

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 74 (1956)  
**Heft:** 46

**Artikel:** Lineare Torsionsschwingungen mit starker Dämpfung  
**Autor:** Chen, Yian-Nian  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-62741>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Lineare Torsionsschwingungen mit starker Dämpfung

DK 621-752

Professor Dr. Gustav Eichelberg zu seinem 65. Geburtstag am 21. November gewidmet

von Ing. Dr. Yian-Nian Chen, Gebrüder Sulzer, Winterthur

In meiner früheren Arbeit <sup>1)</sup>, wurde ein graphisches Verfahren zur Lösung linearer Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Dämpfung und der Masse der elastischen Glieder entwickelt. Die Arbeit beschränkt sich auf kleine Dämpfungen der elastischen Glieder und auf Erregung an nur einer am Ende des Systems liegenden Drehmasse. Für Erregung an mehr als zwei Drehmassen musste mit Charakteristiken operiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass das Verfahren sich auf starke Dämpfung und Erregung an beliebig vielen Drehmassen verallgemeinern lässt.

## 1. Mehrmassensysteme mit Erregung an einer beliebigen Drehmasse

Bild 1 zeigt ein schwingungsfähiges System mit  $n$  Leitungsteilen und  $n + 1$  Drehmassen sowie folgenden Bezeichnungen:

- $\Theta_j, R_j$  = Massenträgheitsmoment bzw. Reibungsbeiwert der Drehmasse  $j$ ;
- $\vartheta_j, r_j$  = Massenträgheitsmoment bzw. Reibungsbeiwert je Längeneinheit des Leitungsteils  $j$ ;
- $k_j = J_j G_j$  = Profilwert des Leitungsteils  $j$ , wobei  $J_j$  das polare Flächenträgheitsmoment des Querschnittes des Leitungsteils  $j$  und  $G_j$  dessen Gleitmodul sind;
- $M_j e^{i\omega t}$  = Erregungsdrehmoment auf die Drehmasse  $j$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$ ;
- $\varphi_j$  = Drehwinkel des Leitungsteils  $j$ ;
- $t$  = Zeit

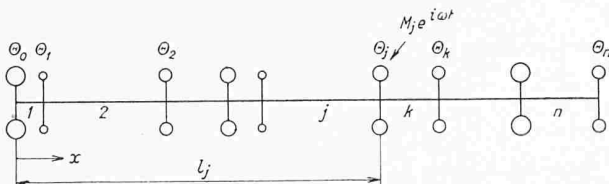


Bild 1:  $(n + 1)$ -Massensystem mit Erregung an der einzigen Masse  $j$ .

Die Dämpfung des Systems wird als proportional der Winkelgeschwindigkeit angenommen. Für einen beliebigen Leitungsteil  $j$  gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} + \frac{r_j}{\vartheta_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} - \frac{J_j G_j}{\vartheta_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} = 0$$

deren Lösung lautet

$$\varphi_j = A_j e^{i(\omega t + \omega x/c_j + \alpha_j)} + B_j e^{i(\omega t - \omega x/c_j + \beta_j)}$$

Hierbei sind  $A_j, B_j, \alpha_j, \beta_j$  die Integrationskonstanten und  $c_j$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Torsionswellen. Nach Einsetzen von  $\varphi_j$  in die partielle Differentialgleichung folgt <sup>2)</sup>

$$c_j = \sqrt{\frac{J_j G_j}{\vartheta_j} \frac{1}{1 + \frac{r_j^2}{\omega^2 \vartheta_j^2}}} \sqrt{1 + i \frac{r_j}{\omega \vartheta_j}}$$

<sup>1)</sup> Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder, «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik» Bd. 5, S. 293-316, 1954

<sup>2)</sup> S. 295 in der unter <sup>1)</sup> genannten Arbeit

Diese Formel vereinfacht sich unter Einführung der Ausdrücke

$$\operatorname{tg} \psi_j = \frac{r_j}{\omega \vartheta_j} \quad \text{und} \quad c_j^* = \sqrt{\frac{J_j G_j}{\vartheta_j}}$$

zu

$$c_j = c_j^* \sqrt{\cos \psi_j} \left( \cos \frac{\psi_j}{2} + i \sin \frac{\psi_j}{2} \right)$$

Der reziproke Wert von  $c_j$  wird dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_j} &= \frac{1}{c_j^*} \frac{1}{\sqrt{\cos \psi_j}} \left( \cos \frac{\psi_j}{2} - i \sin \frac{\psi_j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{c_j^*} (a_j - i b_j) \end{aligned}$$

mit den beiden Grössen  $a_j$  und  $b_j$ :

$$a_j = \frac{\cos \frac{\psi_j}{2}}{\sqrt{\cos \psi_j}}, \quad b_j = \frac{\sin \frac{\psi_j}{2}}{\sqrt{\cos \psi_j}}$$

Die Lösung für  $\varphi_j$  wird

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi_j(x, t) &= A_j e^{u_j x} e^{i(\omega t + v_j x + \alpha_j)} + \\ &+ B_j e^{-u_j x} e^{i(\omega t - v_j x + \beta_j)} = \\ &= (\mathbf{A}_j e^{z_j x} + \mathbf{B}_j e^{-z_j x}) e^{i\omega t} = \\ &= \hat{\varphi}_j e^{i\omega t} \end{aligned}$$

mit dem Ausdruck Impedanz  $z_j$ :

$$z_j = u_j + i v_j = \frac{b_j \omega}{c_j^*} + i \frac{a_j \omega}{c_j^*}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= A_j e^{i\alpha_j} & \mathbf{B}_j &= B_j e^{i\beta_j} \\ \hat{\varphi}_j &= \mathbf{A}_j e^{z_j x} + \mathbf{B}_j e^{-z_j x} \end{aligned}$$

Die komplexen Grössen  $\mathbf{A}_j$  und  $\mathbf{B}_j$  sind die Intensität der nach links bzw. rechts wandernden Teilwelle und  $\hat{\varphi}_j$  die Amplitude der sich aus  $\mathbf{A}_j$  und  $\mathbf{B}_j$  bildenden stehenden Welle. Somit ist die Gleichung (1) ohne jede Konzession an die Dämpfung abgeleitet und gilt ganz allgemein.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nur der reelle Teil von  $c$ , nämlich  $c^* \sqrt{\cos \psi} \cdot \cos \frac{\psi}{2}$  massgebend. Die Differenz zwischen  $c$  und  $c^*$  nimmt mit wachsender Dämpfung zu.

Wirkt ein Erregungsmoment  $M_j e^{i\omega t}$  auf eine beliebige Drehmasse  $j$ , so gilt für den Drehwinkel  $\varphi$  dieser Masse:

$$\begin{aligned} \Theta_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_j \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{\varphi_j = \varphi} - k_k \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)_{\varphi_k = \varphi} = \\ = M_j e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Einsetzen der Ausdrücke  $\varphi_j$  und  $\varphi_k$  von der Gleichung (1) in die obige Differentialgleichung, unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung  $\varphi = \varphi_j = \varphi_k$  bei  $x = l_j$ , ergibt

$$(2) \quad [(Z_j + k_j z_j) \mathbf{A}_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k_j z_j) \mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}] - k_k z_k (\mathbf{A}_k e^{z_k l_j} - \mathbf{B}_k e^{-z_k l_j}) = M_j$$

und

$$\mathbf{A}_j e^{z_j l_j} + \mathbf{B}_j e^{-z_j l_j} = \mathbf{A}_k e^{z_k l_j} + \mathbf{B}_k e^{-z_k l_j}$$

Hierin ist

$$Z_j = -\omega^2 \theta_j + i \omega R_j = -p_j + i q_j$$

die Impedanz der Drehmasse  $j$ .

Die Berechnung wird getrennt von jeder der beiden Endmassen 0 und  $n$  aus vorgenommen. Für die Drehmasse 0 gilt die Randbedingung

$$Z_0 (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) - k_1 z_1 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) = 0$$

Wird der Vektor  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)$  zunächst beliebig angenommen, so können die beiden Vektoren  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{B}_1$  aus dieser Gleichung graphisch bestimmt werden<sup>3)</sup>. Sie sind die Teilwellen in der Leitung 1 unmittelbar rechts von der Drehmasse 0.  $\mathbf{A}_1$  kommt von und  $\mathbf{B}_1$  wandert zu der Drehmasse 1. An dieser betragen sie  $\mathbf{A}_1 e^{z_1 l_1}$  und  $\mathbf{B}_1 e^{-z_1 l_1}$ . Ueber die Masse 1 kommt  $\mathbf{A}_1$  vom Leitungsteil 2 und über sie wandert  $\mathbf{B}_1$  in den Leitungsteil 2, und zwar mit den Grössen  $\mathbf{A}_2 e^{z_2 l_1}$  und  $\mathbf{B}_2 e^{-z_2 l_1}$ . Diese lassen sich aus der Randbedingung der Masse 1:

$$\frac{1}{k_2 |z_2|^2} \bar{z}_2 [(Z_1 + k_1 z_1) \mathbf{A}_1 e^{z_1 l_1} + (Z_1 - k_1 z_1) \mathbf{B}_1 e^{-z_1 l_1}] = \mathbf{A}_2 e^{z_2 l_1} - \mathbf{B}_2 e^{-z_2 l_1}$$

bestimmen<sup>4)</sup>. Hierbei ist  $\bar{z}_2 = u_2 - i v_2$  die konjugierte Impedanz von  $z_2$ . Die beiden Wellen können auf diese Weise über die Drehmassen 2, 3, 4, ...,  $(j - 1)$  bis in die Leitung  $j$  verfolgt werden. Unmittelbar links von der Drehmasse  $j$  betragen sie  $\mathbf{A}_j e^{z_j l_j}$  und  $\mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}$  (Bild 2).

Die Berechnung wird an dieser Stelle abgebrochen. Man fange dafür mit einer neuen Berechnung von der anderen Endmasse  $n$  an. Man nehme für die in der Leitung  $n$  unmittelbar links von der Masse  $n$  herrschende, resultierende Welle  $(\mathbf{A}_n e^{z_n l_n} + \mathbf{B}_n e^{-z_n l_n})$  einen beliebigen Vektor an und konstruiere daraus die Vektoren  $\mathbf{A}_k e^{z_k l_j}$  und  $\mathbf{B}_k e^{-z_k l_j}$  für die in der Leitung  $k$  unmittelbar rechts von der Drehmasse  $j$  herrschenden Wellen (Bild 3).

Wäre der Vektor  $(\mathbf{A}_n e^{z_n l_n} + \mathbf{B}_n e^{-z_n l_n})$  der Grösse und Richtung nach richtig gewählt, so müssten die beiden folgenden Vektoren

$$\hat{\varphi}_k = \mathbf{A}_k e^{z_k l_j} + \mathbf{B}_k e^{-z_k l_j}$$

und

$$\hat{\varphi}_j = \mathbf{A}_j e^{z_j l_j} + \mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}$$

gleich sein. Um diese Gleichheit zu erreichen, ist der ganze Vektorplan von Bild 3 zu drehen und zu vergrössern bzw. zu verkleinern. Bild 3 ist hier bereits in dieser Weise korrigiert.

Man konstruiere dann aus den Vektoren  $\mathbf{A}_j e^{z_j l_j}$  und  $\mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}$  den Vektor

$$[(Z_j + k_j z_j) \mathbf{A}_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k_j z_j) \mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}]$$

(Bild 4) und aus  $\mathbf{A}_k e^{z_k l_j}$  und  $\mathbf{B}_k e^{-z_k l_j}$  den Vektor

$$-k_k z_k (\mathbf{A}_k e^{z_k l_j} - \mathbf{B}_k e^{-z_k l_j})$$

zum Vektor  $M_j$  (Bild 5). Da  $M_j$  als Amplitude des Erregungsdrehmomentes bereits gegeben ist, so sind nunmehr die Teilwellen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sowie die Schwingungsamplituden  $\hat{\varphi}$  in allen Leitungsteilen durch Vergleich der entsprechenden Vektoren mit dem  $M_j$  bestimmbar.

Die beiden Teilwellen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  erfahren beim Durchschreiten der Drehmasse  $j$  durch den erregenden Impuls eine Verstärkung. Sie speichern hier somit ihre durch die Dämpfung zu vernichtenden Energien zum voraus auf. Die Schwingungsamplituden werden deshalb nur so gross sein, dass der Energieverlust gerade durch die Erregung gedeckt werden kann.

<sup>3)</sup> S. 297 in der unter 1) genannten Arbeit

<sup>4)</sup> S. 301-302

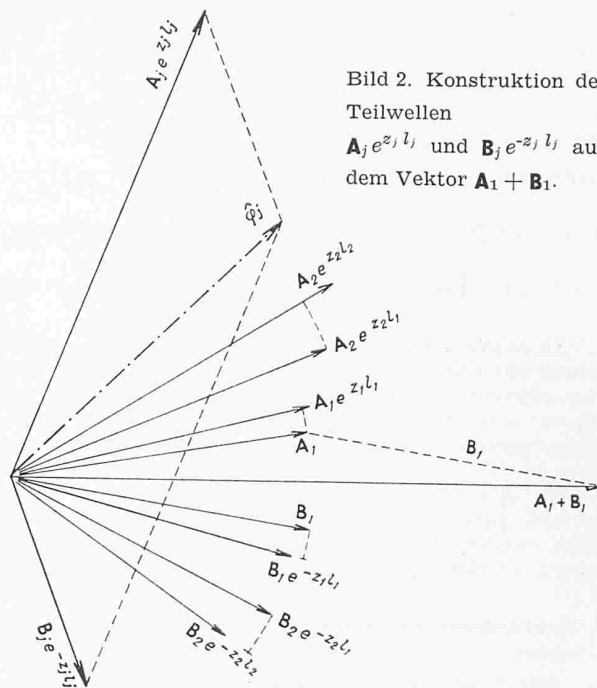


Bild 2. Konstruktion der Teilwellen  $\mathbf{A}_j e^{z_j l_j}$  und  $\mathbf{B}_j e^{-z_j l_j}$  aus dem Vektor  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1$ .

### 3. Gekoppelte Schwingungssysteme

Zwei Schwingungssysteme  $(0 \dots n)$  und  $(r \dots w)$  seien an ihren Massen  $d$  und  $u$  durch ein Getriebe von der Uebersetzung  $\ddot{u}$  gekoppelt (Bild 6). Die Erregung erfolge an der einzigen Drehmasse  $j$ . Für die Drehmassen  $d$  und  $u$  gelten die Bewegungsgleichung

$$(3) \quad \left( \theta_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_d \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_d \frac{\partial \varphi_d}{\partial x} - k_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \right)_{x=l_d} = -\ddot{u} \left( \theta_u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial \xi} - k_v \frac{\partial \varphi_v}{\partial \xi} \right)_{\xi=l_u}$$

und die Kontinuitätsbedingung

$$(4) \quad \varphi_{x=l_d} = \frac{1}{\ddot{u}} \varphi_{\xi=l_u}$$

Aus der Gleichung (3) folgt

$$(5) \quad [(Z_d + k_d z_d) \mathbf{A}_d e^{z_d l_d} + (Z_d - k_d z_d) \mathbf{B}_d e^{-z_d l_d}] - k_e z_e (\mathbf{A}_e e^{z_e l_d} - \mathbf{B}_e e^{-z_e l_d}) = -\ddot{u} [(Z_u + k_u z_u) \mathbf{A}_u e^{z_u l_u} + (Z_u - k_u z_u) \mathbf{B}_u e^{-z_u l_u}] - k_v z_v [\mathbf{A}_v e^{z_v l_u} - \mathbf{B}_v e^{-z_v l_u}]$$

Die Berechnung wird von den Drehmassen 0,  $r$  und  $w$  aus genau gleich durchgeführt wie im vorangehenden Abschnitt. Die Vektoren

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \text{ sowie } (\mathbf{A}_s + \mathbf{B}_s) \text{ und } [\mathbf{A}_w e^{z_w l_w} + \mathbf{B}_w e^{-z_w l_w}]$$

werden deshalb zunächst angenommen. Die beiden letzteren werden dann so korrigiert, dass die daraus für  $\xi = l_u$  berechneten Vektoren

$$\hat{\varphi}_u = \mathbf{A}_u e^{z_u l_u} + \mathbf{B}_u e^{-z_u l_u}$$

und

$$\hat{\varphi}_v = \mathbf{A}_v e^{z_v l_u} + \mathbf{B}_v e^{-z_v l_u}$$

beide gleich

$$\ddot{u} \hat{\varphi}_d = \ddot{u} (\mathbf{A}_d e^{z_d l_d} + \mathbf{B}_d e^{-z_d l_d})$$

sind. Hierbei ist  $\hat{\varphi}_d$  der aus  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)$ , für Leitungsteil  $d: x = l_d$  konstruierte Vektor. Aus der Gleichung (5) lassen sich dann die beiden Vektoren  $\mathbf{A}_e e^{z_e l_d}$  und  $\mathbf{B}_e e^{-z_e l_d}$  bestimmen. Sie sind die vom Leitungsteil  $d$  auf den Leitungsteil  $e$  übergehenden Teilwellen. Der weitere Vorgang der Berechnung unterscheidet sich dann nicht mehr von jenem eines nicht gekoppelten Systemes.

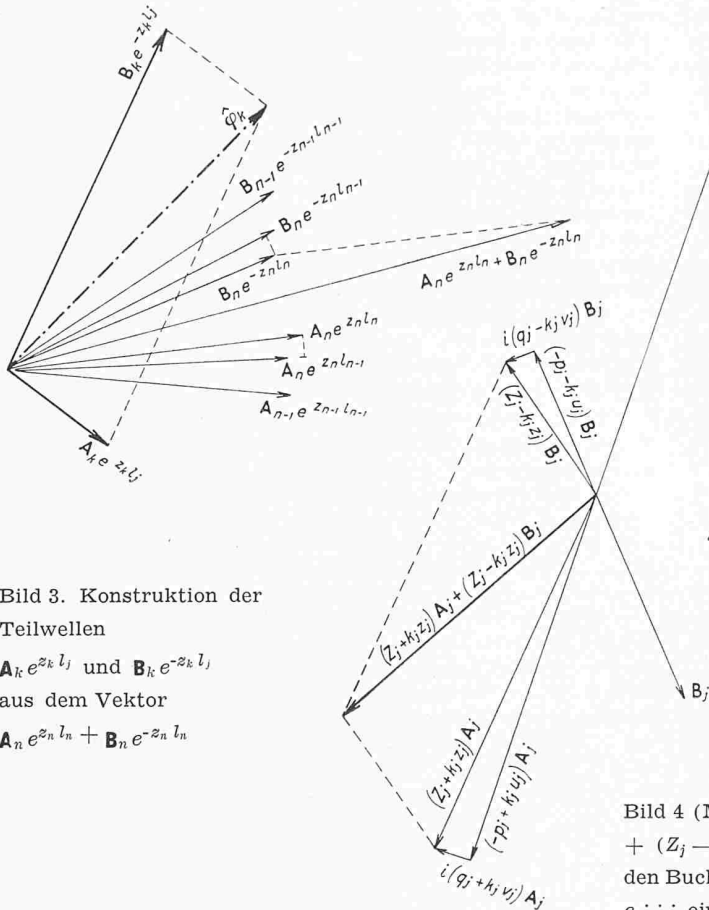


Bild 3. Konstruktion der Teilwellen

$A_k e^{z_k l_j}$  und  $B_k e^{-z_k l_j}$   
aus dem Vektor  
 $A_n e^{z_n l_n} + B_n e^{-z_n l_n}$

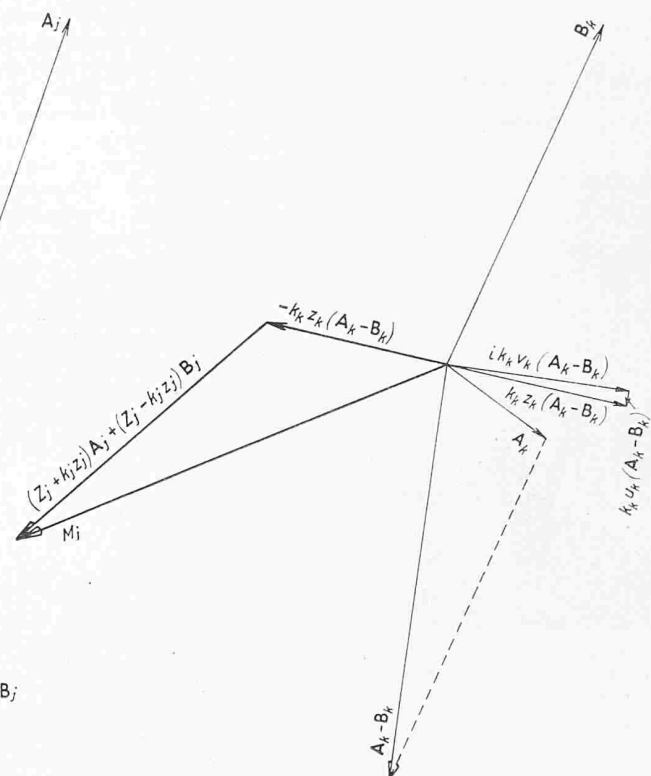


Bild 4 (Mitte). Konstruktion des Vektors  $(Z_j + k_j z_j) A_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k_j z_j) B_j e^{-z_j l_j}$  aus den Vektoren  $A_j e^{z_j l_j}$  und  $B_j e^{-z_j l_j}$ . Nach den Buchstaben  $A_j$  und  $B_j$  im Bild ist jeweils der Exponentialausdruck  $e \dots$  einfachheitshalber weggelassen.

Bild 5 (rechts). Konstruktion des Vektors  $M_j$  aus  $A_k e^{z_k l_j}$ ,  $B_k e^{-z_k l_j}$  und  $(Z_j + k_j z_j) A_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k_j z_j) B_j e^{-z_j l_j}$ . Der Exponentialausdruck  $e \dots$  ist im Bild weggelassen.

4. Schwingungen mit Erregung an mehreren Drehmassen

Wenn ein Schwingungssystem durch verschiedene Drehmomente an verschiedenen Drehmassen erregt wird, lässt sich die Wirkung der Drehmomente wegen der Linearität der betreffenden Differentialgleichung superponieren. Somit kann die Aufgabe in mehrere Teilaufgaben zerlegt werden. In jeder von ihnen erhält das System nur ein einziges Drehmoment. Die Anzahl der Teilaufgaben ist daher gleich jener der Drehmomente. Jede Teilaufgabe lässt sich dann nach dem entwickelten Verfahren behandeln. Die resultierende Schwingungsamplitude an einer beliebigen Stelle ist gleich der vektoriellen Summe der entsprechenden Amplituden aus den Teilaufgaben, unter Berücksichtigung der Phasenunterschiede der Drehmomente.

5. Zusammenfassung

Lineare Torsionsschwingungen mit Erregung an einer beliebigen Drehmasse und mit starker Dämpfung der elastischen Glieder sowie unter Berücksichtigung der Masse von diesen,

lassen sich durch Behandlung der Schwingungen als wandernde, elastische Torsionswellen exakt lösen. Das Verfahren kann auf Systeme mit Erregung an mehreren Drehmassen angewendet werden. Hierzu ist die Aufgabe in die Teilaufgaben mit Erregung an nur einer Drehmasse aufzuteilen. Durch Superposition der Teillösungen folgen die resultierenden Schwingungen.

Adresse des Verfassers beim Titel

Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband

DK 621.2.09

Am 30. August des Jahres versammelte sich der SWW zu seiner 45. Hauptversammlung im Parkhotel Waldhaus in Flims. Der Präsident, Nationalrat Dr. K. Obrecht (Solethurn), konnte eine Rekordbeteiligung von 270 Mitgliedern und Gästen melden. Seiner reich dokumentierten Ansprache entnehmen wir die folgenden Stellen.

«Der Energieeinfuhr von 1194 Mio kWh (Vorjahr 534) oder 20 % der inländischen Energieverwendung stand eine Ausfuhr von 441 Mio kWh (Vorjahr 653) gegenüber, woraus ein Einfuhrüberschuss von 753 Mio kWh resultierte, während im Vorjahreswinter ein Ausfuhrüberschuss von 119 Mio kWh zu verzeichnen war. Die Energieerzeugung in thermischen Anlagen erreichte 150 Mio kWh gegenüber nur 32 Mio kWh im Vorwinter. Die Aufrechterhaltung unserer Energieversorgung basierte also sehr stark auf einer bedeutenden Einfuhr. Diese prekäre Lage entstand trotz der ausserordentlichen Anstrengungen der letzten Jahre, unsere Wasserkraft auszubauen. Diese erforderten für alle unsere Ingenieurbureaus, Baufirmen und Materiallieferanten eine aussergewöhnliche Anspannung und machten den Einsatz grosser Kontingente ausländischer Arbeitskräfte nötig.

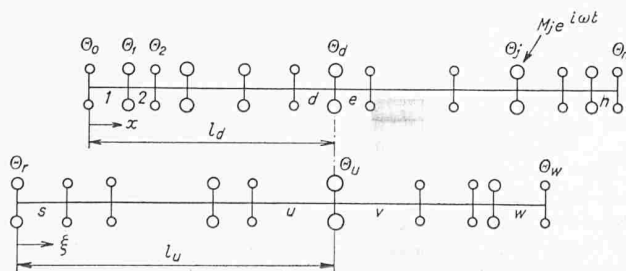


Bild 6: Gekoppeltes Schwingungssystem.