Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 51 (1964)
Heft: 6-7

Artikel: Moderne Begriffe in der Mittelschulmathematik [Fortsetzung]
Autor: Regli, Franz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-529212

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Den tragenden Unterbau gibt der kollektiven Erziehung die marxistische Ideologie, welche das Wesen des Menschen und die Gesamtwirklichkeit der gesellschaftlichen Beziehungen gleichsetzt.
Personale und kollektive Erziehung begreifen bei aller Verschiedenheit im jeweils gegebenen Vorwissen um die Wesensbestimmung des Menschen Erziehung als Lebenshilfe aus der Wertwelt einer geschlossenen Lebensordnung heraus. Damit wird die strukturelle Nähe beider Grundformen erzieherischen Bemühens in der Frage nach der tragenden Institution der Erziehung leicht verständlich. Kollektive Erziehung versucht auf dem Weg über das Jugendkollektiv den technisch bedingten Lebensstil unserer Epoche zum Werkzeug einer Gesinnungsgemeinschaft großen Stils zu machen. Die damit verbundene Einsicht in den erzieherischen Wert der geschlossenen Gruppe erweist auch für die personale Erziehung im Raum einer pluralistischen Gesellschaft die *Notwendigkeit, in Theorie und Praxis die Individualerziehung durch eine recht verstandene Gemeinschaftserziehung zu ersetzen.* Dabei bietet *die geschlossene Gruppe als Gesinnungsgemeinschaft im Glauben* die besten pädagogischen Voraussetzungen.
Das Vorhandensein einer geschlossenen Gruppe und eines Jugendkollektivs ist noch nicht personale bzw. kollektive Erziehung. Entscheidend ist, was in dem von einer relativen Einheitlichkeit bestimmten Raum jeweils erzieherisch geschieht. In heilsgeschichtlicher Sicht ist für die Verwirklichung personalen Lebens die Begegnung zwischen dem gnädig handelnden Gott und dem zum Glauben berufenen Menschen grundlegend. Personale Erziehung wird dabei zum Dienst am Glauben mit dem Ziel der Begegnungsreife des Menschen. Der erzieherische Dienst an dieser Begegnung umgreift alle Bereiche menschlichen Lebens, ja geschöpflichen Daseins und verlangt damit auch eine Erziehung zur Weltoffenheit. Kollektive Erziehung dagegen ist auf dem Hintergrund des marxistischen Geschichtsverständnisses durch die Naturgesetzmäßigkeit einer Technik der Erziehung geprägt, in der die Parallele Fabrik-Erziehung dazu führt, jede Energiequelle im jungen Menschen einsehbar zu machen, um sie den Forderungen der Gesellschaft entsprechend einzusetzen. Kollektive Erziehung kennt eine Begegnung, wie sie den Kern der geistigen Bewegung personalen Seins darstellt, nicht; sie bedarf deshalb der *Suggestion*, um durch das Setzen *kollektiver Motive* das bloß *äußere Müssen pädagogischer Technik* in ein *inneres Müssen umzuwandeln*, in ein *Nicht-mehr-anders-denken-Können.*

*

Für die gewährte Gastfreundschaft, die der Schreibende in München erfahren durfte, sei auch an dieser Stelle bestens gedankt.
Der KLS freut sich darüber, daß der erste Landesvorsitzende der KEB, Herr Ludwig Glück, an unserer Jahrestagung in Sitten teilnimmt. Herzlich willkommen! *W. T.*

Sekundar- und Mittelschule

Moderne Begriffe in der Mittelschulmathematik

2. Teil

Franz Regli, dipl. Math., Luzern

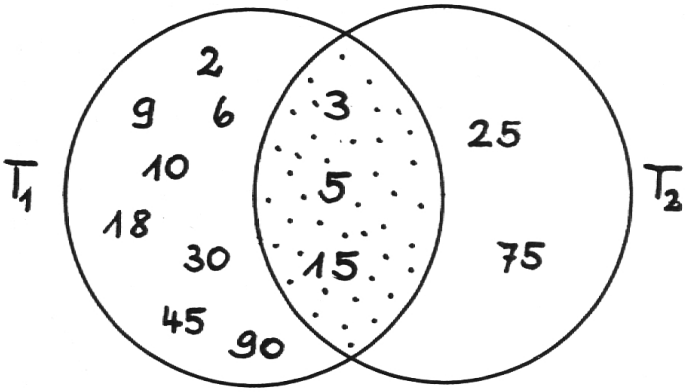
(Vgl. ‹Schweizer Schule› Nr. 6/7, 1963)

3. *Der Mengenbegriff im Rechenunterricht*

Wesentliche Aufgabe des Rechenunterrichtes an der Mittelschule ist, den Übergang zur nächsthöheren Stufe mathematischen Denkens sorgfältig vorzubereiten und reibungsfrei gestalten zu helfen. Einfache geometrische Abbildungen und elementare Begriffe der Mengenlehre machen den Schüler zunächst in mehr spielerischer Weise mit der neuen Begriffswelt vertraut. Beispiele zu endlichen Mengen bieten Klassenzimmer und Umwelt in Hülle und Fülle. Einfache Aufgaben aus dem Leben führen zur Klärung der Begriffe Teilmenge, Mächtigkeit, Vereinigung und Durchschnitt. Die Einführung der Zeichen $\in, \notin, \subset$ usw. drängt sich von selbst auf. Als erste unendliche Mengen ergeben sich die Mengen der natürlichen und der geraden natürlichen Zahlen.
Die Zahlenlehre bietet sodann Gelegenheit, diese Begriffe anzuwenden:

Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

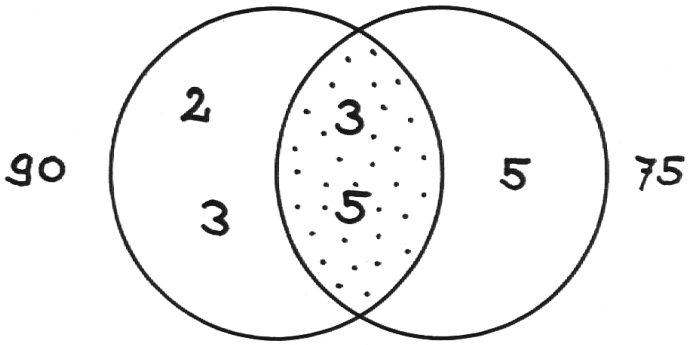
T_1 sei die Menge der Teiler von 90, T_2 diejenige von 75.
Die Menge der gemeinsamen Teiler ist $T = T_1 \cap T_2 = \{3, 5, 15\}$



15 ist ggT von 90 und 75.

Primfaktorzerlegung: $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

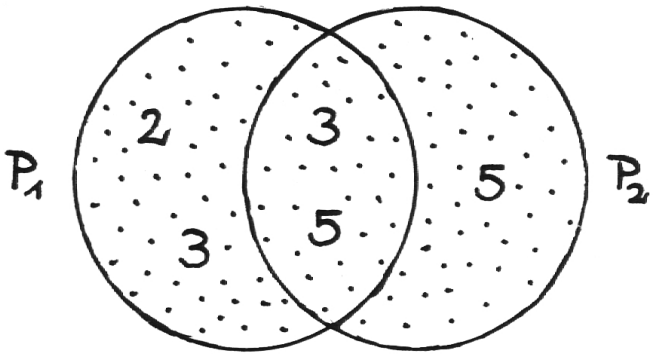
$75 = \quad 3 \cdot 5 \cdot 5$



Gemeinsam (im Durchschnitt) sind die Primteiler 3 und 5. ggT ist $3 \cdot 5 = 15$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

P_1 sei die Menge der Primteiler von 90, P_2 diejenige von 75.



Die Menge der kgV-Faktoren ist die Vereinigung der beiden Primteilermengen P_1 und P_2:

$P_1 \cup P_2 = \{2, 3, 3, 5, 5\}$

kgV von 90 und 75 ist $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$.

4. *Die ‹Lösung› einer Bestimmungsgleichung*

Es sei die *traditionelle* Aufgabe gegeben, die Gleichung

$x^3 + 8 = 0$

zu *lösen*.

Schüler verschiedener Altersstufen werden antworten:

A: Es gibt keine Lösung.

B: Die Lösung ist $x = -2$.

C: Die Lösungen sind: $x_1 = -2$; $x_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $x_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Wer hat nun recht? Jeder und doch keiner! Die Aufgabe ist unvollständig formuliert, und jeder Schüler macht sein eigenes Problem daraus.

A kennt offenbar erst die Menge N der natürlichen Zahlen. In dieser Grundmenge N sucht er alle Elemente x mit der Eigenschaft $x^3 + 8 = 0$. Die Menge dieser Elemente ist für A die Lösungsmenge L_1; natürlich ist $L_1 = \emptyset$.

Für A heißt die Aufgabe also:

$L_1 = \{x / x^3 + 8 = 0\}_N = ?$

Antwort: $L_1 = \emptyset$.

B kennt bereits die Menge Γ der ganzen Zahlen; für ihn ist

$L_2 = \{x / x^3 + 8 = 0\}_\Gamma = \{-2\}$,

aber zugleich auch $L_1 = \{x / x^3 + 8 = 0\}_N = \emptyset$.

C endlich kennt die Menge K der komplexen Zahlen:

$L_3 = \{x / x^3 + 8 = 0\}_K$
$= \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

Eine Gleichung *lösen* heißt also: In einer gegebenen Grundmenge ist diejenige Teilmenge, die *Lösungsmenge*, zu bestimmen, deren Elemente die gegebene Gleichung *erfüllen*. Ein Element *erfüllt* die Gleichung $x^3 + 8 = 0$, wenn es, in der *Leerstelle x* dieser sogenannten Aussageform eingesetzt, die Aussageform zu einer wahren Aussage macht.

Da $\{x / x^3 + 8 = 0\}_N = \emptyset$ ist, heißt die Gleichung $x^3 + 8 = 0$ in bezug auf N *nicht erfüllbar* oder *kontradiktorisch*. Weitere Kontradiktionen sind zum Beispiel

$x^2 + 4 = 0$ in bezug auf N, Γ und P

$x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2} = 0$ in bezug auf N.

Es ist klar, daß solche Kontradiktionen zum Anlaß für Erweiterungen des Zahlensystems genommen werden.

Die Gleichung $2x(x + 3) + 9 = x^2 + (x + 3)^2$ heißt in bezug auf die Menge R der reellen Zahlen *allgemein gültig* oder *tautologisch*, da

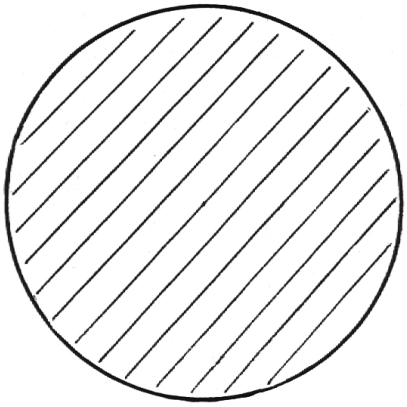
$\{x / 2x(x + 3) + 9 = x^2 + (x + 3)^2\}_R = R$.

Jedes Element der Grundmenge R erfüllt die tautologische Aussageform.
Der Begriff der Tautologie gilt immer nur in bezug auf eine ganz bestimmte Grundmenge; zum Beispiel ist

$e^x > 0$ tautologisch in bezug auf R,

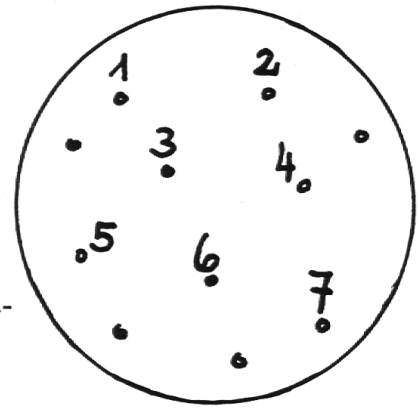
hat aber in bezug auf die Menge K der komplexen Zahlen keinen Sinn, da in K die Beziehung $>$ nicht erklärt ist. Zusammenfassend haben wir also:

Grundmenge
= Lösungsmenge



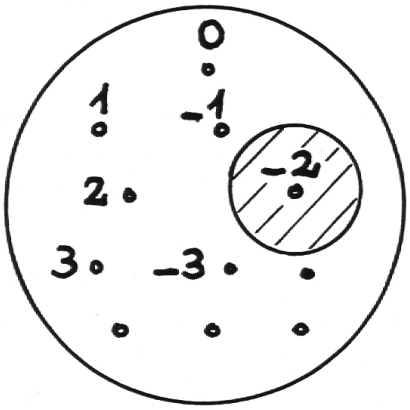
tautologische
Gleichung

Grundmenge N



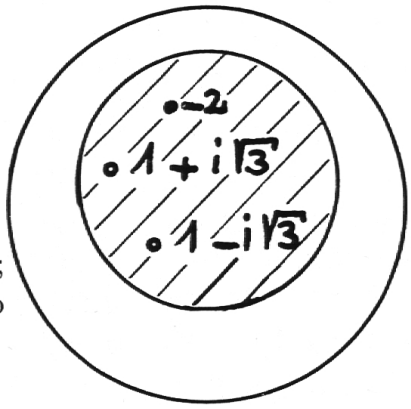
$L_1 = \emptyset$
$x^3 + 8 = 0$ ist kontradiktorisch in bezug auf N

Grundmenge Γ



$L_2 = \{-2\}$
$x^3 + 8 = 0$ ist erfüllbar in bezug auf Γ

Grundmenge K



$L_3 = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$ $x^3 + 8 = 0$ ist erfüllbar in bezug auf K

5. *Der Funktionsbegriff*

Wir betrachten die Menge der Studenten einer bestimmten Maturklasse. Jeder Student habe ein bestimmtes Studienziel. Sei A die Menge der Studenten, B die Menge der möglichen Berufe. Durch die Relation R: *hat als Studienziel* wird jedem Student ein ganz bestimmter Beruf aus der Menge B zugeordnet: Die Menge der Pfeile stellt die Menge der geordneten Paare (x, y) dar, die die Relation *hat als Studienziel* erfüllen:

$$\{(x, y) \mid x \text{ hat als Studienziel } y\} \qquad \begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \end{array}$$

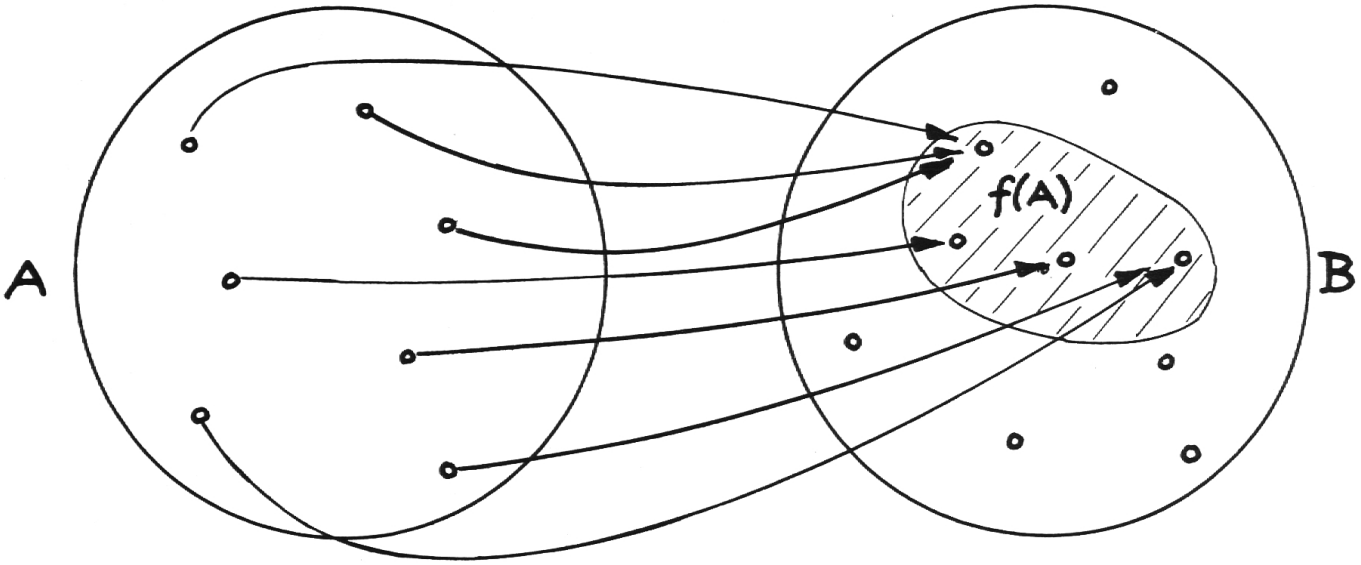
Die Menge A heißt *Ausgangsmenge*, die Menge B ist die *Ergebnis-* oder *Bildmenge*. Dabei hat jedes Element von A ein genau bestimmtes Bild in B, aber nicht umgekehrt.
Die Operation, die die Menge A auf die Menge B abbildet, nennen wir eine *Funktion* und schreiben:

$$x \xrightarrow{f} y \qquad \text{oder } y = f(x),$$

in Worten: *y ist das Bild von x bezüglich der Funktion f.*
Die Menge derjenigen Elemente in B, die wirklich Bilder von Elementen aus A sind, heißt *das Bild von A bezüglich der Funktion f.* Wir bezeichnen diese Menge mit f (A).
Wir merken uns nochmals: Ein Element der Ausgangsmenge hat nur ein einziges Bild in der Ergebnismenge.
Ist jedes Element $y \in f(A)$ Bild von nur einem einzigen $x \in A$, so definiert die Zuordnung

$$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y \qquad \text{mit} \quad x \in A;\ y \in f(A)$$

die sogenannte *inverse Funktion g* von f. Die Mengen A und f (A) werden durch f (und auch durch g) eineindeutig aufeinander abgebildet.
Betrachten wir noch die Funktion f: *hat das Quadrat*



und wenden f auf die Menge Γ der ganzen Zahlen an. Die Bildmenge ist Teilmenge von Γ selbst:

$$x \xrightarrow{\text{hat das Quadrat}} y \quad \text{oder } y = x^2 \text{ mit } x \in \Gamma; y \in \Gamma.$$

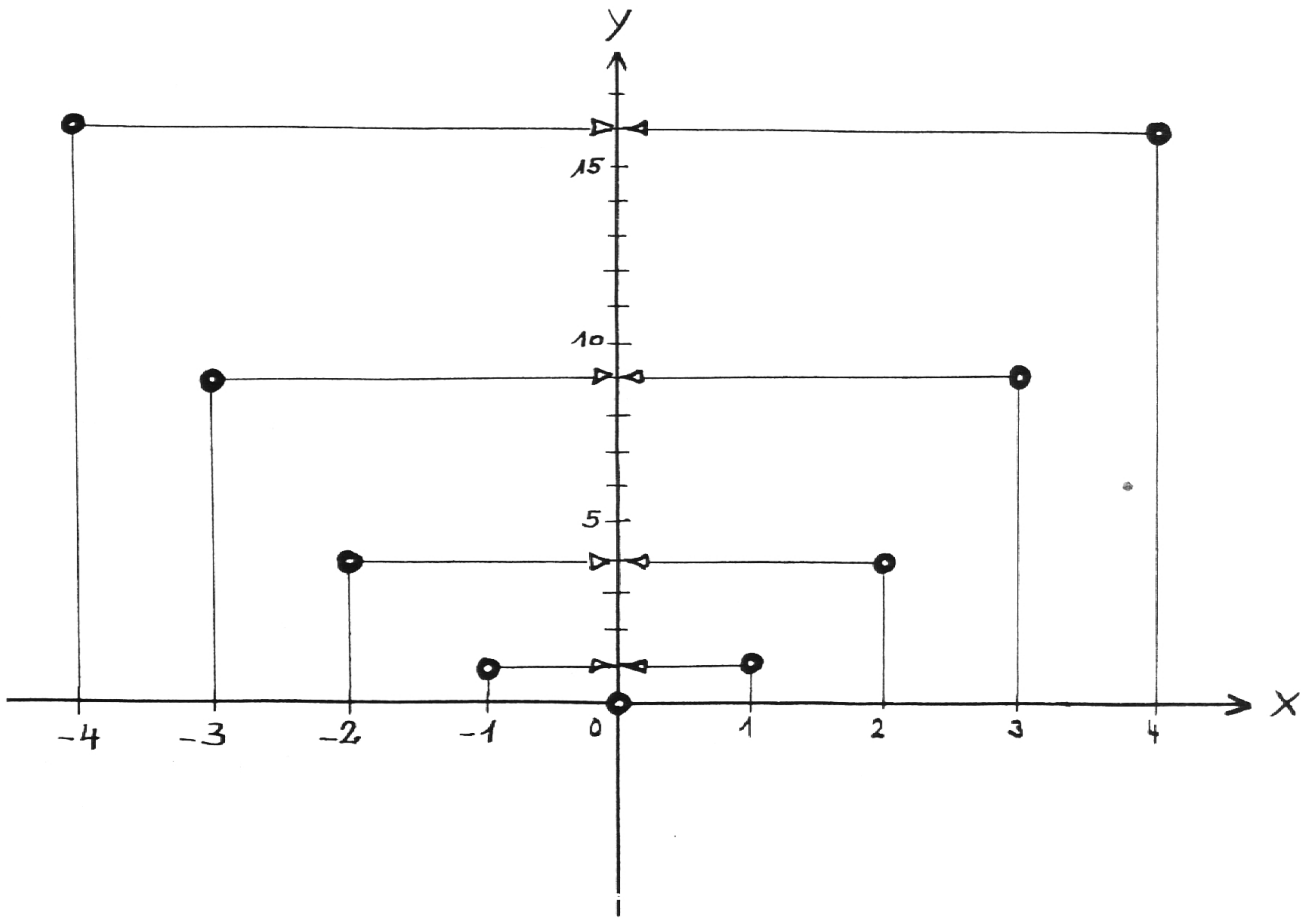
Da x jede gewünschte ganze Zahl sein kann, nennen wir x eine *unabhängige Variable* und y das Bild von x bezüglich der Funktion f.

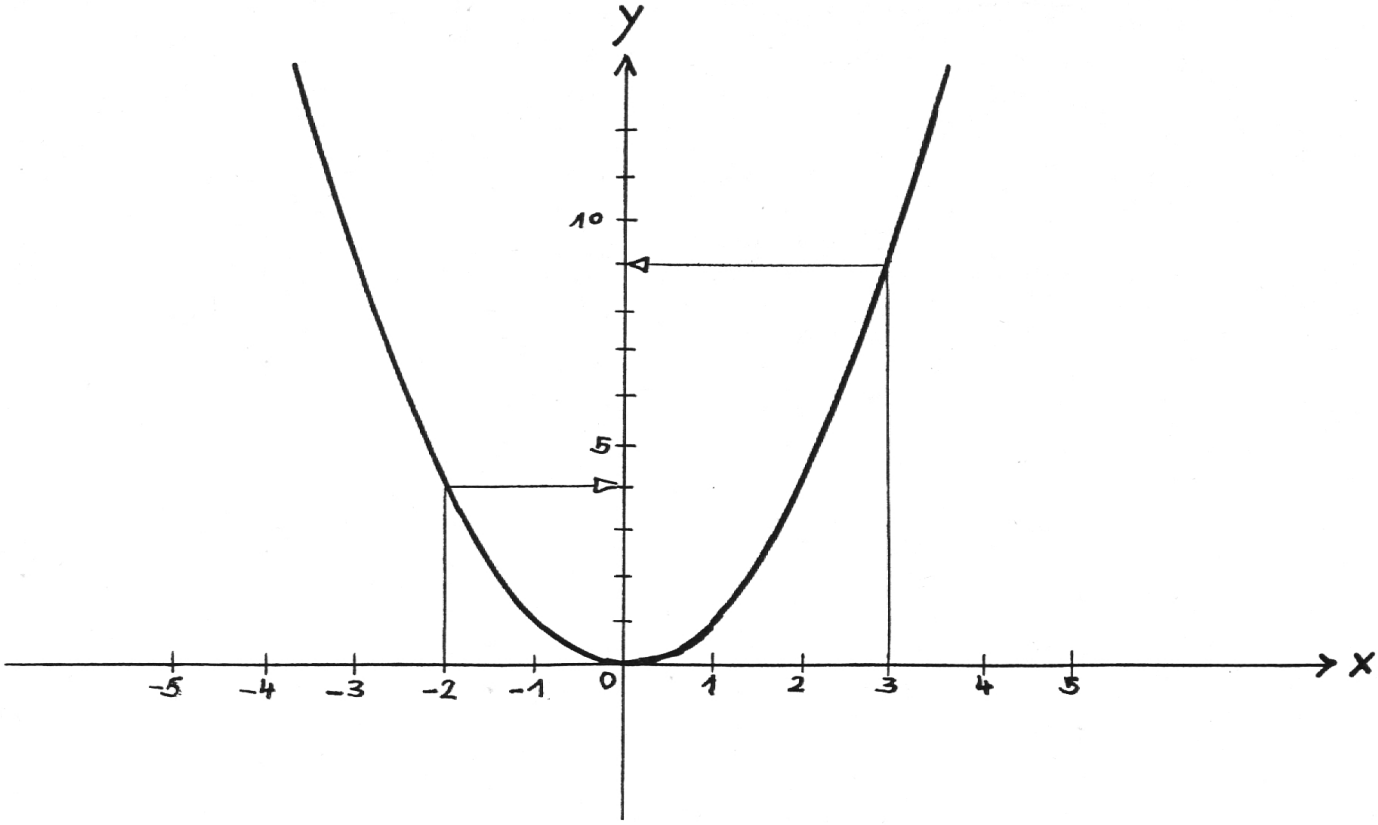
Die Menge der geordneten Zahlenpaare,

$$\{(x, y) \;/\; x \text{ hat das Quadrat } y\} \qquad \begin{array}{l} x \in \Gamma \\ y \in \Gamma \end{array}$$

kann in der Ebene als Punktmenge dargestellt werden. Diese Punktmenge heißt der *Graph der Funktion f.*

Die abgewinkelten Pfeile stellen die eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen $x \in A$ und den Bildelementen $y \in f(A)$ dar. Der Graph dieser Funktion ist keine Kurve, sondern eine unendliche Punktmenge mit lauter isolierten Punkten. Hingegen ist der Graph der Funktion $x \longrightarrow y = x^2;\ x \in R$ eine Kurve:





Bekanntlich nennt man die Ausgangsmenge A auch den *Definitionsbereich*, f (A) den *Wertevorrat* der Funktion f.

6. *Ungleichungen*

Lineare Programmierung und Spieltheorie sind wichtige Teilgebiete der angewandten Mathematik geworden. Das Lösen von Ungleichungen und Ungleichungssystemen spielt dabei eine wichtige Rolle. Einfache Beispiele aus beiden Gebieten können nutzbringend in den Mittelschullehrstoff eingebaut werden. Keinesfalls aber darf die Behandlung von Ungleichungen nur als eventuelles Anhängsel an die Gleichungslehre betrachtet werden.

Daß die Begriffe der Mengenlehre bei der Behandlung der Ungleichungen klärend und ordnend wirken, mögen die wenigen nachfolgenden Beispiele belegen.

Wir führen zuerst folgenden Begriff ein: Ist a ein beliebiges Element einer Menge A und b ein beliebiges Element einer Menge B, so heißt die Menge der geordneten Elementenpaare (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$, das *direkte Produkt* $A \times B$ der beiden Mengen A und B. Ist nun R die Menge der reellen Zahlen, so bedeutet $R \times R = R^2$ die Menge aller reellen Zahlenpaare (x, y). Analog wird $R^3 = R \times R \times R$ die Menge aller reellen Zahlentrippel (x, y, z).

Nach Einführung eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems läßt sich jedem Element aus $R \times R = R^2$ ein Punkt der xy-Ebene und jedem Element aus R^3 ein Punkt des xyz-Raumes zuordnen. R^2 und reelle Ebene sowie R^3 und reeller Raum entsprechen einander eineindeutig.

1. Beispiel: $L = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} 2x - 5 > x + 3 \\ \frac{x}{2} - 4 < \quad 2 \end{array} \right\}_R = ?$

Gesucht ist die Menge derjenigen reellen Zahlen, die die beiden Aussageformen $2x - 5 > x + 3$ und $\frac{x}{2} - 4 < 2$ zugleich erfüllen.

Es ist

$$2x - 5 > x + 3 \Longleftrightarrow x > 8 \Longrightarrow L_1 = \{x / x > 8\}_R$$

$$\frac{x}{2} - 4 > 2 \Longleftrightarrow x < 12 \Longrightarrow L_2 = \{x / x < 12\}_R$$

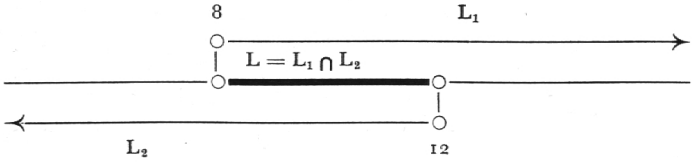
Es wird $L = L_1 \cap L_2$

also $L = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} x > 8 \\ x < 12 \end{array} \right\}_R$

$$= \{x / x > 8\}_R \cap \{x / x < 12\}_R$$

$$L = \{x / 8 < x < 12\}_R$$

Die Lösungsmenge L ist der Durchschnitt der Lösungsmengen L_1 und L_2 der beiden Aussageformen.



2. Beispiel: $L = \{x / (x - 1)(x - 6) > 0\}_R = ?$

Es ist $(x - 1)(x - 6) > 0$ wenn

a) $x - 1 > 0$ und zugleich $x - 6 > 0$

b) $x - 1 < 0$ und zugleich $x - 6 < 0$

a) $x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 1$

$x - 6 > 0 \Longleftrightarrow x > 6$

$$\Longrightarrow L_1 = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x > 1 \\ x > 6 \end{matrix} \right\}_R$$

$$= \{x / x > 1\}_R \cap \{x / x > 6\}_R$$

$$\Longrightarrow L_1 = \{x / x > 6\}_R$$

b) $x - 1 < 0 \Longleftrightarrow x < 1$

$x - 6 < 0 \Longleftrightarrow x < 6$

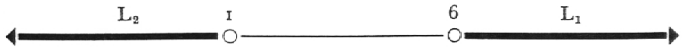
$$\Longrightarrow L_2 = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x < 1 \\ x < 6 \end{matrix} \right\}_R$$

$$= \{x / x < 1\}_R \cap \{x / x < 6\}_R$$

$$L_2 = \{x / x < 1\}_R$$

Es wird $L = L_1 \cup L_2$

$$L = \{x / x > 6\}_R \cup \{x / x < 1\}_R$$



3. Beispiel: $L = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{matrix} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \\ x + y - 8 < 0 \end{matrix} \right\}_{R^2} = ?$

$\{(x, y) / 2x - y = 0\}_R$ entspricht in der reellen Ebene einer Geraden g_1, die die Ebene in die beiden Halbebenen mit $2x - y > 0$ und $2x - y < 0$ teilt.

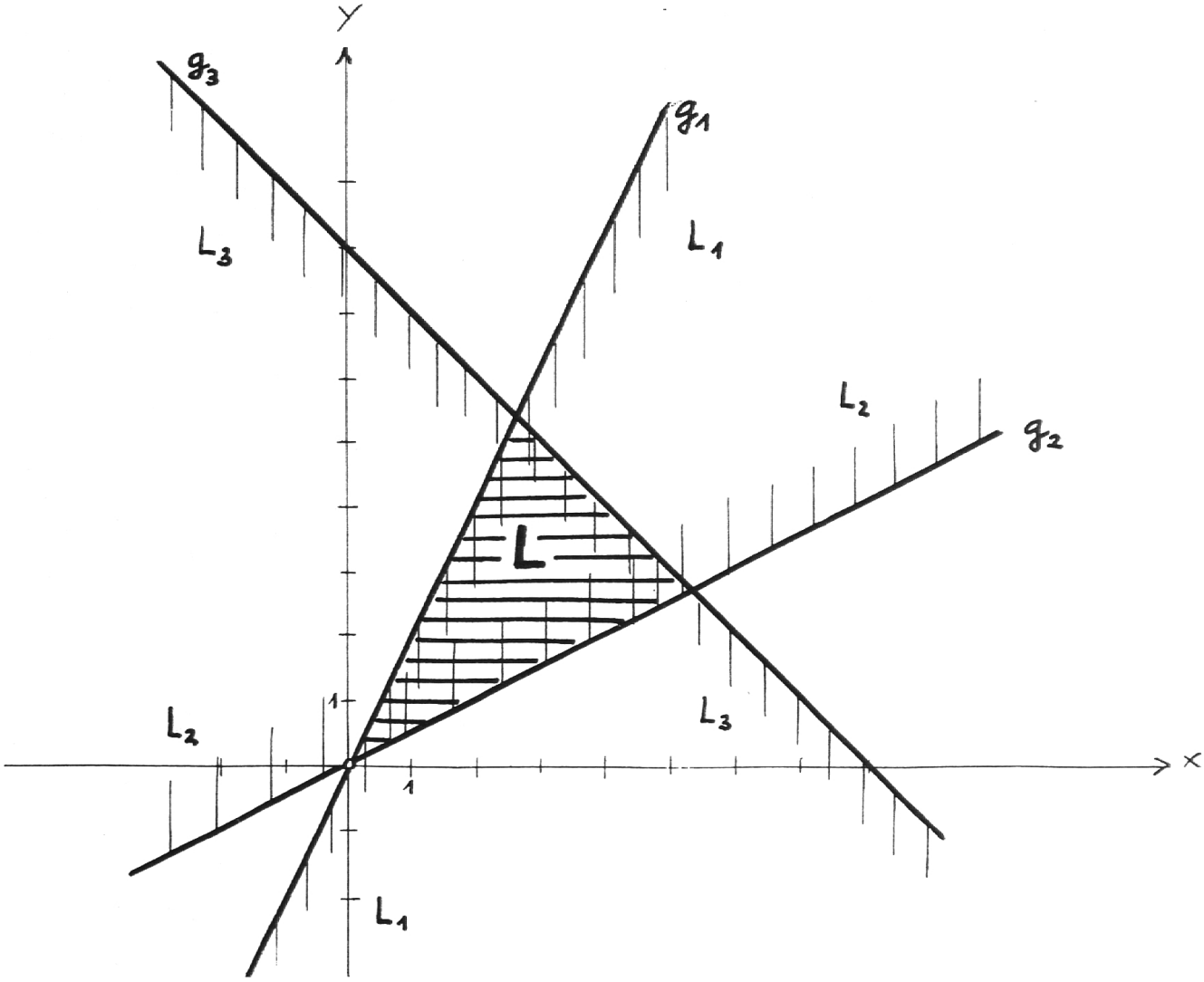
$L_1 = \{(x, y) / 2x - y > 0\}_R$ entspricht also der Halbebene unter g_1

$L_2 = \{(x, y) / x - 2y < 0\}_R$ entspricht der Halbebene über $g_2 \equiv x - 2y = 0$

$L_3 = \{(x, y) / x + y - 8 < 0\}_R$ entspricht der Halbebene unter $g_3 \equiv x + y - 8 = 0$

Es wird $L = L_1 \cap L_2 \cap L_3$

Die gemachten Ausführungen konnten zwangsläufig nur sehr oberflächlich sein und nur ein paar zentrale Stellen der Schulmathematik berühren. Immerhin dürfte dem Leser klar geworden sein, daß die Schulmathematik endlich wieder zu einem einheitlichen Gebilde wird, wenn die tragenden Begriffe klar erarbeitet und gemeinsame Strukturen sorgfältig aufgezeigt werden.



Aus der umfangreichen zum Teil oben verwendeten Literatur kann empfohlen werden:
Lucienne Félix: Mathemtaische Strukturen als Leitfaden für den Unterricht. Göttingen 1963.
Lucienne Félix: Exposé moderne des mathématiques élémentaires. Paris 1959.
Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Herausgegeben von der OECE.
Logische Probleme im Mathematikunterricht I und II. Der Mathematikunterricht, Hefte 4/1959 und 1/1961. Klett, Stuttgart.
Fischer Lexikon, Mathematik I; Frankfurt am Main, 1964.

Umschau

Unsere Fahrt ins Heilige Land

Es war am Ostermontag, als wir, die 19 Teilnehmer an der ersten Heilig-Land-Fahrt des Schweiz. Kath. Lehrerbundes, uns der Olympic Airways zum großen Fluge anvertrauten. Kurze Zwischenhalte in Athen und Cypern steigerten unsere Erwartung, bis wir am späten Abend Beirut erreichten. – Wie verheißungsvoll war es, von den Küstenstreifen des ehemaligen Tyrus und Sidon aus das Land der Bibel zu betreten! Als Auftakt hörten wir von der großen Vergangenheit dieses Küstenstrichs, wo einst das Seefahrervolk der Phönizier die Kultur der Mittelmeerländer vermittelte und wo die ersten Auseinandersetzungen mit dem Gottesvolke ausgetragen wurden. So bestaunten wir denn in den Trümmerfeldern von Baalbek die heidnischen Riesentempel, die einst zum Vorbild des Jahwetempels in Jerusalem wurden, und während wir dem Libanon entlang durch die Beka-Ebene fuhren, mußten wir an die vielen Hirtenstämme denken, die schon seit grauer Vorzeit mit ihren Herden durch das breite Tal gezogen. Ob Abraham schon zu ihnen gehörte? – Ganz sicher aber war es der heilige Paulus, der gleich uns den Weg nach Damaskus gegangen. Im Gedenken an die weltgeschichtliche Gnade seiner Berufung feierten wir anderntags in der Geraden Straße, im Haus des Ananias, in Dankbarkeit das heilige Opfer. Dann führte uns ein junger Damaszener durch die Stadt, in die Omaijadenmoschee und durch volkskundliche Museen, die uns einen Einblick gaben in die fremde Welt des Islams. Am Nachmittag wanderten einige in die Landschaft hinaus, um dem ohrenbetäubenden Hupen der Stadt zu entfliehen, währenddem andere in den malerischen Bazars und Handwerkerläden einen echt morgenländischen Handel tätigten.

So wie Moses einst vom Osten herkommend ins Land der Verheißung zog, so fuhren auch wir am andern Tag auf der uralten Königsstraße ins Gebiet der Dekapolis über Djerasch und Amman hinauf zum Berg Nebo, wo im geheimnisvollen Dunst der Ferne auch vor uns das Land der Verheißung lag. Wie wunderbar sind die Weite und Stille dieser unberührten biblischen Landschaften! Man meint, die Jahrtausende seien darin stillgestanden, wie auch bei den urwüchsigen Menschen, die hier noch in schwarzen Zelten wohnen, den alten Holzpflug durch die kupferrote Erde ziehen oder mit ihren Schafen wachen und wandern. Nackt und zerklüftet liegt das Moabitergebirge da, wie damals, als David darin vor Saul geflohen. Träge zieht der Jordan durch die sandgelbe Wüste, wie einst, als Johannes taufte. Und in den Ausgrabungen von Jericho glaubt man die älteste Stadt der Welt gefunden zu haben. Sich aber schließlich tief unter dem Meeresspiegel im Toten Meer in einem salzigen Bad wieder vom Staub der Jahrtausende zu erfrischen, gehörte auch zu den urtümlichen Erlebnissen dieses vierten Tages.

Am frühen Morgen wanderten wir durch die blühende Wüste hinauf nach Qumran. Und da, in den Ruinen des ausge-

Fortsetzung siehe Seite 221