_{y\text{tot}}$  et  $M_{x\text{tot}}$  relatifs à ces profils. Or ces moments sont uniquement fonctions des forces extérieures connues et peuvent se calculer directement.

La comparaison des valeurs planimétrées  $\int M_y dx$  et  $\int M_x dy$ , à celles calculées directement  $M_{y\text{tot}}$  et  $M_{x\text{tot}}$ , indiquées à côté des diagrammes en question, est très satisfaisante, si l'on tient en considération qu'il s'agit d'une première série de mesures.

Nous nous proposons, dans la suite, d'étudier systématiquement les différentes causes d'erreurs de cette nouvelle méthode, d'une part en vue d'augmenter l'exactitude de ses résultats, d'autre part afin de déterminer son domaine d'application pratique.

Zurich, le 30 mars 1950.

<sup>24</sup>) Les flèches indiquées dans ces diagrammes ont des longueurs proportionnelles aux moments  $M_1$  ou  $M_2$ . Leurs directions et leurs sens sont ceux des tensions principales  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  aux points de la face inférieure de la plaque. Les diagrammes du moment de flexion le long du contour de la plaque ont été également dessinés dans les figures 16 et 17, en reportant la valeur de ce moment perpendiculairement au contour.