

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 74 (1956)
Heft: 1

Artikel: Berechnung des elastischen Verhaltens und der Eigenschwingungen von Eisenbahnfahrzeugen: ergänzte Fassung der Antrittsvorlesung
Autor: Zweifel, Otto
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62555>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Berechnung des elastischen Verhaltens und der Eigenschwingungen von Eisenbahnfahrzeugen

Ergänzte Fassung der Antrittsvorlesung, die Prof. Otto Zweifel am 7. Dezember 1954 an der ETH gehalten hat

DK 625.2.034

1. Einleitung

Die Grundlage der Schwingungslehre ist die Mechanik der Eigenschwingungen, jener Schwingungen also, die ein elastisches Gebilde ausführt, wenn es, einmal aus dem Gleichgewicht gebracht, sich selbst überlassen bleibt. Da auch die Laufruhe oder besser gesagt die Lauf-Unruhe ein Schwingungsproblem ist, so spielen die Eigenschwingungen eines Fahrzeuges für seine Fahreigenschaften eine grosse Rolle. Wenn man von Dämpfungseigenschaften und konstruktiv bedingten Schwingungserregungen absieht, so kann man sogar soweit gehen, zu sagen, dass z. B. Eisenbahnwagen, die in den Eigenschwingungen aller Freiheitsgrade nach Form und Frequenz übereinstimmen, gleiche Fahrqualitäten aufweisen müssen, auch wenn sie ganz verschieden konstruiert sind.

Die Kenntnis der Eigenschwingungen ist deshalb für Versuchsingenieur und Konstrukteur von eminenter Wichtigkeit. Für die Beurteilung von auf Versuchsfahrten aufgenommenen Messdiagrammen ist es unerlässlich, zu wissen, wie sich die Frequenzen von Erregung und Eigenschwingung zueinander verhalten und in welchem Masse die verschiedenen Eigenschwingungsformen an der gemessenen Fahrzeugbewegung beteiligt sind. Der Konstrukteur wird wiederum bewusst versuchen, die Eigenschwingungsfrequenzen so zu legen, dass unter normalen Betriebsbedingungen keine störenden Resonanzerscheinungen auftreten.

Während jedoch der Versuchsingenieur in der Lage ist, die Eigenschwingungen auf dem Versuchsstand zu bestimmen, ist der Konstrukteur auf die Berechnung oder den Modellversuch angewiesen. Da ein solcher Modellversuch aus Zeitmangel und der nicht zu unterschätzenden Kosten wegen meistens nicht in Frage kommt, wird im Rahmen des vorliegenden Aufsatzes in erster Linie die Eigenschwingungsberechnung behandelt.

Zunächst sei aber einleitend das Fahrverhalten eines ganz einfachen Fahrzeuges beim Fahren über Bodenwellen in Erinnerung gerufen, ohne allerdings in diesem Zusammenhang auf die mathematische Ableitung der angeführten Beziehungen einzugehen. Dieses Fahrzeug (Bild 1) laufe auf einem einzigen Rade, und seine vertikale Lage sei durch

nichteingezeichnete mitbewegte Führungen gesichert. Eine Federung bestehe nur in vertikaler Richtung, und ihr parallel sei ein geschwindigkeitsproportional wirkender Schwingungsdämpfer angeordnet.

Dieser Schwingungsdämpfer soll verschieden stark eingestellt werden können, was z. B. im sog. Ausschwingversuch (Bild 2) zum Ausdruck kommt. Bei diesem Versuch wird das stillstehende Fahrzeug um ein bestimmtes Mass einmalig in seiner Federung angehoben und dann losgelassen. Ist gar keine Dämpfung vorhanden ($D = 0$), so entsteht eine Schwingung, deren Amplitude in Funktion der Zeit unverändert bleibt, während sie im allgemeinen in der Weise abklingt, dass das Verhältnis zweier aufeinander folgender Gegen-Ausschläge konstant bleibt und die Form

$$e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

hat. Der Dämpfungswert D ist eine dimensionslose Grösse, die — wenigstens im periodischen Fall — recht gut mit den Ausschwingdiagrammen auf Bild 2 veranschaulicht werden kann. Bild 5 zeigt Ausschwingkurven, die an Eisenbahnfahrzeugen aufgenommen wurden. Solche Diagramme geben auf einfache Weise Auskunft über den Zustand der Federung und die Art der Dämpfung, in diesem Falle für Vertikalschwingungen.

Wie in Bild 1 angedeutet, fährt das Einrad-Fahrzeug mit einer konstanten Geschwindigkeit v über sinusförmige Bodenwellen von der Amplitude a_0 . Dann bewegt sich der Fahrzeugkörper ebenfalls auf einer sinusförmigen Bahn, die im allgemeinen eine andere Amplitude a aufweist. Die Beziehung zwischen diesen beiden Grössen lautet dann

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{1 + \left(2D \frac{v}{v_k}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{v_k}\right)^2\right]^2 + \left(2D \frac{v}{v_k}\right)^2}}$$

und ist in Bild 3 graphisch dargestellt. Dabei ist v_k die kritische Fahrgeschwindigkeit, bei der die Bodenwellen grade im Takt der Eigenschwingungsfrequenz auf das Fahrzeug schlagen. Bei ganz langsamem Fahren oder bei weit auseinanderliegenden Bodenwellen (man denke an eine Autofahrt über eine Reihe von Pässen) ist $a = a_0$, d. h. der Fahrzeugkörper folgt genau der Sinusform der Fahrbahn. Mit wachsender Geschwindigkeit werden die Ausschläge grösser und in Resonanznähe maximal. Wird v schliesslich wesentlich grösser als v_k , so nimmt a wieder ab und geht für unendlich hohe Werte von v bei kleiner Dämpfung gegen Null: Die Fahrzeugmasse vermag dann den unendlich raschen Stössen nicht mehr zu folgen und bleibt in Ruhe.

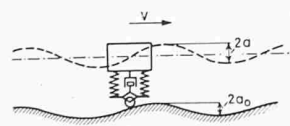


Bild 1. «Einrad-Fahrzeug» beim Fahren über Bodenwellen.

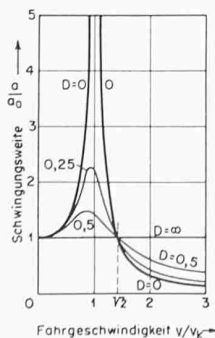


Bild 3. Fahren über Bodenwellen. Schwingungsamplitude in Funktion der Fahrgeschwindigkeit.

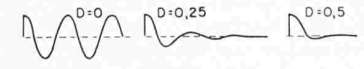


Bild 2. Ausschwingversuch. Abklingen der Eigenschwingungen bei verschiedenen Dämpfungskonstanten D in Funktion der Zeit.

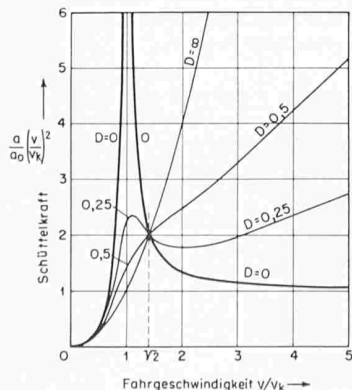


Bild 4. Fahren über Bodenwellen. Schüttelkraft in Funktion der Fahrgeschwindigkeit.

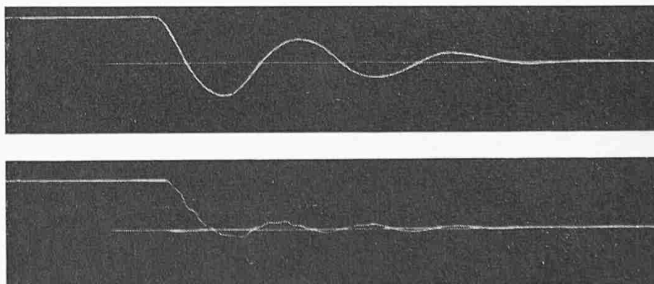


Bild 5. Ausschwingversuche (Vertikalfederung). Oben: Personenwagen AB4ü 1162 gutes Dämpfungsverhalten. Unten: AB4ü 1327 (kurz vor Revision) unbefriedigendes Dämpfungsverhalten.

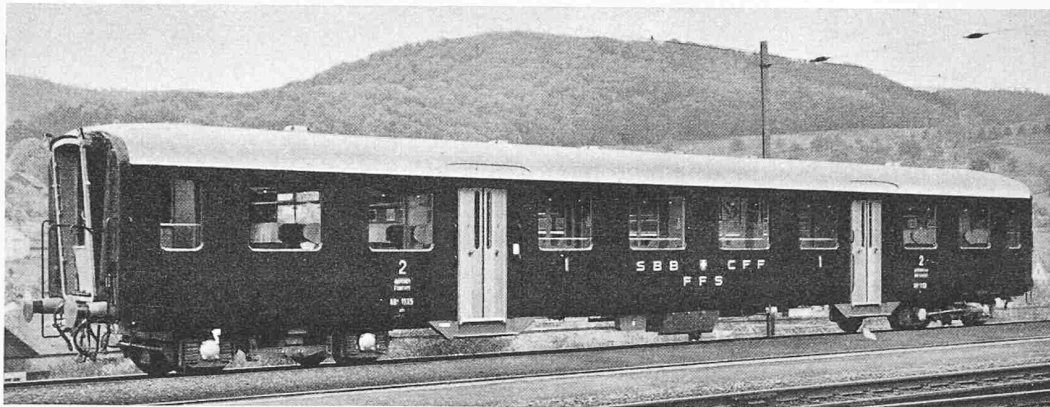


Bild 6. Leichtstahlwagen AB4ü 1135 der SBB mit modernen Torsionsstabdrehgestellen

Betrachtet man Bild 3 allein, so könnte man versucht sein, zu glauben, dass in allen Fällen eine möglichst wirksame Dämpfung anzustreben sei. Im Resonanzgebiet reduziert eine solche die Ausschläge beträchtlich und die sichtliche Verschlechterung im Gebiet $v > \sqrt{2} v_k$ scheint nicht ins Gewicht zu fallen. Sobald man aber nicht nur die Ausschläge untersucht, sondern beispielsweise auch die Kraft, mit der ein Fahrzeugpassagier geschüttelt wird (Bild 4), so verändert sich das Bild wesentlich¹⁾. Für den dämpfungs-freien Fall $D = 0$ ergibt sich zwar noch ein einigermaßen ähnliches Bild: Im Resonanzgebiet wird die Schüttelkraft unendlich gross, während sie weiter oben in bescheidenen Grenzen bleibt. Betrachtet man aber die Kurve $D = 0,5$, so steigt hier die Schüttelkraft für grosse Stosszahlen rapid an, während sich die Dämpfung im Resonanzgebiet sehr günstig auswirkt. Die Kurve für eine mittlere Dämpfung von $D = 0,25$ zeigt sowohl im Resonanzgebiet wie oberhalb desselben einen vernünftigen Verlauf; tatsächlich wird für Fahrzeuge ein Dämpfungswert von $D = 0,2$ bis $0,3$ empfohlen, der am besten durch den Ausschwingversuch (Bild 2 bzw. 5) kontrolliert wird.

Bei einem wirklichen Fahrzeug liegen allerdings viel kompliziertere Verhältnisse vor. Einmal wird dem Wagenkörper nicht mehr durch Führungen eine rein translatorische Auf- und Abbewegung aufgezwungen, sondern er kann sich im allgemeinen allseitig verschieben und drehen und hängt in einem komplizierten System von Pendellaschen, Federungselementen usw. Es tritt dann nicht nur eine, sondern eine ganze Reihe von Eigenschwingungen auf, die in den folgenden Abschnitten wenigstens zum Teil näher untersucht werden sollen.

Bild 6 zeigt als Beispiel eines solchen wirklichen Fahrzeuges einen Eisenbahnwagen mit modernen Drehgestellen in Torsionsstabbauart. Auf Bild 7 ist der Drehgestellrahmen

1) Es sei hier nicht darauf eingegangen, ob der Mensch physiologisch mehr auf die Beschleunigungen $a\omega^2$ (ω = Kreisfrequenz) oder deren Ableitung, den Ruck, $a\omega^3$ oder gar auf die verschiedentlich angeführte Grösse $a^2\omega^3$ reagiert. In Wirklichkeit ist nämlich die Empfindlichkeit noch überdies von Form und Frequenz der Schwingung abhängig, wozu komplizierend kommt, dass der Mensch auf das gleichzeitige Auftreten mehrerer Schwingungen nicht unbedingt wie eine Additionsmaschine reagiert; es ist z. B. möglich, dass die Wirkung eines seekrankheitserregenden langsamen Wiegens durch eine überlagerte rasche Schüttelschwingung vermindert werden kann.

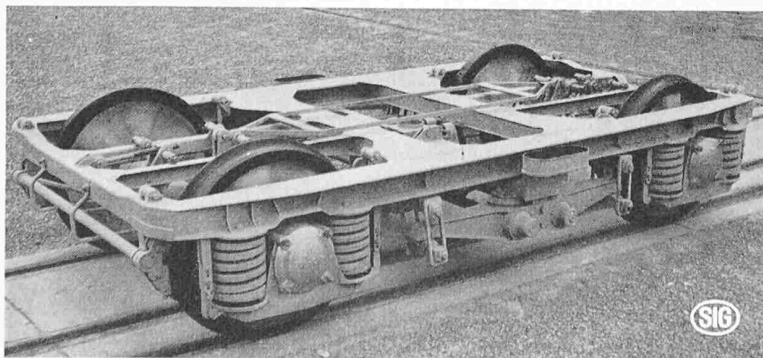


Bild 7. Torsionsstabdrehgestell Bauart SIG.

deutlich sichtbar, der sich über acht Schraubenfedern auf die vier Achslager abstützt. Auf Bild 8 ist dieser Drehgestellrahmen mit D bezeichnet; die Abstützung des Wagenkastens L bzw. Q erfolgt über Gleitstücke K , die auf Gleitbahnen (auch auf Bild 7 sichtbar) ruhen, die ihrerseits zum Wiegebalken B gehören. An diesem sind zu beiden Seiten des Drehgestelles je zwei parallele Torsionsstäbe T montiert, deren innere Enden in den Fixpunkthebeln F (mit Schrauben V einstellbar) eingespannt sind. An den äusseren Enden der Torsionsstäbe greifen bewegliche und in Gleitlagern S gelagerte Hebel H an, die über die Pendellaschen W am Drehgestellrahmen D hängen.

So verwickelt bei einem solchen Beispiel der kinematische Mechanismus der Federaufhängung auf den ersten Blick auch aussehen mag, so lassen sich doch immer vereinfachte Prinzipskizzen (vgl. Bild 13) zeichnen, deren Uebersichtlichkeit die Durchführung der Eigenschwingungsrechnung beträchtlich erleichtert.

Auch die Erscheinungsformen von Erregung und Dämpfung sind in Wirklichkeit wesentlich mannigfaltiger und komplizierter als beim idealisierten Fall des Einrad-Fahrzeuges. Was die Dämpfung anbetrifft, so wird man zwischen den konstruktiv bedingten Dämpfungen (wie innere Reibung der Blattfedern, Gelenkreibungen usw.) und den eigentlichen Zusatzdämpfern unterscheiden müssen; dabei müssen die letztgenannten entsprechend den Schwingungsformen so angeordnet werden, dass sie wirksame Energievernichtungsarbeit leisten können.

Bei der Erregung handelt es sich bei Eisenbahnfahrzeugen nicht nur um eine vertikale Welligkeit des Bodens wie beim Einrad-Fahrzeug von Bild 1. Am nächsten kommt dieser Welligkeitswirkung die Erregung durch Schienenstösse; nur handelt es sich dabei nicht mehr nur um eine sinusförmige Erregung, sondern um ein ganzes Frequenzspektrum solcher Erregungen und zudem wirken diese Schienenstösse sukzessive auf alle Radsätze, wobei Phase und Angriffspunktlage eine Rolle spielen. Dazu kommt nun aber noch eine ganze Reihe weiterer Erregungsarten, wie nicht ausgeglichene Massenkräfte der Maschinen oder Radsätze, Unregelmässigkeiten der Rad-Laufflächen, Reibschwingungen zwischen Rad und Schiene, sowie der Zickzack- oder Schlingerlauf der Radsätze und Drehgestelle innerhalb des Spieles zwischen Spurrail und Schiene.

Insbesondere die letztgenannte Erregungsart ist sehr oft für den schlechten Lauf raschlaufender Fahrzeuge verantwortlich. Dabei handelt es sich um eine interessante Erscheinung, die als ein Gemisch von Fremd- und Selbsterregung angesprochen werden muss. Wenn es sich um ein neuverlegtes Gleis handelt, so beruht dieser Schlingerlauf auf reiner Selbsterregung; jedoch prägen sich dem Gleis mit der Zeit infolge des Hin- und Herlaufens mehr oder weniger periodische Unregelmässigkeiten auf, die dann ihrerseits als additive Fremderregung hinzukommen. Eine Dämpfung dieser Laufunruhen ist hier auf zwei Arten möglich: einmal durch Dämpfung der Wagenkastenschwingung für sich, dann aber auch — und wohl wirkungsvoller — durch Dämpfung des Drehgestellschlingers selbst.

2. Eigenschwingungsformen und Kennbilder

Die mathematische Behandlung der Eigenschwingungsbestimmung gestaltet sich einfacher, wenn man schon von Anfang an auf allfällige Symmetrien Rücksicht nimmt. Fahrzeuge haben in der Regel zumindest eine Symmetrieebene, durch die das System in eine rechte und eine spiegelbildlich gleiche linke Seite unterteilt wird. Die meisten Eisenbahnfahrzeuge weisen sogar zusätzlich eine zweite Symmetrieebene auf, was ihre schwingungsrechnerische Erfassung wesentlich erleichtert.

Zunächst sei rein überlegungsmässig festgestellt, was für Eigenschwingungen ein Fahrzeug mit einer Symmetrieebene — beispielsweise eine Dampflokomotive — überhaupt ausführen kann, wobei dieses Schwingungssystem aus einem einzigen starren Körper bestehe, der irgendwie federnd und pendelnd aufgehängt ist. Dabei sollen nur Schwingungen mit kleinen Ausschlägen betrachtet werden.

Legt man zwei horizontale Achsen (die eine längs, die andere quer) und eine vertikale durch den Schwerpunkt, so kann man mit Hilfe dieses Achsenkreuzes sechs elementare Schwingungsformen definieren, wie sie in Bild 9 eingezeichnet sind. Es ergeben sich somit drei Drehschwingungsformen, die meistens mit Wanken, Schlingern und Nicken bezeichnet werden, sowie drei translatorische Schwingungsformen mit den Bezeichnungen Zucken, Stampfen und Schwanken. Drei dieser Elementarbewegungen, nämlich das Stampfen, Zucken und Nicken, können als symmetrisch bezeichnet werden, weil sich dabei alle Punkte in Parallelebenen zur Symmetrieebene bewegen, während bei den «rein» asymmetrischen Formen, nämlich beim Schlingern, Wanken und Schwanken, die Bewegungen in Normalebenen zur Symmetrieebene stattfinden.

Entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade treten sechs Eigenschwingungen auf, die, solange es sich um kleine Ausschläge handelt, als Rotationsbewegungen²⁾ um ganz bestimmte Achsen, nämlich die Schwingungsachsen, aufgefasst werden können. Da diese Achsen in bezug auf die Symmetrieebene ebenfalls symmetrisch liegen müssen, können sie nur entweder in der Symmetrieebene selbst liegen oder senkrecht zu ihr stehen. Ist das letztere der Fall, so sind die Eigenschwingungsbewegungen rein symmetrisch, und sie müssen sich aus den drei symmetrischen Elementarbewegungen zusammensetzen. Wie in Bild 10 eingezeichnet, ergeben sich damit drei symmetrische Eigenschwingungen mit den Schwingungsachsen A_{123} , A_{231} und A_{312} . Die Indizes 1, 2 und 3 deuten darauf hin, dass jede dieser Eigenschwingungen eine Kopplung der Stampf-, Nick- und Zuckbewegungen ist, die in Bild 9 mit diesen Ziffern bezeichnet sind. Analog gibt es drei rein asymmetrische Eigenschwingungen, bei denen das Schlingern, Wanken und Schwanken gekoppelt auftritt und deren Schwingungsachsen A_{456} , A_{564} und A_{645} in der Symmetrieebene liegen.

Handelt es sich um ein Fahrzeug mit zwei senkrecht aufeinanderstehenden Symmetrieebenen wie auf Bild 11, so müssen sich die Achsen von Bild 10 in einer Weise ordnen, die beiden Symmetriebedingungen genügt. Die Stampfbewegung bleibt dabei als einzige symmetrisch zu beiden Symmetrieebenen, die Schlingerbewegung ebenfalls als einzige asymmetrisch. Beide treten deshalb vollständig entkoppelt auf (A_{123} wird zu A_1 im unendlich Fernen; A_{456} wird zu A_4 durch S), während das Zucken und Nicken (Achsen A_{231}

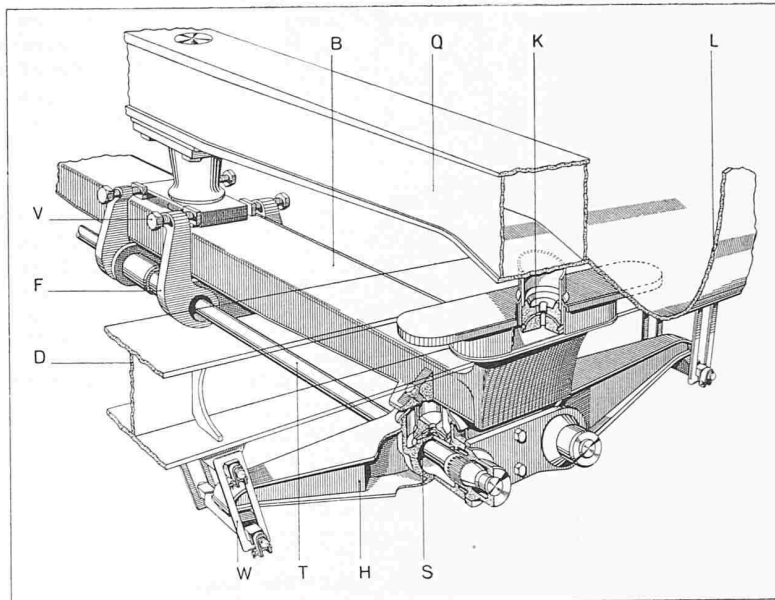


Bild 8. Torsionsstabdrehgestell. Abstützung des Wagenkastens Q auf den Drehgestellrahmen D.

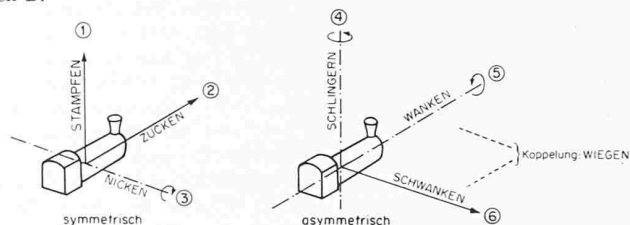


Bild 9. Elementare Schwingungsformen in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz durch den Schwerpunkt.

→ Richtung der translatorischen Schwingungen.
..... Achsen der Drehschwingungen.

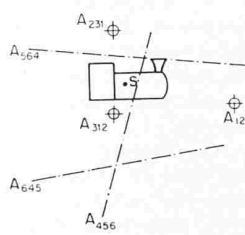


Bild 10. Schwingungsachsen bei Fahrzeugen mit einer Symmetrieebene.

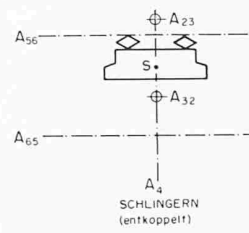
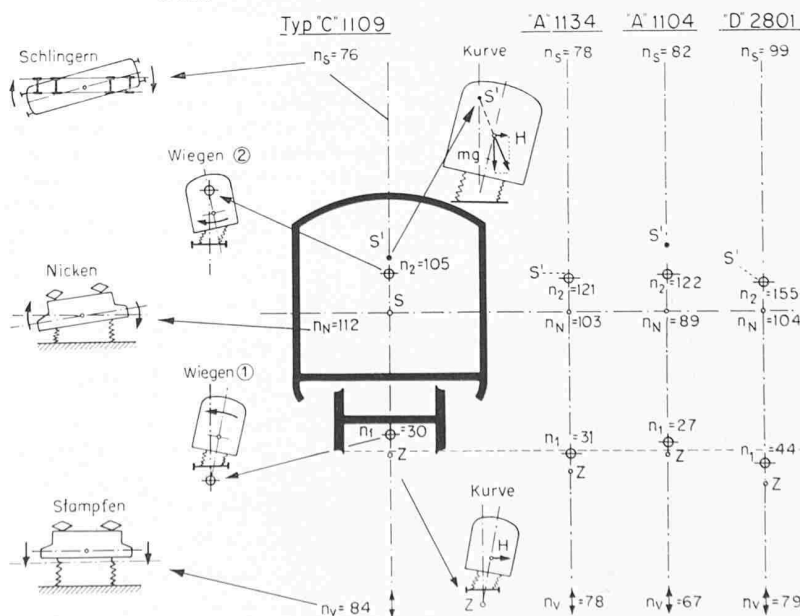


Bild 11. Schwingungsachsen bei Fahrzeugen mit zwei Symmetrieebenen.



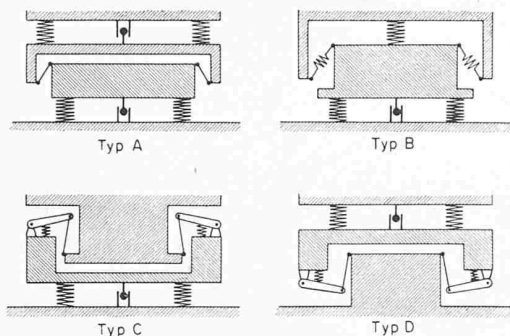


Bild 13. Beispiele von Drehgestellaufhängungen. Schematische Schnitte in Fahrtrichtung gesehen.

und A_{32}) einerseits und das Wanken und Schwanken (Achsen A_{56} und A_{65}) andererseits gekoppelt bleiben. Die Kopplungsschwingung von Schwanken und Wanken wird im folgenden als «Wiegen» bezeichnet; sie besitzt eine derartige Wichtigkeit bei Eisenbahnfahrzeugen, dass es gerechtfertigt erscheint, ihr einen eigenen Namen zu geben.

Auf Bild 12 sind die rechnerisch ermittelten Lagen der Schwingungsachsen sowie die zugehörigen Eigenschwingungszahlen für einige der im letzten Jahrzehnt in der Schweiz gebauten Personenwagen angegeben. Für den Wagen Typ «C» 1109 (die Buchstaben «A», «C» und «D» beziehen sich auf die Drehgestelltypen von Bild 13, die Zahlen 1109 usw. sind Wagennummern der SBB) ist in der Mitte des Bildes ein schematisches Profil eingezeichnet. Die Schwingungsachsen der beiden Wiegeschwingungen sind mit den Eigenfrequenzahlen $n_1 = 30$ und $n_2 = 105$ (Schwingungen pro Minute) bezeichnet, die zugehörigen Schwingungsformen sind links daneben skizziert (Wiegen 1 und Wiegen 2). Beim Wiegen 1 befindet sich die Schwingungsachse unter dem Schwerpunkt S und die entsprechende Eigenfrequenz liegt tief, weshalb diese Schwingung auch mit «unterer Wiegeschwingung» bezeichnet werden kann. Das Wiegen 2 ist dann die «obere Wiegeschwingung», die Eigenfrequenz ist höher und die Schwingungsachse liegt über dem Schwerpunkt. Diese obere Wiegeschwingung kann bei Eisenbahnfahrzeugen oft beobachtet werden; sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sich der Wagenkasten so bewegt, als ob er um eine feste Achse in Kopfhöhe der Passagiere hin- und herschauke.

Eine dritte Eigenschwingung ist die des Schlingerns um die vertikale Schwerachse. Die Skizze auf Bild 12 links oben zeigt den Wagen von oben gesehen, wie der schwingende Kasten übers Kreuz nach beiden Seiten ausschlägt. Die Schlinger-Eigenfrequenz ist mit $n_s = 76$ angegeben. Die vierte Eigenschwingung ist die des Stampfens (Skizze links unten). Die Eigenfrequenz dieser vertikalen Translationschwingung wurde zu $n_v = 84$ berechnet.

Streng genommen sollten noch zwei gekoppelte Nick-Zuckschwingungen vorhanden sein; hier wurde aber näherungsweise nur das reine Nicken um eine Querachse durch den Schwerpunkt gerechnet. (Im Prinzip steht einer genaueren Berechnung der Nick-Zuckschwingungen nichts entgegen, vgl. Abschnitt 5). Die reine Nickfrequenz ergab sich mit $n_N = 112$.

Für drei andere Wagen sind in der rechten Hälfte von Bild 12 ebenfalls Diagramme eingetragen, die nur noch aus dem Skelett der Schwingungsachsen und Eigenfrequenzzahlen bestehen. Diese Diagramme kann man als *Kennbild* der Fahreigenschaften bezeichnen, da durch die darin enthaltenen Angaben das dynamische Verhalten weitgehend charakterisiert ist. Zwei Eisenbahnwagen, die gleiche Kennbilder ha-

ben, besitzen mit gewissen Einschränkungen gleiche Fahreigenschaften. Zu diesen Einschränkungen gehört, dass gewisse Konstruktionsunterschiede von Einfluss auf die schwingungserregenden Kräfte sein können (man denke nur z. B. an ein und denselben Wagen mit neuen oder abgenutzten Rad-Lauflächen), so dass trotz gleicher Kennbilder verschiedene Fahreigenschaften resultieren. Auch das Dämpfungsverhalten ist in den Diagrammen nicht berücksichtigt, immerhin könnten sie dadurch vervollständigt werden, dass jeder Eigenschwingung Angaben über die zugehörige Dämpfung beigelegt würden, die aus Versuchen bestimmt werden müssten.

Die Kennbilder sind noch durch die Punkte S' und Z ergänzt, die das Kurvenverhalten der Fahrzeuge kennzeichnen (vgl. Abschnitt 6).

3. Berechnung der Wiege- und Stampfeigenschwingungen

Wenden wir uns jetzt der eigentlichen Berechnung der Eigenschwingungen zu, so sei zunächst das rein zweidimensionale Problem der Stampf- und Wiegeschwingungen für Fahrzeuge mit zwei Symmetrieebenen behandelt. Bild 13 zeigt an vier Beispielen in schematischen Schnitten (in Fahrtrichtung gesehen) die Mannigfaltigkeit der möglichen Drehgestellaufhängungen. So einfach die Kinematik solcher Aufhängungen auch aussehen mag, so erweist sie sich doch als reichlich kompliziert, wenn man sie in der Eigenschwingungsrechnung berücksichtigen will.

Alle vier gezeigten Typen setzen sich aus drei oder vier gegeneinander beweglichen Körpern zusammen, wobei in allen Fällen der unterste als ruhendes Absolutsystem (Schienen, Radsätze, Achslager) angesprochen werden kann. Der zweitunterste Körper ist der Drehgestellrahmen und der oberste der Wagenkasten. Bei allen gewählten Beispielen ist (zufälligerweise) die Anzahl der System-Freiheitsgrade fünf.

Um bei der Rechnung mit einem vernünftigen Zeitaufwand durchzukommen, werden folgende zwei Hauptpunkte beachtet:

1. Die Schwingungssysteme werden in Teil- oder Nachbarsysteme auseinandergebrochen und die kinematischen Zusammenhänge jedes Teilsystems für sich untersucht. Einerseits ist dies eine beträchtliche Arbeitersparnis, weil sehr oft gleiche Teilsysteme bei ganz verschiedenen Schwingungssystemen vorkommen, und andererseits ist der Rechnungsgang an sich weniger langwierig, da sich eine einfache Superpositionsmethode angeben lässt.

2. Jede Beziehung — auch wenn sie sich scheinbar noch so einfach durch trigonometrische Funktionen exakt ausdrücken liesse — wird unverzüglich in Potenzreihen entwickelt und nach den Grössen zweiter Ordnung abgebrochen. Genauere Beziehungen mitzuschleppen belastet nicht nur den Rechnungsgang in schliesslich prohibitivem Ausmass, sondern ist auch ganz überflüssig, da am Schluss für kleine Schwingungen doch nur noch (nach einer Differentiation) Grössen erster Ordnung berücksichtigt werden müssen.

Die Berechnungsmethode wird im folgenden zunächst allgemein abgeleitet, jedoch erweist es sich als zweckmässig, sie immer wieder an einem Anwendungsbeispiel zu erläutern. Dafür wird der Typ A von Bild 13 gewählt, der in Bild 14 nochmals dargestellt ist, und zwar links in der Gleichgewichtslage, rechts in einer allgemeinen Stellung. A ist das Absolutsystem, I, II und III sind die beweglichen Systemkörper. Die allgemeine Lage des Körpers III sei bestimmt durch seine horizontalen und vertikalen Schwerpunktsverschiebungen ξ und η sowie den Drehwinkel ψ .

Jedem der drei Körper sowie dem Absolutsystem A wird nun je ein mitbewegtes Koordinatenkreuz zugeordnet. In der Gleichgewichtslage liegen alle Koordinatenkreuze übereinander, mit dem Nullpunkt im Schwerpunkt S des Körpers III;

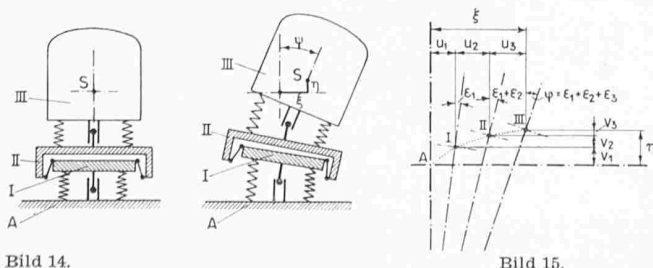


Bild 14.

Bild 15.

Bild 14. Zweidimensionales, symmetrisches Schwingungssystem. Links: Gleichgewichtslage. Rechts: Allgemeine Schwingungslage.

Bild 15. Mitbewegte Koordinatenkreuze der einzelnen Systemkörper von Bild 14 in allgemeiner Lage.

Bild 16. Teilsystem I-II. Verschiebung des Körpers II gegenüber Körper I (Ausschnitt aus Bild 15).

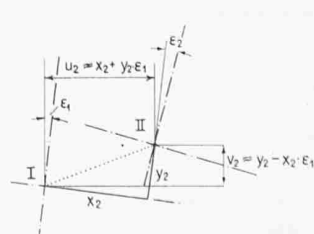


Bild 16.

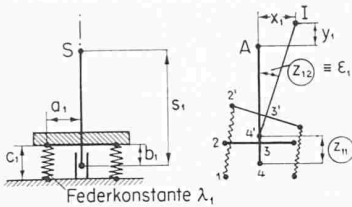


Bild 17. Teilsystem A-I. Unteres Abfederungssystem (vgl. Bild 14).

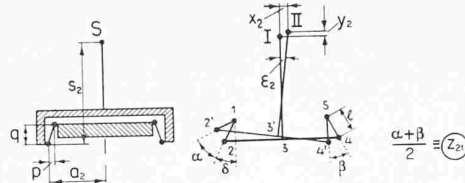


Bild 18. Teilsystem I-II. Pendelnde Aufhängung (vgl. Bild 14).

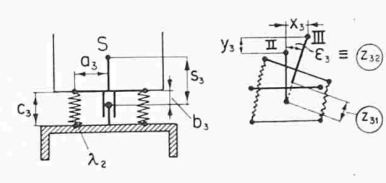


Bild 19. Teilsystem II-III. Oberes Abfederungssystem (vgl. Bild 14).

in einer allgemeinen Lage haben sie sich jedoch fächerartig gegeneinander verschoben, wie in Bild 15 angedeutet ist. Die horizontalen (absoluten) Verschiebungen der Nullpunkte gegeneinander sind dann u_1, u_2 und u_3 , die vertikalen v_1, v_2 und v_3 , während die relativen Drehwinkel mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und ε_3 bezeichnet sind. Damit gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad \xi &= u_1 + u_2 + u_3 \\ \eta &= v_1 + v_2 + v_3 \\ \psi &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Darauf teilt man das Schwingungssystem in drei Teilsysteme auf und führt in jedem Relativkoordinaten ein. In Bild 16 sind beispielsweise die Koordinatenkreuze des Teilsystems I—II (wie in Bild 15, aber vergrössert) herausgezeichnet. Die Lage des Kreuzes II im Koordinatensystem I wird durch die Relativkoordinaten x_2 und y_2 sowie den relativen Drehwinkel ε_2 bestimmt. Die Beziehungen zwischen den absoluten und den relativen Verschiebungen lauten dann

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 \cos \varepsilon_1 + y_2 \sin \varepsilon_1 = \\ &= x_2 (1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \dots) + y_2 (\varepsilon_1 - \frac{1}{6} \varepsilon_1^3 + \dots) \\ v_2 &= y_2 \cos \varepsilon_1 - x_2 \sin \varepsilon_1 = \\ &= y_2 (1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \dots) - x_2 (\varepsilon_1 - \frac{1}{6} \varepsilon_1^3 + \dots) \end{aligned}$$

Wir vernachlässigen nun vereinbarungsgemäss alle Glieder, die von höherer als von zweiter Ordnung sind. Da x_2 und y_2 genau wie ε_1 erster Ordnung sind, bleibt nur noch

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 + y_2 \varepsilon_1 \\ v_2 &= y_2 - x_2 \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Für die Teilsysteme A—I und II—III findet man analoge Ausdrücke, so dass die Beziehungen zwischen den Relativ- und Absolutverschiebungen gesamthaft lauten:

$$\begin{aligned} (2) \quad u_1 &= x_1 & v_1 &= y_1 \\ u_2 &= x_2 + y_2 \cdot \varepsilon_1 & v_2 &= y_2 - x_2 \varepsilon_1 \\ u_3 &= x_3 + y_3 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) & v_3 &= y_3 - x_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

Der nächste Schritt besteht nun darin, die kinematischen Abhängigkeiten der drei Teilsysteme abzuleiten.

Dem besseren Verständnis zuliebe sei das gleich am gewählten Beispiel durchgeführt. Bild 17 zeigt das unterste Teilsystem A—I des Schwingungssystems von Bild 14. In der rechten Bildhälfte ist es noch schematischer, sozusagen nur als Skelett gezeichnet, und zwar sowohl in der Gleichgewichtslage wie in einer allgemeinen Stellung. Die Nullpunkte der Koordinatenkreuze sind wie in Bild 15 durch A bzw. I bezeichnet, die Verschiebungen von I gegenüber A sind x_1 und y_1 , der Drehwinkel des Körpers I ist ε_1 .

Diese drei Grössen sind nicht unabhängig voneinander, da dieses Teilsystem offensichtlich nur zwei Freiheitsgrade hat. Deshalb wählt man zwei unabhängige Lagekoordinaten z_{11} und z_{12} . Mit z_{11} wird beispielsweise die Vertikalverschiebung des Führungspunktes bezeichnet, mit z_{12} der Drehwinkel ε_1 selbst. Jetzt drückt man die Grössen x_1, y_1 und ε_1 durch z_{11} und z_{12} aus, was in diesem Fall einfach ist:

$$\begin{aligned} (101) \quad x_1 &= s_1 \cdot \sin z_{12} \approx s_1 \cdot z_{12} \\ y_1 &= z_{11} + s_1 (\cos z_{12} - 1) \approx z_{11} - \frac{1}{2} s_1 \cdot z_{12}^2 \\ \varepsilon_1 &= z_{12} \end{aligned}$$

Oft, insbesondere wenn verwickeltere Zusammenhänge auszudrücken sind, kommt man mit Hilfe von Vektorzügen rasch zum Ziel, wie beim Teilsystem I—II auf Bild 18 gezeigt werden soll. Dort ergibt die Nullsetzung des geschlossenen Vektorzuges $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{4}' \vec{3}' \vec{2}' \vec{1} = 0$ sofort alle wichtigen Zusammenhänge der Kinematik dieses Systems, und der Vektorzug $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{I} \vec{II} \vec{3}' \vec{2}' \vec{1} = 0$ liefert die Grössen x_2 und y_2 . Dabei haben die einzelnen Vektoren folgende Komponenten:

$\vec{1} \vec{II}:$	x_2	y_2
$\vec{23} = \vec{34}:$	a_2	0
$\vec{2'3'} = \vec{3'4'}:$	$a_2 \cdot \cos \varepsilon_2$	$-a_2 \cdot \sin \varepsilon_2$
$\vec{3I}:$	0	s_2
$\vec{3'II}:$	$s_2 \cdot \sin \varepsilon_2$	$s_2 \cdot \cos \varepsilon_2$
$\vec{21}:$	p	q
$\vec{2'1'}:$	p'	q'
$\vec{45}:$	$-p$	q
$\vec{4'5'}:$	$-p''$	q''

Die Komponenten p', q', p'' und q'' der Vektoren $\vec{2'1'}$ bzw. $\vec{4'5'}$ können mit der Pendellänge l wie folgt ausgedrückt werden:

Es ist $p' = l \cdot \sin(\delta + \alpha) = l \cdot \sin \delta \cos \alpha + l \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha$

andererseits ist $l \cdot \sin \delta = p$ und $l \cdot \cos \delta = q$

womit $p' = p \cdot \cos \alpha + q \cdot \sin \alpha$

wird. Analog werden

$$\begin{aligned} q' &= q \cdot \cos \alpha - p \cdot \sin \alpha \\ p'' &= p \cdot \cos \beta - q \cdot \sin \beta \\ q'' &= q \cdot \cos \beta + p \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Berücksichtigt man diese Beziehungen und entwickelt man alle sin- und cos-Glieder wieder in Potenzreihen, so erhält man für die beiden Komponenten des Vektorzuges $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{4}' \vec{3}' \vec{2}' \vec{1}$:

$$\begin{aligned} (102) \quad \frac{1}{2} p (\alpha^2 + \beta^2) - q (\alpha - \beta) - a_2 \varepsilon_2^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} q (\alpha^2 - \beta^2) + p (\alpha + \beta) - 2a_2 \varepsilon_2 &= 0 \end{aligned}$$

wenn man wiederum Glieder höherer Ordnung weglässt.

Da dieses Teilsystem einen Freiheitsgrad besitzt, darf eine unabhängige Lagekoordinate z_{21} gewählt werden. ε_2 eignet sich dazu nicht, weil es die unangenehme Eigenschaft hat, für den Fall paralleler Pendel zu verschwinden. Man wählt deshalb (aus Symmetriegründen)

$$(103) \quad z_{21} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

Um α, β und ε_2 durch z_{21} ausdrücken zu können, macht man die quadratischen Ansätze

$$\begin{aligned} (104) \quad \varepsilon_2 &= E_1 \cdot z_{21} + E_2 \cdot z_{21}^2 & \varepsilon_2^2 &= E_1^2 \cdot z_{21}^2 \\ \alpha &= A_1 \cdot z_{21} + A_2 \cdot z_{21}^2 & \alpha^2 &= A_1^2 \cdot z_{21}^2 \\ \beta &= B_1 \cdot z_{21} + B_2 \cdot z_{21}^2 & \beta^2 &= B_1^2 \cdot z_{21}^2 \end{aligned}$$

Darauf setzt man diese Ausdrücke in (102) und (103) ein und erhält die Koeffizienten E_1, E_2, A_1 usw. durch Identifikation, wenn man berücksichtigt, dass die so erhaltenen Gleichungen sowohl für die Terme erster Ordnung als auch für diejenigen zweiter Ordnung allein gelten müssen. Man findet dann:

$$\begin{aligned} (105) \quad \varepsilon_2 &= \frac{p}{a_2} z_{21} & \varepsilon_2^2 &= \left(\frac{p}{a_2} \right)^2 z_{21}^2 \\ \alpha &= z_{21} + \frac{p}{2q} \left(1 - \frac{p}{a_2} \right) z_{21}^2 & \alpha^2 &= z_{21}^2 \\ \beta &= z_{21} - \frac{p}{2q} \left(1 - \frac{p}{a_2} \right) z_{21}^2 & \beta^2 &= z_{21}^2 \end{aligned}$$

Um schliesslich x_2 und y_2 anschreiben zu können, wird wie erwähnt der Vektorzug $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{I} \vec{II} \vec{3}' \vec{2}' \vec{1} = 0$ gesetzt, und man findet damit

$$\begin{aligned} (106) \quad x_2 &= \frac{1}{2} p \alpha^2 - q \alpha - \frac{1}{2} a_2 \varepsilon_2^2 + s_2 \cdot \varepsilon_2 \\ y_2 &= \frac{1}{2} q \alpha^2 + p \alpha - \frac{1}{2} s_2 \varepsilon_2^2 - a_2 \cdot \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Mit (105) wird dann schliesslich $^3)$

$$\begin{aligned} (107) \quad x_2 &= - \left(q - s_2 \frac{p}{a_2} \right) z_{21} & &= -Q_x z_{21} \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left[q - s_2 \left(\frac{p}{a_2} \right)^2 + \frac{p^2}{q} \left(1 - \frac{p}{a_2} \right) \right] z_{21}^2 & &= \frac{1}{2} Q_y z_{21}^2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{p}{a_2} z_{21} \end{aligned}$$

Das Teilsystem II-III (Bild 19) sieht beinahe gleich aus wie das unterste (Bild 17), und man findet deshalb nahezu gleiche Beziehungen wie dort, nämlich:

$$\begin{aligned}(108) \quad x_3 &= (s_3 + z_{31}) z_{32} \\ y_3 &= z_{31} - \frac{1}{2} \cdot s_3 \cdot z_{32}^2 \\ \varepsilon_3 &= z_{32}\end{aligned}$$

Drückt man allgemein aus, was hier am Beispiel durchgeführt wurde, so lässt sich das etwa wie folgt formulieren:

Man wählt n unabhängige Lagekoordinaten z_{ik} (i = laufende Nummer der Teilsysteme wie in (1) und (2), k = laufende Nummer der Lagekoordinaten im gleichen Teilsystem) entsprechend den n Freiheitsgraden des Systems und drückt sowohl die Relativverschiebungen x_1 x_2 x_3 und y_1 y_2 y_3 als auch die Drehwinkel ε_1 ε_2 ε_3 durch diese z_{ik} aus

$$\begin{aligned}(3) \quad x_1 &= x_1(z_{11} z_{12} \dots) \quad x_2 = x_2(z_{21} z_{22} \dots) \quad x_3 = x_3(z_{31} z_{32} \dots) \\ y_1 &= y_1(z_{11} z_{12} \dots) \quad y_2 = y_2(z_{21} z_{22} \dots) \quad y_3 = y_3(z_{31} z_{32} \dots) \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1(z_{11} z_{12} \dots) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(z_{21} z_{22} \dots) \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(z_{31} z_{32} \dots)\end{aligned}$$

Zusammen mit den Beziehungen (1) und (2) findet man für den Körper III:

$$\begin{aligned}(4) \quad \xi &= \xi(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots z_{31} z_{32} \dots) \\ \eta &= \eta(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots z_{31} z_{32} \dots) \\ \psi &= \psi(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots z_{31} z_{32} \dots)\end{aligned}$$

Für das Beispiel ergibt sich somit aus (1) (2) (101) (107) und (108) für die kinematischen Zusammenhänge in bezug auf den Körper III

$$\begin{aligned}(109) \quad \xi &= s_1 z_{12} - Q_x z_{21} + s_3 z_{32} + z_{31} z_{32} + \left(z_{12} + \frac{p}{a_2} z_{21} \right) z_{31} \\ \eta &= z_{11} + z_{31} - \frac{1}{2} s_1 z_{12}^2 - \frac{1}{2} s_3 z_{32}^2 + \frac{1}{2} Q_y z_{21}^2 \\ &\quad + Q_x z_{12} z_{21} - \left(z_{12} + \frac{p}{a_2} z_{21} \right) s_3 z_{32} \\ \psi &= z_{12} + \frac{p}{a_2} z_{21} + z_{32}\end{aligned}$$

worin nach (107) speziell bedeuteten ³⁾:

$$(110) \quad Q_x \equiv q - s_2 \frac{p}{a_2}$$

$$(111) \quad Q_y \equiv q - s_2 \left(\frac{p}{a_2} \right)^2 + \frac{p^2}{q} \left(1 - \frac{p}{a_2} \right)$$

Während (101), (107) und (108) die Kinematik jedes Teilsystems für sich umschreiben, sind in (109) noch neue Glieder (gestrichelt unter-

³⁾ Die Ausdrücke Q_x und Q_y gehen für $p = 0$ (parallele Pendel) in die Pendellänge über; sie sind eine Art äquivalente Pendellängen.

strichen) hinzugekommen, die den gegenseitigen Einfluss der Teilsysteme aufeinander enthalten. Dieser Einfluss war in (2) in denjenigen Gliedern enthalten, die dort ebenfalls gestrichelt unterstrichen waren.

Bei der Wahl der Unabhängigen z_{ik} soll so vorgegangen werden, dass diese entweder wie η rein symmetrisch oder wie ξ und ψ rein asymmetrisch sind. In erster Näherung sind dann ξ und ψ in (4) nur eine Funktion der asymmetrischen und η der symmetrischen Unabhängigen z_{ik} , wodurch mathematisch ausgedrückt ist, dass die Stampfschwingung (η) und die Wiegeschwingung (ξ ψ) nicht gekoppelt sind.

In Gl. (109) sind die Glieder 1. Ordnung voll unterstrichen. Hier war also die Wahl der z_{ik} richtig erfolgt, da in diesen Gliedern z_{11} und z_{31} nur bei η und andererseits z_{12} , z_{21} und z_{32} nur bei ξ und ψ vorkommen. Ungeschickt wäre es z. B. gewesen, wenn man beim Teilsystem A-I die beiden Federdehnungen als Unabhängige gewählt hätte, weil diese auf alle drei Grössen ξ , η und ψ einen Einfluss 1. Ordnung besitzen.

Will man bei den Bewegungsgleichungen die Massenwirkung der Körper I und II mitberücksichtigen, so braucht man die Gl. (4) entsprechenden Bedingungen für die Schwerpunktskoordinaten dieser Körper, nämlich

$$\begin{aligned}(5) \quad \xi_{II} &= \xi_{II}(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots) \\ \eta_{II} &= \eta_{II}(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots) \\ \psi_{II} &= \psi_{II}(z_{11} z_{12} \dots z_{21} z_{22} \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \quad \xi_I &= \xi_I(z_{11} z_{12} \dots) \\ \eta_I &= \eta_I(z_{11} z_{12} \dots) \\ \psi_I &= \psi_I(z_{11} z_{12} \dots)\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich analog ableiten, wie die Gl. (4), nur wird für ξ_{II} η_{II} ψ_{II} der Körper III weggelassen und für ξ_I η_I ψ_I beide Körper II und III.

In unserem Beispiel erhält man (5) direkt aus (109), indem man $z_{31} = z_{32} = 0$ setzt und s_1 durch s_{II1} ersetzt. Ebenso ist Q_x und Q_y durch Q_{IIx} und Q_{IIy} zu ersetzen, indem in Gl. (110) und (111) s_2 durch s_{II2} ersetzt wird. (s_{II1} und s_{II2} entsprechen s_1 und s_2 auf den Bildern 17 und 18, wenn S dann der Schwerpunkt des Körpers II ist.) Damit wird

$$\begin{aligned}(112) \quad \xi_{II} &= s_{II1} \cdot z_{12} - Q_{IIx} \cdot z_{21} \\ \eta_{II} &= z_{11} - \frac{1}{2} s_{II1} z_{12}^2 + \frac{1}{2} Q_{IIy} z_{21}^2 + Q_{IIx} \cdot z_{12} z_{21} \\ \psi_{II} &= z_{12} + \frac{p}{a_2} z_{21}\end{aligned}$$

und nochmals analog mit $z_{21} = z_{22} = 0$

$$\begin{aligned}(113) \quad \xi_I &= s_{I1} \cdot z_{12} \\ \eta_I &= z_{11} - \frac{1}{2} s_{I1} \cdot z_{12}^2 \\ \psi_I &= z_{12}\end{aligned}$$

Schluss folgt

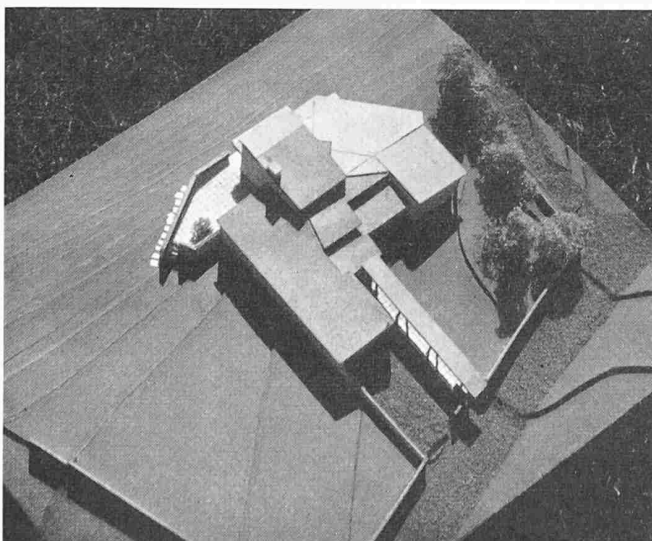
Wohnhaus «En Coulet» in St. Prex am Genfersee

Hierzu Tafeln 1/6

Architekt Otto H. Senn, Basel

DK 728.37

Baujahr: 1953



Gesamtansicht im Modell

Situation. Das Grundstück liegt am westlichen Rande des neuen Wohngebietes der Gemeinde. Es erstreckt sich vom Seeufer, in zwei Stufen ansteigend, bis zum 40 m höher gelegenen Plateau. Das Haus ist so gestellt, dass es den auf drei Seiten mauerumschlossenen, oberen Garten an der Stelle begrenzt, wo das Gelände in den abfallenden Hang übergeht. Das Hauptgeschoss ist von der Strasse ebenerdig zugänglich. Nach Süden, wo sich der Blick auf den See und die Savoyer Berge öffnet, lädt es um eine Stockwerkshöhe aus über das Gelände. Hier nimmt das Sockelgeschoss das Niveau der Umgebung auf (mit dem direkten Austritt von der Halle).

Raumorganisation. Die Gemeinschafts- und Einzelräume (Wohn- und Schlafzimmer) sind auf dem einen Boden des Hauptgeschosses zusammengefasst. Sie schliessen sich je um eine Halle, den Hauseingang und den Schrankvorplatz zu zwei Gruppen zusammen mit den zugehörigen Nebenräumen. Das Wohnzimmer greift in der Vertikalen über ein Galeriegeschoss (Bibliothek) und mittels der äusseren Rampe auf das tiefer gelegene Vorgelände. Im Sockelgeschoss befinden