

Dreieckskonstruktionen in ganzheitlicher Schau

Autor(en): **Urscheler, Albert**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **61 (1974)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-528822>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

men der Mitarbeiterausbildung einzelner Einrichtungen der Erwachsenenbildung solche Bestrebungen zu entdecken.

² Vgl. etwa F. BORINSKI / G. DOERRY / J. OLBRICH, Plan für das Studium der Erwachsenenbildung im Rahmen des Diplomstudiums der Erziehungswissenschaft. In: Hessische Blätter für Volksbildung 4/1971, 226–234 (besonders 230).

³ Vgl. z. B. die Vorarbeiten für ein Ausbildungskonzept der Schweizerischen Vereinigung für Erwachsenenbildung (SVEB), Postfach, CH-8057 Zürich.

⁴ Vgl. Prospekt der Akademie für Erwachsenenbildung Luzern, August 1973

⁵ Vgl. etwa die niederländische Denkschrift zur Erwachsenenbildung: Gesellschaftskritik durch Weiterbildung, Fromm, Osnabrück 1970, 141 ff.

⁶ I. ZANGERLE, Der katholische Beitrag zur Erwachsenenbildung. In: Der Katholische Beitrag zur Erwachsenenbildung in Österreich, Wien 1973, 13.

⁷ Grundlehrgang für die Ausbildung der Mitarbeiter in der EB. In: Theorie und Praxis der Erwachsenenbildung 3/1972, 70.

Dreieckskonstruktionen in ganzheitlicher Schau

Albert Urscheler

Bestimmungstücke, Bestimmungssätze,
Kongruenz, Kongruenzsätze

Ziel des Unterrichts

Eindeutiges Verständnis von wichtigen Begriffen; genaue, sinnvolle Konstruktionen; Erziehung zum kreativen Arbeiten.

Vorkenntnisse: Grundstruktur des Dreiecks. Schieben, Drehen, Wenden von allgemeinen Figuren. Geradenspiegelung. *Streifentheorie:* ebene geometrische Figuren sind Schnittmengen von Streifen.

Aufgaben

① Zeichne ein Dreieck.

② Zeichne das Dreieck.

Der bei diesen beiden Aufgaben im Schüler entstandene Konflikt wird im Unterrichtsgespräch etwa anhand der nachfolgenden Fragen gelöst:

1. Worin besteht der Unterschied der beiden Fragen?

2. Was ist notwendig, um die 2. Aufgabe einwandfrei zu lösen?

3. Was bedeutet also, ein bestimmtes Dreieck zeichnen?

Dem Schüler werden somit die Bedeutung und der Sinn des Argumentes klar.

Es werden dem Schüler 5 weitere Aufgaben gestellt:

Konstruiere je das Dreieck:

① Geg. $a = 5 \text{ cm}$ ④ Geg. $c = 6 \text{ cm}$
 $b = 6 \text{ cm}$ $\sphericalangle \alpha = 30^\circ$
 $c = 4 \text{ cm}$ $\sphericalangle \beta = 45^\circ$

② Geg. $a = 2 \text{ cm}$ ⑤ Geg. $\sphericalangle \alpha = 30^\circ$
 $b = 2 \text{ cm}$ $\sphericalangle \beta = 60^\circ$
 $c = 6 \text{ cm}$ $\sphericalangle \gamma = 90^\circ$

③ Geg. $a = 5 \text{ cm}$
 $b = 4 \text{ cm}$
 $\sphericalangle \gamma = 30^\circ$

Im Unterrichtsgespräch werden die 5 Aufgaben analysiert.

Resultat:

Aufgaben ①, ③ und ④ ergeben eindeutige Konstruktionen. Aufgabe ⑤ ergibt keine bestimmte Konstruktion. Die Aufgabe kommt erst später in der Ähnlichkeitslehre zur Geltung.

Die Aufgabe ② muss mit Aufgabe ① verglichen werden. Die Schüler werden mit Leichtigkeit herausfinden, dass bei der Dreieckskonstruktion die Summe von 2 Seiten grösser sein muss als die dritte (gültig für alle 3 Seiten!).

Im Unterrichtsgespräch nennen die Schüler alle Stücke, die im Dreieck vorkommen:

Resultat: 3 \sphericalangle , 3 Seiten, 3 Höhen, 3 Winkelhalbierende, 3 Schwerlinien, 3 Mittelsenkrechte.

Die Schüler entdecken, dass nicht alle genannten Stücke als Bestimmungstücke (oder Konstruktionsstücke) gelten können. Wir eliminieren daher die 3 Winkelhalbierenden, die 3 Mittelsenkrechten und die 3 Schwerlinien. (Der Schüler weiss selbstverständlich warum!) Mit den restlichen Stücken bilden wir die Menge der Bestimmungs-

stücke des Dreiecks, wobei wir aber vorerst noch der Einfachheit halber auch von den Höhen absehen.

$$M_{\text{Bestimmungsstücke}} = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$$

In den einleitenden Aufgaben haben die Schüler erkannt, dass es immer 3 Stücke braucht, um ein bestimmtes Dreieck zu konstruieren.

Folglich müssen wir mit den Elementen der Menge alle *Dreierkombinationen* bilden. Der Schüler braucht dafür keine grossen Kenntnisse aus der Kombinatorik. Der Lehrer zeigt, wie man 2 oder 3 Dreierkombinationen bildet. Alle restlichen suchen die Schüler allein. Dreierkombinationen sind:

a, b, c	b, c, β	a, α , β	b, β , γ
a, b, α	b, c, γ	a, β , γ	c, α , γ
a, b, β	a, c, α	a, α , γ	c, α , β
a, b, γ	a, c, β	b, α , β	c, β , γ
b, c, α	a, c, γ	b, α , γ	α , β , γ

Die Schüler zählen und vergleichen ihre Dreierkombinationen.

Wieviele sind möglich?

Die Schüler verifizieren nun alle 20 Kombinationen durch Konstruktionen.

Analyse:

Welche Kombinationen ergeben eine eindeutige Dreieckskonstruktion?

Welche Dreierkombinationen müssen ausgeschlossen werden, welche müssen untersucht werden?

Resultat:

- ① a, b, c führt zum Bestimmungssatz SSS ($S_1 + S_2 > 3$. Seite)
- ② a, b, α Die Schüler stossen beim Konstruieren auf Schwierigkeiten.
a, b, β
a, c, α Sie finden jedoch in Gruppenarbeit recht bald, dass alle 6
a, c, γ Fälle zu einer eindeutigen Konstruktion führen, wenn jeweils
b, c, β der gegebene \sphericalangle der grösseren
b, c, γ Seite gegenüberliegt.

Jede führt zum Bestimmungssatz SsW.

- ③ a, b, γ führt zum Bestimmungssatz SWS
a, c, β
b, c, α

- ④ c, α , β führt zum Bestimmungssatz WSW
b, α , γ
a, β , γ
- ⑤ α , β , γ muss ausgeschaltet werden. (Wurde schon in den Einführungsaufgaben behandelt!)
- ⑥ c, α , γ Diese Kombinationen gehören zu WSW, ergeben aber nur unter gewissen Umständen eine eindeutige Konstruktion.
c, β , γ
a, α , β
a, α , γ
b, α , β (Wann, weiss der Schüler!)
b, β , γ

Wir untersuchen die Sonderfälle des Dreiecks

Vorbemerkung:

Der Schüler muss angehalten werden, dass er das Dreieck in einem Streifen konstruiert.

- ① Das gleichschenklige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke = $\{a, c, \alpha, \gamma\}$
Wir bilden *Zweierkombinationen*. Warum? Wieviele sind möglich? Verifikation durch Konstruktion!
Welche Kombinationen müssen ausgeschlossen werden?

- ② Das rechtwinklige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke = $\{a, b, c, \alpha, \beta\}$
Man geht genau gleich vor wie bei ①.

- ③ Das gleichseitige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke = $\{s, \alpha\}$
Wir bilden *Einerkombinationen*! Warum? Wieviele gibt es? Welche gelten? Verifizieren!

Nun schliessen wir in der Menge der Bestimmungsstücke auch *die Höhen* ein:

- ① Das allgemeine Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke = $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h_a, h_b, h_c\}$
Wir bilden alle *Dreierkombinationen*.
Wir verfahren genau gleich wie im 1. Kapitel. Es ist jedoch nicht notwendig, dass wir alle Kombinationen verifizieren, einige genügen, besonders diejenigen mit Höhen!
- ② Das gleichschenklige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke = $\{a, c, \alpha, \gamma, h_a, h_c\}$
Wir bilden alle *Zweierkombinationen*! Weiteres Verfahren wie oben.

③ Das rechtwinklige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke
 $= \{a, b, c, \alpha, \beta, h_c\}$

Warum nur h_c ?

Merke: Jedes Element darf in der Menge nur einmal aufgeführt werden!
Gleiches Verfahren wie bei ②.

④ Das gleichseitige Dreieck:
Menge der Bestimmungsstücke $= \{s, \alpha, h_s\}$
Einerkombinationen usw.

In einer weiteren Untersuchung könnte man auch *die Schwerlinien* in die Menge der Bestimmungsstücke einschliessen. Dieser Fall ist aber nur interessant für das gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

Merke: Alle Untersuchungen werden dem Schüler klar zeigen, dass nur 4 Bestimmungssätze existieren und allgemeine Gültigkeit haben.

Kongruenz – Kongruenzsätze – Kongruenzbeweise

Das vorangehende und das hier folgende Kapitel sind logisch eng verbunden.

Wenn wir 2 oder mehrere Dreiecke aufeinanderlegen, und wenn sich diese Dreiecke genau überdecken, sagen wir, sie seien kongruent (=deckungsgleich). Wir gehen von Aufgaben aus und stellen dann die Kongruenzsätze zusammen.

Aufgabe A:

Geg. 2 Dreiecke a, b, c

(z. B. Urbild und Spiegelbild)

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$

Vereinsmitteilungen

Vernehmlassung des Präsidiums des Zentralvorstandes KLVS zum Mathematikunterricht

Der Mathematik-Ausschuss der Pädagogischen Kommission der EDK hat in einem Fragebogen die Vorstellungen über die Koordination des Mathematik-Unterrichtes in der obligatorischen Schulzeit abklären wollen.

Nachdem in manchen Kantonen schon zum Teil sehr intensive Reformaktivitäten im Bereich des Mathematik-Unterrichtes bestehen, laufen auch

Beweis:

① Beweis aus der Abbildungsgeometrie:
Es ist möglich, mit höchstens 2 Bewegungen zwei Figuren (Dreiecke) genau aufeinanderzulegen. Wenn sie sich dabei decken, ist Kongruenz da.

1.1. Drehung + Schiebung

1.2. Umklappen + Schieben

1.3. Geradenspiegelung + Geradenspiegelung

(Der Schüler sollte Vorkenntnisse der Abbildungsgeometrie besitzen.)

② Traditionelle Kongruenzbeweise:
(Sie sind eng mit den Bestimmungssätzen verbunden!)

Wenn Dreiecke mit den gleichen Stücken konstruiert sind, sind sie kongruent.

In diesem Fall a, b, c \rightarrow Kongruenz nach SSS

Aufgabe B:

Geg. 2 Dreiecke, die nach dem Bestimmungssatz SsW konstruiert sind.

\rightarrow Kongruenz nach SsW

Aufgabe C:

Geg. 2 Dreiecke, die nach dem Bestimmungssatz SWS konstruiert sind.

\rightarrow Kongruenz nach SWS

Aufgabe D:

lautet wie? \rightarrow Kongruenz...

Wir fassen die Kongruenzsätze zusammen und vergleichen sie mit den Bestimmungssätzen.

Mit dieser Aufgabe wird das Kapitel sinnvoll und ganzheitlich abgeschlossen.

schon Versuche, diese Aktivitäten regional zu koordinieren.

Nach der Ansicht des Präsidiums ist es notwendig, dass gesamtschweizerisch eine Koordination in folgenden Bereichen anzustreben sei: allgemeine Lehrziele, Stoff- und Lehrpläne mit Angabe von Grobzielen, Stoff- und Lehrpläne mit Angabe von Feinzielen, Ausbildung von Fachdidaktikern. In allen Bereichen sind im jetzigen Zeitpunkt Koordinationsbestrebungen der EDK wünschenswert.

Deshalb sollte einer Konferenz von Sachverständigen der Auftrag erteilt werden, eine gemeinsame Konzeption des Mathematik-Unterrichtes