

Zeitschrift: Schweizer Ingenieur und Architekt
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 114 (1996)
Heft: 16/17

Artikel: Euler'sche Knickformel
Autor: Herrmann, George
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-78953>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

George Herrmann, Davos

Euler'sche Knickformel

Gut 250 Jahre ist es her, dass Euler seine Knickformel entwickelte und publizierte. Im Lichte des heutigen Wissens wird sie hiermit nochmals kurz dargestellt und gewürdigt.

Im Jahre 1944 veröffentlichte Dr. Fritz Stüssi, Professor für Stahlbau an der ETH Zürich, einen Aufsatz [1] in der Schweizerischen Bauzeitung unter dem Titel «200 Jahre Euler'sche Knickformel». In seiner Darstellung verwies Stüssi auf die grosse Bedeutung dieser Knickformel für die Entwicklung der Festigkeitslehre und der Baustatik, die so nebenbei in einem Anhang (Additamentum I) «Über die elastischen Kurven» zu seinem grundlegenden Werk über Variationsrechnung [2] veröffentlicht wurde. Diese Bedeutung für das Ingenieurwesen war für Stüssi Grund genug, an die Entstehung der Euler'schen Knickformel zu erinnern.

Ein solches Nachskizzieren der Überlegungen Eulers macht den Hauptteil des Beitrags von Stüssi aus. In seiner Arbeit bezieht er sich auf eine Euler'sche Publikation aus dem Jahre 1757 [3], in welcher eine andere (und einfachere) Herleitung der berühmten Formel aufgezeigt wird. Ergänzend erwähnt Stüssi einige nachfolgende Entwicklungen des Knickproblems, speziell die 150 Jahre später erfolgten Versuche von L. von Tétmajer und die Erweiterung auf den unelastischen Bereich von Engesser und von Kärman.

1994 wurde die Euler'sche Knickformel 250 Jahre alt, und es schien mir reizvoll, daran zu erinnern. Es schien mir ferner angebracht, in diesem Zusammenhang einige Entwicklungen der letzten Jahre zu erwähnen, welche auf der Euler'schen Knickformel basieren und welche Stüssi 1944 nicht darlegen konnte.

Zunächst sollten wir jedoch die eigentliche Euler'sche Knickformel vor

Von der Tragkraft der Säulen.

37. Was vorher über die erste Art bemerkt worden ist, kann dazu dienen, die Tragfähigkeit der Säulen zu bestimmen. *AB* (Fig. 13) sei eine vertikal über der Basis *A* stehende Säule;

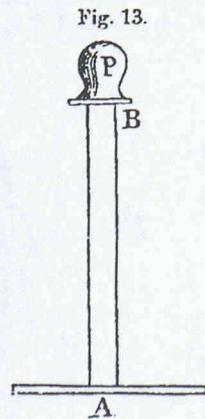
sie trage das Gewicht *P*. Die Säule sei so beschaffen, daß sie nicht gleiten kann. Ist das Gewicht *P* nicht zu groß, so ist höchstens eine Verbiegung der Säule zu befürchten. In diesem Falle kann die Säule gleichsam als mit Elastizität begabt angesehen werden. Es sei die absolute Elastizität der Säule = $E k^2$, ihre Höhe = $2f = a = AB$. Wir haben vorher in Nr. 25 gesehen, daß die Kraft, welche erforderlich ist, um diese Säule in noch so geringem Maße zu verbiegen

$$\frac{\pi^2 E k^2}{4 f^2} = \frac{\pi^2}{a^2} E k^2$$

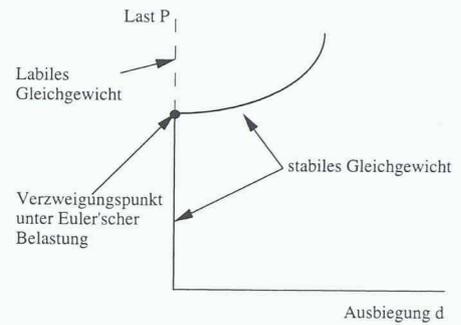
ist. Wenn daher das zu tragende Gewicht *P* nicht größer ist als

$$\frac{E \pi^2 k^2}{a^2},$$

ist überhaupt keine Verbiegung zu befürchten. Ist *P* jedoch größer, so kann die Säule der Verbiegung nicht widerstehen. Bleibt aber die Elastizität der Säule und also auch ihre Dicke ungeändert, so wird die Last *P*, die sie ohne Gefahr zu tragen vermag, sich umgekehrt wie das Quadrat der Höhe verhalten. Eine doppelt so hohe Säule wird nur den vierten Teil der Last tragen können. Dies kann man sich besonders bei hölzernen Säulen zu Nutzen machen, die der Verbiegung sehr unterworfen sind.



nen Säulen zu Nutzen machen, die der Verbiegung sehr unterworfen sind.



2 Gleichgewicht und Verzweigungspunkt

Augen haben. Am einfachsten erscheint eine vollständige Wiedergabe des (relativ) kurzen Paragraphen 37 (Von der Tragkraft der Säulen) aus dem erwähnten Additamentum, in der deutschen Übersetzung von H. Linsenbarth. Einleitend sei bemerkt, dass Euler in diesem Anhang neun Arten von elastischen Kurven unterscheidet, im Paragraphen 37 kommt er auf die erste Art zurück.

Was Euler mit $E k^2$ bezeichnet und absolute Elastizität nennt, nennen wir heute die Biegesteifigkeit eines Stabes und bezeichnen sie gewöhnlich mit $E I$, wo E der Elastizitätsmodul ist und I das Trägheitsmoment des Querschnittes. (Es ist nicht einsichtig, woher Euler die Bezeichnung $E k^2$ nimmt.)

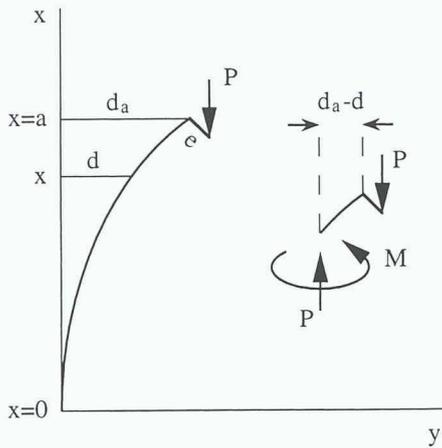
Euler hat also den Ausdruck für jene Last *P* gefunden, unter welcher die Säule *AB* sich unendlich wenig verbiegt. Ist die Last kleiner als dieses kritische *P*, so bleibt die Säule gerade (und zusammengedrückt). Ist die Last jedoch grösser als die kritische Belastung, so wird die Säule verbogen, d.h. sie knickt aus. Man kann zeigen, dass die gerade, unausgebogene Form der Säule unter dieser Last, die grösser ist als *P*, immer noch im Gleichgewicht ist, doch ist dieses Gleichgewicht nicht mehr stabil. Unter der kritischen Belastung *P* findet also eine Verzweigung des Gleichgewichtes statt (2).

Wie ist nun der Ausdruck «in noch so geringem Masse» zu verstehen? Um dies zu erfassen, betrachten wir eine Säule der Länge *a*, an deren Ende eine Kraft *P* exzentrisch (Exzentrizität *e*) angreift (3).

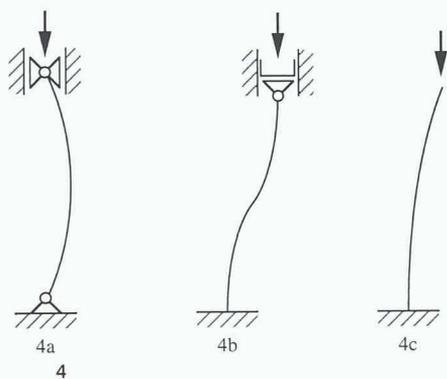
Unter dieser Belastung *P* wird sich die elastische Säule verbiegen, $d = d(x)$. Um das obere Stück der Säule zwischen *x* und *a* im Gleichgewicht zu halten, muss im Querschnitt $x = d$ ein Moment *M* wirken, dessen Grösse sich ergibt als $M = P(e + d_a - d)$.

Andererseits wird in der elementaren, klassischen Biegetheorie (von Bernoulli-Euler) angenommen, dass das Querschnittsmoment *M* proportional der Krümmung des Stabes sei und dass die

1 Aus Leonhard Euler: Sur la force des colonnes. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, 1757; übersetzt von H. Linsenbarth



3 Exzentrische Belastung



4 Verformungen bei verschiedener Lagerung

Krümmung sich durch die zweite Ableitung der Durchbiegung ausdrücke. Der Proportionalitätsfaktor ist die Biegesteifigkeit EI und somit $M = EI d^2d/dx^2 = EId''$.

Nun kann M in diesen beiden Gleichungen eliminiert werden, und man erhält die Differentialgleichung der elastischen Linie (Durchbiegung): $EId'' = P(e + d_a - d)$. Die allgemeine Lösung dieser nichthomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung, mit $P/(EI) = \kappa^2$ kann wie folgt angeschrieben werden: $d(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + e + d_a$.

Die noch unbekanntenen Konstanten A , B und d_a können aus den Randbedingungen bestimmt werden. Die Säule ist unten ($x = 0$) eingespannt, d.h. dort verschwindet die Durchbiegung und deren Ableitung. Am oberen Ende der Säule gilt $d(a) = d_a$ und somit $d(x) = e(1 - \cos \kappa x) / (\cos \kappa a)$ und speziell am oberen Ende, für $x = a$: $d(a) = d_a = e(1 / \cos \kappa a - 1)$. Man sieht, dass bei einer Belastung, die $\cos \kappa a = 0$ entspricht, d.h. bei $\kappa a = \pi/2$ oder $P = \pi^2 EI / (4a^2)$ die Ausbiegung $d(a)$ unabhängig der Grösse der Exzentrizität e unendlich gross wird. Man spricht dann von einem Knicken des Stabes unter der (kritischen) Knicklast P : $P = \pi^2 EI / (4a^2)$

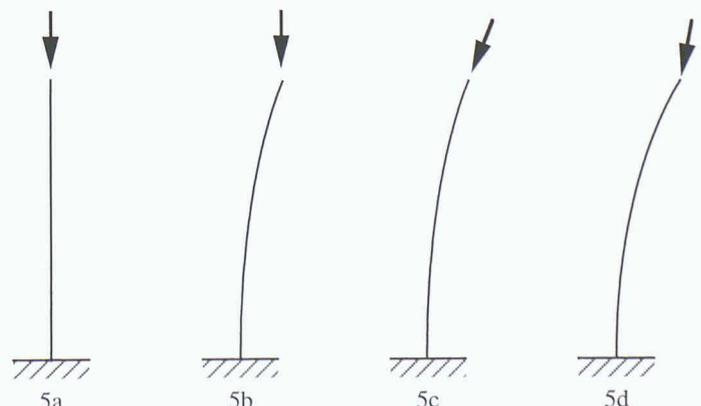
Es ist festzuhalten, dass wegen unserer grundlegenden Annahmen betreffend kleiner Durchbiegungen im Vergleich zur Länge des Stabes (Linearität) die Gültigkeit unserer Beziehungen sich eben nur auf kleine $d(a)$ erstreckt. Würden wir diese Annahmen revidieren und mit einer nicht-linearen Theorie für grosse Durchbiegungen arbeiten, so ergäbe sich das Verhalten gemäss (2), falls die Exzentrizität verschwindet.

Vergleichen wir den oben stehenden Ausdruck mit dem von Euler hergeleiteten, so stellen wir fest, dass bei Euler der Faktor $1/4$ fehlt. Der Grund dafür ist, dass Euler den Randbedingungen seiner Säule keine besondere Beachtung geschenkt hat. Man muss annehmen, dass er den Fall einer beidseits gelenkig gelagerten Säule betrachtet hat (4a), doch soll bemerkt werden, dass die Lagerungsart in (4b) die gleiche Knicklast ergibt, weil in beiden Fällen die (unendlich kleine) Ausbiegung durch eine halbe Welle der Sinuskurve dargestellt wird. Wir hingegen untersuchten die unten eingespannte, oben freie Säule (4c), deren Ausbiegung durch ein Viertel der Wellenlänge der Sinuskurve beschrieben wird. Da die Länge quadratisch in die Knickformel eingeht, ergibt sich der Faktor $1/4$.

Es ist für Knickprobleme relevant, dass die Euler'sche Formulierung nicht ein lineares, sondern genau genommen ein linearisiertes Problem darstellt. Dies bedeutet, dass das Verhalten der Last P nicht nur im ursprünglichen, nicht ausgebogenen, sondern auch im verformten Zustand angegeben werden muss.

Wenn die Belastung ein Gewicht ist (wie es Euler annahm), verändert sich die Richtung der Kraft, die auf die Säule wirkt (5a) im verformten Zustand nicht (5b). Wenn aber die Kraft, die auf das freie Ende der Säule wirkt, im verformten Zustand ihre Richtung nicht behält, und z.B. immer tangential (5c) oder unter einem bestimmten Winkel zur Endtangente (5d)

5 Säule unter mitgehender Last



Literatur

[1] F. Stüssi, 200 Jahre Euler'sche Knickformel, Schweiz. Bauzeitung, Band 123, Nr. 1, S. 1-2, 1944.

[2] L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae & Genevae, M.M. Bousquet & Socios, MDCCXLIV. Additamentum I: De curvis elasticis.

[3] L. Euler, Sur la Force des Colonnes. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, Tom. xm, 1757.

Weitere Literatur

Jakob Bernoulli (1691, 1694, 1695) und Leonhard Euler (1744), Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven, übersetzt und herausgegeben von H. Linsenbarth, Verlag W. Engelmann, Leipzig, 1910. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 175).

G. Herrmann, Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces, Applied Mechanics Reviews, Vol. 20, No. 2, pp. 103-108, Febr. 1967.

G. Herrmann, Dynamics and Stability of Mechanical Systems with Follower Forces, NASA Contractor Report NASA CR-1782, November 1971.

H. Ziegler, Principles of Structural Stability, Blaisdell, Waltham, 1968.

G. Domokos and P. Holmes, Euler's Problem, Euler's Method, and the Standard Map; or, the Discrete Charm of Buckling, Journ. of Nonlinear Science, Vol. 3, pp. 109-151, 1993.

Leonhard Euler, 1707-1783, Beiträge zu Leben und Werk, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt, Birkhäuser, Basel, 1983

N.N. Bogoliubov, G. K. Milchailov, A.P. Juschkewitsch, Entwicklung der Ideen von Leonhard Euler und zeitgenössische Wissenschaft (russisch). Sammlung von Aufsätzen, Moskau, 1988.

C.F. Kollbrunner und G. Herrmann, Stabilität der Platten im plastischen Bereich (Stability of Plates in the Plastic Range), Theorie von A. Iljushin mit Vergleichswerten von durchgeführten Versuchen. Zweiter Bericht der T.K.V.S.B über Plattenausbeulung, Nr. 20 der Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der ETH Zürich, herausgegeben von Prof. Dr. F. Stüssi und Prof. Dr. P. Lardy, Zürich, 1947.

wirkt, dann werden die Randbedingungen im Vergleich zum Verhalten in (5b) verändert. Und wenn man, im Sinne Eulers, die Säule unter einer mitgehenden Last (5c) untersucht und einen Verzweigungspunkt der Gleichgewichtskurven bestimmen möchte, wie im Falle der Belastung nach (5b), dann kommt man zum Ergebnis, dass es überhaupt keinen solchen Verzweigungspunkt gibt, und dass die Belastung gegen unendlich anwachsen kann, ohne dass überhaupt etwas passiert, was mit Stabilität oder Instabilität zu tun hätte. Dieser Sachverhalt führt zu einem Paradox, das erst 1952 geklärt wurde. Es stellte sich heraus, dass die Euler'sche Methode, die einen Verzweigungspunkt der Gleichgewichtslagen sucht, im allgemeinen auf statische Probleme beschränkt ist. Es gibt aber zahlreiche mechanische Systeme (z.B. durchströmte Rohre, angetriebene Raketen, Turbinenschaufeln, angeströmte Flugzeugflügel), welche ihren stabilen Zustand verlieren, indem sie nicht in eine (benachbarte) Gleichgewichtslage übergehen wie bei Euler, sondern, durch kleine Erregungen verursacht, mit immer grösseren Amplituden zu schwingen anfangen und somit zur Zerstörung des Systems führen. Es kann hier an das spektakuläre Flattern und den Einsturz der Tacoma-Hängebrücke (1940) erinnert werden.

Während die Euler'sche Methode einen «statischen» Verlust der Stabilität bestimmen kann, den wir als «Divergenz» bezeichnen können, gibt es auch die umfangreiche Kategorie der «dynamischen» Stabilitätsverluste, die wir gemeinsam als «Flattern» identifizieren können. Die Euler'sche Methode ist nicht in der Lage, das Flattern zu untersuchen.

Ein weiterer bemerkenswerter Umstand betrifft den Einfluss der Dämpfung.

Bei statischen (d. h. Euler'schen) Problemen verschwindet der Einfluss der Dämpfung auf die kritische Last, wenn diese Dämpfung immer kleiner und schliesslich Null wird. Ganz anders verhält es sich bei Systemen, die ihre Stabilität dynamisch, d.h. durch Flattern verlieren. Bei verschwindender Dämpfung ist die kritische Belastung verschieden und kleiner im Vergleich zu jener, die man ohne jegliche Berücksichtigung der Dämpfung errechnen würde. Dieses wieder scheinbar paradoxe Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass die Dämpfung bei Systemen, die Flattern können, noch eine zusätzliche Rolle spielen kann. Sogar verschwindend kleine Dämpfung bewirkt noch Phasenverschiebungen zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden des Systems, welche eine vermehrte Energieaufnahme des Systems aus der Umgebung ermöglichen. Und dies führt dann natürlich zu einer verminderten kritischen Belastung.

Zusammenfassend, und Stüssis Schlussätze paraphrasierend, lässt sich sagen, «dass die Leistung Eulers bei der Entdeckung der Knickformel angesichts der damaligen Unkenntnis der uns heute geläufigen Begriffe der Biegelehre um so höher bewertet werden muss. Seine Methodik, die bei der Überwindung mathematischer Schwierigkeiten auf die Erfassung des Wesentlichen ausgeht, ist für uns auch heute noch wertvoll, aufschlussreich und von vorbildlicher Klarheit und Eleganz der Darstellung.»

Doch das Gebiet der Stabilität mechanischer Systeme ist ein weites Feld, und die Entwicklung der letzten 50 Jahre, basierend auf der Euler'schen Knickformel, hat unser Wissen wesentlich erweitert, wie diese kurze Darstellung zu vermitteln versucht. Es ist aber beileibe nicht so, dass diese Ent-

wicklung nun abgeschlossen wäre. Unsere Horizonte werden immer weiter geschoben, und es ist zu erwarten, dass jemand in weiteren 50 Jahren genügend Stoff haben sollte, um über die neuen Fortschritte des Knickproblems zu berichten.

Adresse des Verfassers:

George Herrmann, Dr. sc. techn., dipl. Ing. ETH, Professor Emeritus, Stanford University, Ortsstrasse 7, 7270 Davos Platz

Verdankung:

Für die Überlassung von Kopien und Originalen zahlreicher Dokumente und für anregende Diskussionen sei an dieser Stelle vor allem Dr. E.A. Fellmann, Leiter des Euler-Archivs in Basel, sowie Professor G.K. Michailov, Russische Akademie der Wissenschaften in Moskau, mein wärmster Dank ausgesprochen.