Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 79 (1961)
Heft: 17

Artikel: Numerische Methoden der Baustatik
Autor: Stüssi, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65512

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN INGENIEUR- UND ARCHITEKTEN-VEREINS S.I.A. UND DER GESELLSCHAFT EHEMALIGER STUDIERENDER DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE G.E.P.

Numerische Methoden der Baustatik

Von Prof. Dr. **Fritz Stüssi**, ETH, Zürich [1])

DK 624.04:518.12

Wir können die Veröffentlichung dieser Vortragsreihe nicht beginnen ohne ein Wort der Entschuldigung gegenüber Prof. *Fritz Stüssi,* der sie im November 1960 eingeleitet und uns sein Manuskript schon Mitte Dezember übergeben hatte, verbunden mit dem Wunsche, der Beitrag seines Kollegen Dubas möchte im gleichen Heft erscheinen. Die ungebührliche Verzögerung der Publikation hat ihren Grund im Personalmangel unter den für mathematischen Satz befähigten Schriftsetzern. Nachdem dieser Engpass überwunden ist, freut es uns, dem Wunsche unseres Freundes Stüssi endlich entsprechen zu können und dabei die Anerkennung zahlreicher Kursteilnehmer zum Ausdruck zu bringen für die überlegene Art, in welcher er damals seinen Vortrag hielt und in der Diskussion seinen Standpunkt gegen die übermächtig anstürmenden Vorkämpfer der plastischen Berechnungsmethoden stahlhart verteidigte. Bei dieser Gelegenheit sei es mir gestattet, den treffenden Worten noch etwas beizufügen, mit denen u. a. Prof. Steinhardt im «Stahlbau» 1961, Heft 2, und im «Bauingenieur» 1961, Heft 1, sowie Dr. C. F. Kollbrunner in der «Neuen Zürcher Zeitung» 1961, Nr. 19, Stüssis wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Ingenieurwissenschaft und seine Persönlichkeit im Ganzen kennzeichneten: Fritz Stüssi vereinigt in sich offene, ehrliche, mannhafte Gradheit, Härte und unerbittliche Strenge des Urteils mit einer Herzenswärme und einem Talent zu geistreicher Geselligkeit, die ihn zu einem köstlichen Kameraden werden lassen.

Prof. *Pierre Dubas* hat 1948 als Bauingenieur an der ETH diplomiert und dort auch mit einer ausgezeichneten Arbeit den Doktorgrad der technischen Wissenschaften erworben. Bis 1956 in der Stahlbauwerkstätte Döttingen der AG Conrad Zschokke tätig, wirkte er seit 1957 als Bürochef in den Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey. Seit 1959 ist er Lehrbeauftragter für Grundlagen des Stahlbaues, und vor kurzem wurde er Assistenz-Professor an der ETH.

W. J.

1. Die Baustatik ist eine angewandte Wissenschaft, denn sie hat ja die Aufgabe, uns die Mittel und Methoden zur Bemessung unserer Bauwerke zu liefern. Dies kommt mit aller Deutlichkeit schon im Titel «Résumé des leçons ... sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines» zum Ausdruck, den Louis Navier 1826 seinem grundlegenden Hauptwerk gegeben hat; hier vollzieht Navier den Uebergang von der theoretischen Mechanik zur Baustatik. Eine angewandte Wissenschaft hat aber nur einen Sinn im Zusammenhang mit ihrem Anwendungsgebiet; sie muss aufs engste mit diesem Anwendungsgebiet verbunden sein, dessen Entwicklung und Ausbau auch ihre Entwicklung bestimmt. Eine Baustatik, die nicht auf diese direkte Anwendung orientiert wäre, wäre keine Baustatik mehr.

Während die Mechanik als Naturwissenschaft, die die mechanischen Vorgänge in der Natur in möglichst allgemeiner und umfassender Form zu beschreiben hat, weitgehend analytischer Methoden bedarf, ist die Baustatik eindeutig numerisch orientiert; wir benötigen bei der Bemessung eines einfachen Balkens beispielsweise die Grösse der grössten Biegungsmomente M_{max} mit genügender Genauigkeit und in einer genügenden Anzahl von Schnitten; welchen mathematischen Charakter diese Grenzwertlinie der Momente besitzt, ist für die Bemessung bedeutungslos.

Der Unterschied zwischen der (analytischen) Mechanik und der (numerischen) Baustatik in bezug auf die *Fragestellung* sei durch ein einfaches Beispiel charakterisiert: das elastische Knicken eines zentrisch gedrückten Stabes mit konstanter Druckkraft P ist durch das Gleichgewicht der äusseren Ablenkungskräfte mit den inneren elastischen Widerständen bestimmt:

$$(E\,J\,\eta'')'' + P \cdot \eta'' = 0\,;$$

für den Fall konstanter Steifigkeit EJ und beidseitig gelenkiger Lagerung hat Leonhard Euler 1744 die Lösung dieser Differentialgleichung mit

$$\eta = \eta_0 \cdot \sin \frac{n\,\pi\,x}{l}$$

zu

$$P_{kr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E\,J}{l^2}$$

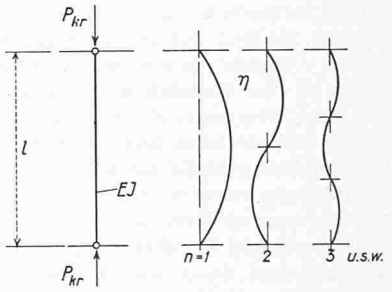


Bild 1

gefunden. Diese Lösung umfasst für den untersuchten Sonderfall alle möglichen Knickformen (Bild 1). In der Baustatik benötigen wir jedoch nur die für die Bemessung massgebende kleinste Knicklast mit $n = 1$, diese jedoch für alle in der Ausführungspraxis vorkommenden Anwendungsfälle. Wie schwierig die analytische Lösung beispielsweise bei beliebig veränderlicher Steifigkeit ist, ist bekannt; damit wird die Notwendigkeit numerischer Berechnungsmethoden, die an die Besonderheiten des konkreten Einzelfalles anpassbar sein müssen, evident. Selbstverständlich wird kein vernünftiger Ingenieur auf die Verwendung der fertigen Formel, die uns die Analysis liefert, verzichten, wenn die Voraussetzungen der Lösung in Wirklichkeit erfüllt sind; es haben sowohl analytische wie numerische Methoden nebeneinander ihre Existenzberechtigung, und sie sind beide notwendig. Ein guter Konstrukteur wird im gegebenen Einzelfall jene Methode einsetzen, die ihn innerhalb der geforderten Genauigkeit am raschesten zum Ziel führt; die von Ernst Mach aufgestellte Forderung nach Oekonomie des Denkens gilt auch für die angewandte Wissenschaft der Baustatik.

Der Vergleich zwischen analytischen und numerischen Methoden sei an Hand einiger Grundaufgaben (Bild 2) noch deutlicher veranschaulicht. Die Berechnung des Biegemomentes M infolge einer verteilten Belastung p und der Durchbiegung η des einfachen Balkens sowie des Durchhanges y eines Seiles sind im Sinne der Analysis durch Differentialbeziehungen zweiter Ordnung charakterisiert; die gesuchte Grösse y ergibt sich durch zweimalige Integration von y'' unter Beachtung der Randbedingungen, hier $y_A = y_B = 0$. Eine geschlossene analytische Lösung ist nur dann möglich, wenn y'' eine integrierbare Funktion ist, was insbesondere die Forderung der Stetigkeit von y'' einschliesst. Der Charakter der Lösung ist vom Charakter der «Belastungsfunktion» y'' abhängig; ist die Belastung p eines Seiles gleichmässig über die Spannweite verteilt, so ist die Lösung y eine Parabel, während sie bei gleichmässiger Belastung über die Seillänge eine hyperbolische Kurve ist. Wenn wir dagegen eine nume-

[1]) Vortrag, gehalten am 11. November 1960 in der ETH, anlässlich der Fachtagung der FGBH über «Neuere Methoden der Baustatik». Auch alle andern Vorträge dieser Tagung werden hier anschliessend veröffentlicht.

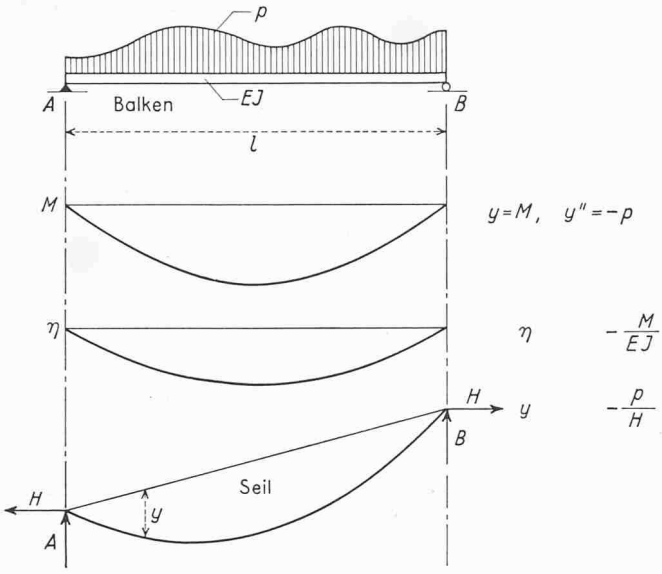


Bild 2

rische Methode kennen, mit der wir eine der Aufgaben lösen können, so sind mit der gleichen Methode auch die anderen beiden Aufgaben in gleicher Weise lösbar. Dies kommt ja sehr schön in der Mohrschen Analogie zum Ausdruck, nach der wir eine Biegungslinie η genau gleich wie eine Momentenfläche M berechnen können, wenn wir statt der Belastung p die Belastung M/EJ einführen. Das normalerweise für diese Berechnung verwendete Mittel, das Seilpolygon, leitet seinen Namen vom dritten Beispiel des Bildes 2 her, wodurch die Bedeutung und Fruchtbarkeit der hier vorliegenden *Analogie* deutlich zum Ausdruck kommt.

Die heutige Baustatik verfügt über eine Reihe von numerischen Berechnungsmethoden, deren Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit erprobt sind; wir brauchen diese Methoden hier nicht aufzuzählen. Ich möchte mich im folgenden auf einige Ueberlegungen und Beispiele zur numerischen Integration und Differentiation und zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen beschränken. Dabei soll gezeigt werden, dass auch derartige Aufgaben mit den bekannten und klassischen Mitteln der Baustatik gelöst werden können, wenn wir diese in zweckmässiger Formulierung einsetzen.

2. Ein bekanntes Mittel zur gewöhnlichen numerischen Integration zwischen zwei Grenzen x_1 und x_2 ist die Flächenberechnung nach Simpson. Die Simpsonsche Regel (Thomas Simpson, 1710 bis 1761) beruht darauf, dass für ein Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$ parabolischer Verlauf der zu integrierenden Funktion y' angenommen wird (Bild 3); es ist dann

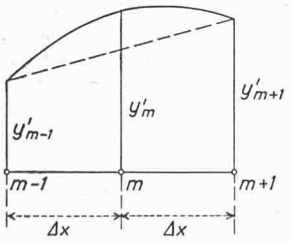


Bild 3

$$\overset{m+1}{\underset{m-1}{F}} = \int_{m-1}^{m+1} y'\,dx = \Delta x\,(y_{m-1}' + y_{m+1}') + \frac{2\cdot 2\,\Delta x}{3}\left(y_m' - \frac{y_{m-1}' + y_{m+1}'}{2}\right),$$

$$(1) \qquad y_{m+1} = y_{m-1} + \frac{\Delta x}{3}\,(y_{m-1}' + 4\,y_m' + y_{m+1}')\,.$$

Die Leichtigkeit der Anwendung und die Leistungsfähigkeit dieser einfachen Regel sei am Beispiel

$$\int_1^x \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

in Tabelle 1 gezeigt.

Tabelle 1

x	$\frac{1}{x}$	$\int_1^x \frac{dx}{x}$	$\ln x$	$\int \frac{dx}{x}$ für $\Delta x = 0{,}2$
1,0	1,0000	0	0	0
1,1	0,909 091	0,095 313	0,095 310	
1,2	0,833 333	0,182 323	0,182 322	0,182 34
1,3	0,769 231	0,262 366	0,262 364	
1,4	0,714 286	0,336 475	0,336 472	0,336 51
1,5	0,666 667	0,405 468	0,405 465	
1,6	0,625 000	0,470 006	0,470 004	0,470 04
1,7	0,588 235	0,530 633	0,530 628	
1,8	0,555 556	0,587 790	0,587 787	0,587 83
1,9	0,526 316	0,641 857	0,641 854	
2,0	0,500 000	0,693 150	0,693 147	0,693 19

Die Simpsonsche Regel hat den Nachteil, dass sie uns die Integralwerte nur für jeden zweiten Teilpunkt liefert. Dieser Nachteil kann aber leicht behoben werden, da wir für die Parabelfläche von Bild 3 auch den Inhalt von $m-1$ bis m berechnen können:

$$\int_{m-1}^{m} y'\,dx = \frac{\Delta x}{12}\,(5\,y_{m-1}' + 8\,y_m' - y_{m+1}') = \frac{\Delta x}{12}\,(-\,y_{m-2}' + 8\,y_{m-1}' + 5\,y_m')\,.$$

Nehmen wir den Mittelwert, so wird

$$(2) \qquad y_m = y_{m-1} + \frac{\Delta x}{24}\,(-\,y_{m-2}' + 13\,y_{m-1}' + 13\,y_m' - y_{m+1}')\,.$$

Damit wird in unserem Beispiel für $x = 1{,}50$

$$y_{1,5} = 0{,}336475 + 0{,}068992 = 0{,}405467.$$

Ebensogut hätten wir aber analog mit

$$y_m = y_{m+1} - \frac{\Delta x}{24}\,(-\,y_{m-1}' + 13\,y_m' + 13\,y_{m+1}' - y_{m+2}')$$

rechnen können:

$$y_{1\,5} = 0{,}470\,006 - 0{,}064\,538 = 0{,}405\,468\,.$$

Von diesem Wert aus finden wir die übrigen Zwischenwerte mit der Simpsonschen Regel nach beiden Seiten. Die Ergebnisse unterscheiden sich von den genauen Werten $\ln x$ erst in der sechsten Stelle nach dem Komma. Normalerweise ist der Nachweis einer genügenden Genauigkeit durch eine Parallelrechnung mit verdoppelten oder halbierten Feldweiten leicht zu führen. Zum Vergleich sind in der letzten Kolonne unserer Tabelle auch die mit $\Delta x = 0{,}2$ berechneten Werte eingetragen; hier zeigen sich Abweichungen gegenüber den genauen Werten in der fünften Stelle nach dem Komma.

Führen wir die Rechnung weiter bis $\ln x \geqq 1$, so finden wir auch noch den zu $\ln x = 1$ zugehörigen Wert von $x = e$, der Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Neben der Simpsonschen Regel bestehen auch andere Möglichkeiten der Flächenberechnung, wie etwa die Summation von Knotenlasten oder die Beziehungen, die in Lehr- und Handbüchern für die Auswertung der Arbeitsgleichung angegeben werden. Wesentlich ist, dass wir über einfache numerische Methoden zur Berechnung bestimmter Integrale verfügen.

Von den angegebenen Beziehungen aus lassen sich auch einfache Formeln für die numerische Differentiation aufstellen. Dabei ist jedoch darauf hinzuweisen, dass eine Differentiation auf die Zuverlässigkeit der Ausgangswerte empfindlicher ist als die Integration.

3. Die Konzeption des *Seilpolygons* geht auf den Franzosen Varignon (1654 bis 1722) zurück, der damit Kräfte in einer Ebene zusammensetzte. Eine wesentliche Erweiterung des Anwendungsbereiches gelang Karl Culmann; durch Einführung der nach ihm benannten Schlusslinie konnten mit dem Seilpolygon die Biegungsmomente eines Balkens zeichnerisch bestimmt werden. Die Uebertragung dieser Konstruktion auf die Bestimmung der Biegungslinie durch die Analogie von Otto Mohr haben wir schon erwähnt; weiter zu erwähnen wäre etwa noch die zeichnerische Lösung des Knickproblems nach Engesser-Vianello.

Wir brauchen nun nur die zeichnerische Konstruktion des Seilpolygons durch Aufstellung der Seilpolygongleichung in die Sprache der Rechnung zu übersetzen, um eine weitere Vergrösserung des Anwendungsbereiches zu erhalten, nämlich die numerische Lösung von totalen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

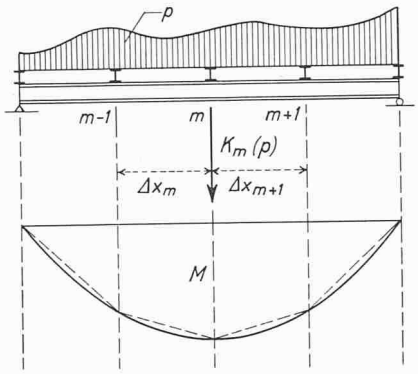


Bild 4

Wir gehen aus von der Berechnung der Momente in einem einfachen Balken mit indirekter Lastübertragung (Bild 4). Diese Berechnung wird normalerweise mit der bekannten Rekursionsformel

$$M_m = \sum_{A}^{m} Q_i \cdot \Delta x_i$$

durchgeführt. Schreiben wir diese Beziehung für die Momente M_m und M_{m+1} an,

$$M_m - M_{m-1} = Q_m \cdot \Delta x_m ,$$
$$M_m - M_{m+1} = Q_{m+1} \cdot \Delta x_{m+1} ,$$

und beachten wir, dass im Punkt m die Querkraft sich um den Betrag der Knotenlast $K_m(p)$ verkleinert, so erhalten wir durch Elimination der Querkräfte die Seilpolygongleichung

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta x_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\Delta x_{m+1}} = Q_m - Q_{m+1} = K_m(p)$$

oder bei gleichen Feldweiten

$$-M_{m-1} + 2\,M_m - M_{m+1} = \Delta x \cdot K_m(p) .$$

Setzen wir entsprechend der Analogie nach Bild 2 $M = y$, $p = -y''$, so erhalten wir den allgemeinen Zusammenhang

$$(3) \qquad y_{m-1} - 2\,y_m + y_{m+1} = \Delta x \cdot K_m(y'')$$

Diese Beziehung ist genau, ohne Rücksicht auf den Verlauf der Belastungsfunktion. Sie liefert uns, wenn die Knotenlasten $K(y'')$ bestimmt sind, die Werte y in den Knotenpunkten, also das «Sehnenpolygon» der wirklichen Funktion y.

Für die numerische Zuverlässigkeit der Rechnung ist es nun wichtig, die Grösse der Knotenlasten möglichst zutreffend zu erfassen; statisch bedeuten diese Knotenlasten die Auflagerkräfte der sekundären Längsträger in den Knotenpunkten. Die früher allein übliche «Trapezformel»,

$$(4a) \qquad K_m(p) = \frac{\Delta x}{6}\,(p_{m-1} + 4\,p_m + p_{m+1}) ,$$

ist bei stetigem Verlauf der Belastungsfunktion p und grober Feldteilung mit merklichen Fehlern belastet; eine wesentlich bessere Annäherung gibt die «Parabelformel»,

$$(4b) \qquad K_m(p) = \frac{\Delta x}{12}\,(p_{m-1} + 10\,p_m + p_{m+1}) ,$$

bei der der Belastungsverlauf durch eine Parabel, wie in Bild 3, angenähert wird. Zeigt die im übrigen stetig gekrümmte Belastungsfunktion p im Knotenpunkt m einen Knick α_m, so lässt sich die Knotenlast zu

$$(4c) \qquad K_m(p) = \frac{\Delta x}{12}\,(p_{m-1} + 10\,p_m + p_{m+1}) - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \alpha_m$$

einfach bestimmen (Bild 5).

Verwenden wir nun die Analogie $M = y$, $p = -y''$, so liefern uns die Gleichungen (3) und (4b) die Beziehung

$$(5a) \qquad y_{m-1} - 2\,y_m + y_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12}\,(y''_{m-1} + 10\,y''_m + y''_{m+1})$$

zwischen einer stetigen Funktion y und ihrer zweiten Ableitung y'', die wir ebenfalls als stetig voraussetzen. Diese Beziehung ist nun, im Gegensatz zu Gleichung (3), nicht mehr mathematisch genau, sondern ihre Genauigkeit hängt von der Güte der Annäherung der Knotenlast $K_m(y'')$ durch Gleichung (4b) und damit auch von der Grösse der Intervallteilung Δx ab.

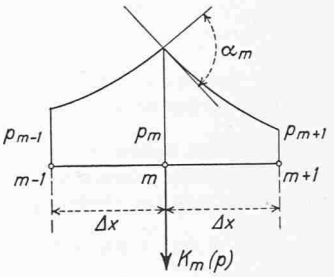


Bild 5

Wir können nun hier leicht einen Vergleich mit der Differenzenrechnung durchführen; an Stelle der Gleichung (5a) würden wir beim Rechnen mit endlichen Differenzen die Beziehung

$$(5b) \qquad y_{m-1} - 2\,y_m + y_{m+1} = \Delta x^2 \cdot y''$$

erhalten; der Unterschied zwischen der Seilpolygonrechnung und der Differenzenrechnung liegt in der verschiedenen Güte der Annäherung der Knotenlast $K_m(y'')$ an ihren genauen Wert. Mit der Seilpolygongleichung erreichen wir bei gleicher Intervallteilung eine wesentlich grössere Genauigkeit als mit der Differenzenrechnung, oder wir können uns bei gleicher geforderter Genauigkeit mit bedeutend grösseren Intervallen Δx begnügen, was eine wesentliche Verringerung des Arbeitsaufwandes bedeutet.

4. In der Seilpolygongleichung (3) erscheint die erste Ableitung der Funktion y' nicht mehr; y' ist eliminiert und tritt damit an Bedeutung hinter die Hauptfunktionen y und y'' (gerade Ableitungen) zurück. Dies ist aber auch bei den in der Baustatik auftretenden Anwendungsfällen genau gleich; bei der Bemessung eines Trägers tritt die Querkraft an Bedeutung hinter das Biegungsmoment oder die Neigung der Biegungslinie hinter die Durchbiegung zurück. Genau so, wie wir aber bei einem Balken die Querkraft aus dem Moment M und der Belastung p berechnen können, so lässt sich auch die *Nebenfunktion* y' aus y und y'' berechnen.

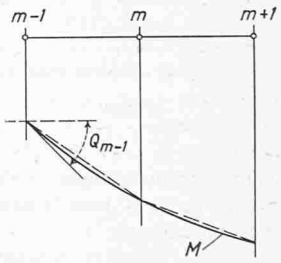


Bild 6

Nach Bild 6 ist die Querkraft im Punkt $m-1$ als Neigung der Momentenkurve gegeben durch

$$Q_{m-1} = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta x} + K^r_{m-1}(p) ,$$

oder es ist, nach Ausrechnung der Teilknotenlast in $m-1$ für das Feld rechts von $m-1$,

$$(6a) \qquad y'_{m-1} \cdot \Delta x = \\ = y_m - y_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{12}\,(3{,}5\,y''_{m-1} + 3{,}0\,y''_m - 0{,}5\,y''_{m+1}) .$$

Diese Beziehung wird für die Aufstellung von Rand- und Anfangsbedingungen benötigt, wenn bei der Lösung einer Differentialgleichung der Wert von y_A' gegeben oder vorgeschrieben ist.

Für den Punkt m finden wir analog

$$y'_m \cdot \Delta x = \\ = y_m - y_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{12} (1{,}5\, y''_{m-1} + 5{,}0\, y''_m - 0{,}5\, y''_{m+1})$$

oder auch

$$y'_m \cdot \Delta x = \\ = y_{m+1} - y_m - \frac{\Delta x^2}{12} (-0{,}5\, y''_{m-1} + 5{,}0\, y''_m + 1{,}5\, y''_{m+1})\ ;$$

der Mittelwert

$$\text{(6b)} \quad y'_m \cdot \Delta x = \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_{m-1}) + \frac{\Delta x^2}{12} (y''_{m-1} - y''_{m+1})$$

besitzt gegenüber den beiden Einzelwerten allgemein eine deutlich verbesserte Genauigkeit.

5. Damit haben wir die Grundlagen bereitgestellt, die uns die numerische Lösung der totalen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$\text{(7)} \quad y'' + b y' + c y + F(x) = 0,$$

erlauben; wir beschränken uns hier aus Raumgründen auf den etwas vereinfachten Fall $b = 0$:

$$\text{(7a)} \quad y'' + c y + F(x) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung beruht darauf, dass wir die eine der beiden Gruppen von Unbekannten, y'' oder y, eliminieren, um ein System von Bestimmungsgleichungen für die andere Gruppe zu erhalten. Die Möglichkeit der Elimination von y'' liefert uns die Seilpolygongleichung (3); wir haben nur die zu lösende Gleichung (7) für Δx-fache Knotenlasten anzuschreiben,

$$\text{(7b)} \quad \Delta x K_m(y'') + \Delta x K_m(c y) + \Delta x K_m(F) = 0,$$

um durch Einsetzen von

$$\Delta x K_m(y'') = y_{m-1} - 2 y_m + y_{m+1}$$

und

$$\Delta x\, K_m\, (c\, y) = \gamma\, (y_{m-1} + 10\, y_m + y_{m+1})$$

durch Ordnen die Bestimmungsgleichung

$$\text{(8)} \quad -y_{m-1}(1+\gamma) + y_m(2 - 10\gamma) - y_{m+1}(1+\gamma) = \\ = \Delta x \cdot K_m(F)$$

zu erhalten; dabei bedeutet

$$\gamma = \frac{c \cdot \Delta x^2}{12}.$$

Wir erkennen, dass auch veränderliche Koeffizienten c mit γ_{m-1}, γ_m, γ_{m+1} usw. ohne jede Schwierigkeit berücksichtigt werden können.

Eine Randbedingung «y_A gegeben» ersetzt uns die Bestimmungsgleichung für den Randpunkt A, während wir für «y_A' gegeben» aus den Gleichungen (6a) und (7a) die Bestimmungsgleichung

$$\text{(8a)} \quad y_A(1 - 3{,}5\gamma_A) - y_1(1 + 3{,}0\gamma_1) + y_2 . 0{,}5\gamma_2 = \\ \Delta x \cdot K_A(F) - y_A' \cdot \Delta x$$

aufstellen können.

6. Als Beispiel einer ersten Anwendungsform sei die Lösung eines einfachen *Anfangswertproblems*

$$\text{(9)} \quad y'' \pm y = 0$$

mit den Anfangswerten y_A, y_A' besprochen. Die Bestimmungsgleichung (8) ist hier in der Form einer Rekursionsformel

$$\text{(9a)} \quad y_{m+1} = \frac{2 \mp 10\gamma}{1 \pm \gamma} \cdot y_m - y_{m-1}$$

zu verwenden; sie liefert uns mit

$$\gamma = \frac{\Delta x^2}{12}$$

alle folgenden Werte von y, ausgehend von den durch die Anfangsbedingungen bestimmten Ausgangswerten y_A und y_1. Wir kennen die Lösungen:

$$\begin{array}{lll} y'' + y = 0 \text{ mit } y_A = 0,\ y_A' = 1 & \longrightarrow & y = \sin x \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_A = 1,\ y_A' = 0 & & y = \cos x \\ y'' - y = 0 \text{ mit } y_A = 0,\ y_A' = 1 & \longrightarrow & y = \operatorname{Sinh} x \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_A = 1,\ y_A' = 0 & & y = \operatorname{Cosh} x\ ; \end{array}$$

unsere einfache Rekursionsformel Gl. (9a) muss je nach dem Vorzeichen von γ sowohl die Kreisfunktionen $\sin x$, $\cos x$ wie auch die Hyperbelfunktionen $\operatorname{Sinh} x$, $\operatorname{Cosh} x$ liefern.

Beschränken wir uns auf die Anfangsbedingungen $y_A = 1$, $y_A' = 0$, so können wir die zweite Anfangsbedingung als Symmetriebedingung formulieren:

$$y_1 = \frac{1 \mp 5\gamma}{1 \pm \gamma} \cdot y_A .$$

In Tabelle 2 sind die Rechnungsergebnisse für

$$\Delta x = 0{,}40,\ \gamma = 0{,}01333,$$
$$y_{m+1} = 1{,}842105 \cdot y_m - y_{m-1},\ y_1 = 0{,}921053$$
$$y_{m+1} = 2{,}162162 \cdot y_m - y_{m-1},\ y_1 = 1{,}081081$$

zusammengestellt (6 Stellen berechnet, Ergebnis auf fünf Stellen auf- oder abgerundet).

Tabelle 2

x	$\cos x$	$\operatorname{Cosh} x$
0	1,00000	1,00000
0,4	0,92105	1,08108
0,8	0,69668	1,33747
1,2	0,36230	1,81075
1,6	—0,02947	2,57766
2,0	—0,41659	3,76257

Für $x = 2{,}0$ würden die genauen Werte nach Hütte $\cos x = -0{,}41615$, $\operatorname{Cosh} x = 3{,}76220$ betragen. Hätten wir dagegen mit der Differenzenrechnung [vgl. Gl. (5b), $K_m(y) = \Delta x \cdot y_m$] gerechnet, so hätten wir für $x = 2{,}0$ bei gleicher Intervallteilung die Werte $-0{,}42841$ bzw. 3,71501, also einen wesentlich grösseren Fehler bei gleichem Zeitaufwand erhalten.

Es ist doch erstaunlich, wie brav und zuverlässig die Punkte mit

$$y_{m+1} = 1{,}842105 \cdot y_m - y_{m-1}$$

sich periodisch bewegen, während sie mit

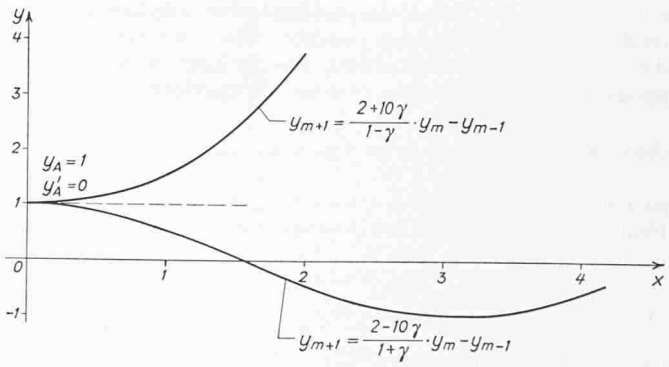


Bild 7

$$y_{m+1} = 2{,}162162 \cdot y_m - y_{m-1}$$

ebenso brav der Unendlichkeit zustreben (Bild 7).

Beachten wir, dass in der Gleichung

$$y'' - y = 0 \text{ mit } y_A = 1,\ y'_A = \pm 1$$

und damit in der Formel

$$y_{m+1} = \frac{2 + 10\,\gamma}{1 - \gamma} \cdot y_m - y_{m-1}$$

auch noch die Funktionen e^x und e^{-x} enthalten sind, so können wir feststellen, dass unsere numerische Lösung Gl. (9a) der Differentialgleichung (9) alle jenen Funktionen der Analysis enthält, die in den Hand- und Taschenbüchern des Ingenieurs normalerweise tabelliert sind. Es wird nun aber hoffentlich niemandem einfallen, sich mit Gleichung (9a) Privattabellen dieser Funktionen für den praktischen Gebrauch auszurechnen; eine solche Anwendung würde nicht dem Sinn unserer Ueberlegungen entsprechen.

Diese Ueberlegungen sollen vielmehr eine für die Bedeutung der numerischen Methoden wesentliche Tatsache veranschaulichen: die Analysis kann uns nur eine beschränkte Auswahl von Funktionen zur Lösung unserer Probleme zur Verfügung stellen, und diese wenigen Funktionen entsprechen nur den einfachsten Grundfällen. Sind diese einfachsten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt, so sind wir auf mühsame Reihenentwicklungen angewiesen. Auf was für unnatürliche Operationen dies führen kann, ist etwa aus der Plattenberechnung bekannt, wo wir gezwungen sind, eine gleichmässig verteilte Belastung p nach der Fourier-Analyse in Doppelreihen zu entwickeln.

Da wir aber die vollständige Differentialgleichung (7) für alle in den Anwendungen vorkommenden Fälle für konstante oder veränderliche Koeffizienten, unabhängig von ihrem Vorzeichen, und für jeden beliebigen Verlauf der Belastungsfunktion in gleicher Weise numerisch lösen können, enthält diese numerische Lösung nicht nur die uns bekannten Funktionen der Analysis, sondern auch noch die uns nicht bekannten oder noch nicht existierenden Funktionen, die uns die Analysis somit nicht zur Verfügung stellen kann, die jedoch die Lösung unserer Probleme darstellen und die wir deshalb im gegebenen Einzelfall benötigen, d. h. ihrem numerischen Verlauf, wenn auch nicht ihrem mathematischen Charakter nach, berechnen können müssen. Alle diese benötigten unbekannten Funktionen stecken in unserer numerischen Lösung drin; es ist unsere Aufgabe, sie herauszuholen, wie dies vorstehend für einige der einfachsten Grundfälle gezeigt wurde.

7. Als Beispiel für ein *Randwertproblem* sei noch die Torsion mit Flanschbiegung (Timoshenko-Torsion) eines Trägers mit symmetrischem I-Querschnitt betrachtet. Dem äusseren Torsionsmoment T wird teils durch die Flanschquerkräfte $\mathfrak{Q}$, teils durch die inneren Torsionsmomente t Gleichgewicht gehalten:

$$T = t + \mathfrak{Q} \cdot h = G J_d \cdot \varphi' - E J_{Fl} \cdot h \cdot \eta'''$$

Die Verteilung von T auf die beiden Anteile wird durch die Elastizitätsbedingung

$$\eta = \varphi \cdot \frac{h}{2}$$

bestimmt, oder es ist mit

$$\frac{a^2}{l^2} = \frac{2\,G\,J_d}{E\,J_{Fl} \cdot h^2} = \frac{4\,G\,J_d}{E\,J_y \cdot h^2}$$

die Grundgleichung

$$\text{(10a)}\quad T = G \cdot J_d \cdot \left(\varphi' - \frac{l^2}{a^2} \cdot \varphi'''\right)$$

zu lösen. Nun ist jedoch zu beachten, dass das äussere Torsionsmoment T,

$$T = T_0 + X \cdot T_X,$$

bei beidseitiger Festhaltung der Stabquerschnitte statisch unbestimmt ist, was nur deshalb meist nicht beachtet wird, weil bei symmetrischen Trägern das Torsionsmoment T durch die Querkraftanalogie bestimmbar ist. Es ist deshalb wohl gerechtfertigt, von der von S. Timoshenko aufgestellten Torsionsgleichung (10a) durch Differentiation und mit

$$T' = -m_d,\quad \mathfrak{M} = -E J_{Fl} \cdot \eta'' = -E J_{Fl} \frac{h}{2} \varphi''$$

auf die Bestimmungsgleichung für die Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$ überzugehen:

$$\text{(10b)}\quad \mathfrak{M}'' - \frac{a^2}{l^2} \cdot \mathfrak{M} + \frac{m_d}{h} = 0\,.$$

Bei Belastung durch ein konzentriertes äusseres Drehmoment M_d tritt nun die Besonderheit auf, dass die Kurve der Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$ beim Lastenangriffspunkt eine Unstetigkeit α_m infolge der konzentrierten Flanschbelastung

$$\mathfrak{P} = \frac{M_d}{h}$$

enthält, die jedoch mit $\alpha_m = \mathfrak{P}_m$ (Bild 5) durch Gleichung (4c) leicht in der Knotenlast für $\mathfrak{M}$ bzw. im Belastungsglied der für diesen Fall angeschriebenen Gleichung (8) berücksichtigt werden kann; mit

$$\gamma = \frac{a^2}{l^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{12}$$

erhalten wir das System der dreigliedrigen Bestimmungsgleichungen zu

$$\text{(10c)}\quad -\mathfrak{M}_{m-1}(1-\gamma) + \mathfrak{M}_m(2 + 10\gamma) - \mathfrak{M}_{m+1}(1-\gamma) = \\ = \Delta x\,.\,\frac{M_{dm}}{h} \cdot (1 + \gamma)\,.$$

Es sei noch ein Zahlenbeispiel (Bild 8) mit

$$J_{Fl} = 175\ \text{cm}^4,\ J_d = 24{,}0\ \text{cm}^4,\ G = \frac{3}{8}\,E,$$

$$\frac{a^2}{l^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 24{,}0}{8 \cdot 175 \cdot 23{,}8^2} = 0{,}181585 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta x = \frac{l}{8} = 50\ \text{cm},\ \gamma = 0{,}181585 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{50^2}{12} = 0{,}037830\,,$$

$$\Delta x \cdot \frac{M_d}{h}(1 + \gamma) = 51{,}8915 \cdot \frac{M_d}{h}$$

skizziert. Tabelle 3 enthält die Auflösung des Gleichungssystems für frei drehbare Flanschenden, $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = 0$, das für die untersuchte symmetrische Belastung M_d in m nur für den halben Träger anzuschreiben ist.

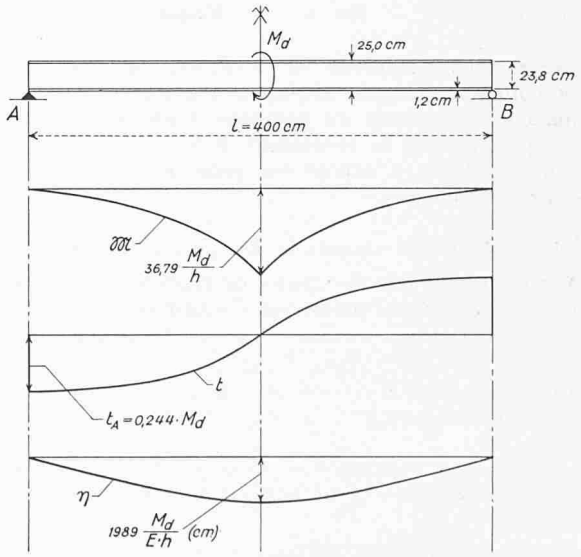


Bild 8

Tabelle 3

	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_m$	Bel. gl.
1	2,37830	—0,96217			—
2	—0,96217	2,37830 —0,38958	—0,96217		—
	—	1,98872	—0,96217		—
3		—0,96217	2,37830 —0,46551	—0,96217	—
		—	1,91279	—0,96217	—
m			—1,92434	2,37830 —0,96798	51,8915
			—	1,41032	51,8915
$\mathfrak{M} =$	3,623	8,954	18,508	36,794	$\cdot \frac{M_d}{h}$

Aus den Flanschbiegungsmomenten $\mathfrak{M} = -EJ_{Fl} \cdot \eta''$ ergeben sich die Flanschausbiegungen η als Seilpolygon, während nun die Torsionsanteile $t = GJ_d \cdot \varphi' = GJ_d \cdot {}^2/h \cdot \eta'$ durch Differentiation mit den Gleichungen (6) bestimmt werden können, wenn man nicht vorzieht, diese durch numerische Lösung der Timoshenko-Gleichung (10a) mit $t_A' = t_B' = 0$ direkt zu lösen.

Hätten wir mit $\Delta x = l/4 = 100$ cm, $\gamma = 0{,}151321$, gerechnet, so hätten wir $\mathfrak{M}_m = 37{,}101\ M_d/h$, also um 0,83% grösser erhalten, während mit $\Delta x = l/2 = 200$ cm sich aus einer einzigen Gleichung $\mathfrak{M}_m = 39{,}869\ M_d/h$ oder um 8,36 % grösser ergeben hätte. Wir können daraus schliessen, dass für die gewählte Teilung $\Delta x = 50$ cm der Fehler von $\mathfrak{M}_m$ kleiner als 0,1 % sein wird. Diese praktisch mehr als genügende Genauigkeit wird dann eingehalten, wenn durch entsprechende Intervallteilung $\gamma \leqq 0{,}05$ gehalten wird.

8. Durch Kombination lassen sich die skizzierten Grundlagen erweitern, so dass auch höhere Differentialgleichungen numerisch gelöst und auch Membranen, Platten und Scheiben berechnet werden können. Immer aber muss das Ziel einer numerischen Methode sein, das gewünschte Ergebnis in genügender Genauigkeit mit einer möglichst kleinen Zahl von Bestimmungsgleichungen zu erhalten; an diesem Grundsatz ändern auch die neuesten Hilfsmittel, die elektronischen Rechenmaschinen, nichts.

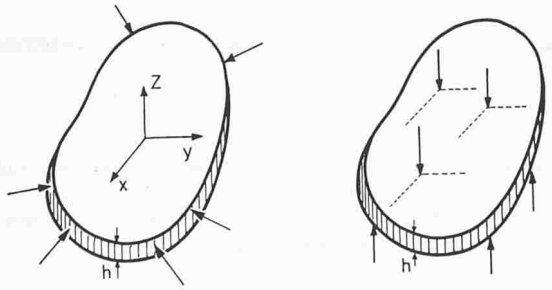
Calcul numérique des plaques et des parois minces

Par **Pierre Dubas,** professeur assistant, EPF, Zurich *)

DK 624.073:518.12

Introduction

Le présent article traitera le calcul numérique des corps plans minces, c'est-à-dire des corps dont l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions du feuillet moyen, équidistant des faces. Selon le mode de sollicitation (fig. 1), on parle de *plaques minces fléchies,* lorsque les forces extérieures s'exercent normalement aux faces, ou de *parois minces,* lorsque les lignes d'action sont situées dans le feuillet moyen et que la distribution est uniforme sur l'épaisseur [1]).



Parois mince Fig. 1. Plaque mince fléchie

Nous nous proposons de montrer, dans les grandes lignes, comment on peut appliquer à ces problèmes à deux dimensions la *méthode du polygone funiculaire.* Dans son article qui précède, le professeur *F. Stüssi,* le créateur de cette méthode, en a exposé les principes; nous les supposerons donc connus.

Théorie générale des plaques et des parois minces

Il n'est certes pas nécessaire de rappeler les hypothèses simplificatrices et les conditions d'équilibre et de compatibilité qui permettent d'établir les équations différentielles régissant les problèmes bidimensionnels. Nous nous contenterons ici d'écrire ces équations bien connues [3]).

Dans le cas des *plaques fléchies isotropes,* il s'agit de l'équation de *Lagrange:*

$$(1) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

où w représente l'ordonnée de la surface élastique, p désigne la charge appliquée et $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ est une constante dépendant de l'épaisseur h de la plaque et de l'élasticité de la matière.

Lorsque la plaque est anisotrope, ou plus spécialement orthogonalement anisotrope (en abrégé *orthotrope*), c'est-à-dire lorsqu'elle présente, par rapport à ses propriétés élastiques, deux directions privilégiées parallèles aux axes de coordonnées, on obtient l'équation de *Boussinesq*:

$$(2) \qquad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x,y)$$

Les constantes D_x, D_{xy}, D_y sont fonctions des rigidités à la flexion et à la torsion de la plaque orthotrope.

Ces équations différentielles permettent en principe de déterminer, en tenant compte des conditions au contour dont nous allons parler, les ordonnées w de la surface élastique. Les sollicitations intérieures sont alors données par les relations bien connues, reproduites ci-dessous pour les plaques isotropes:

(3a) Moments de flexion: $M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$

(3b) Moment de torsion: $M_{xy} = -D\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$

(3c) Efforts tranchants: $Q_x = -D\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$

(3d) Réactions d'appui: $V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$

M_y, Q_y, V_y par permutation de x et y.

*) Conférence faite le 11 novembre 1960 à l'occasion de la réunion du groupe professionnel des ingénieurs S. I. A. des ponts et charpentes.

1) Il s'agit donc d'un problème d'élasticité plane; on dit parfois tranche mince ou disque, ce qui est la traduction littérale du terme allemand *Scheibe.*

2) *F. Stüssi:* Numerische Methoden der Baustatik, Schweizerische Bauzeitung, page 275 du présent numéro.

3) On consultera par exemple, pour les plaques minces, *S. Timoshenko* et *S. Woinowsky-Krieger:* Theory of Plates and Shells, 2ème édition, McGraw-Hill, 1959; pour les parois minces, *S. Timoshenko* et *J. N. Goodier:* Theory of Elasticity, 2ème édition, McGraw-Hill, 1951.