

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 5 (1914)
Heft: 3

Artikel: Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen
Autor: Landry, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059658>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat

des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei
A.-G., Zürich

Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général

de l'Association Suisse des Electriciens
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Zurich

Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Abonnementspreis
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.— pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

V. Jahrgang
V^e Année

Bulletin No. 3

März 1914
Mars

Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen.

Von Prof. J. Landry, Lausanne.

(Uebersetzung von Ing. E. Payot.)

Wechselströme.

(Fortsetzung.)*

Um diese Abhandlung nicht allzusehr auszudehnen und um den geneigten Leser nicht unnötig zu ermüden, wollen wir uns auf die Untersuchung des Problems der Uebertragung *sinusförmiger Wechselströme* beschränken. Wir werden daher wie bisher einen einfachen Stromkreis betrachten, gebildet durch einen Generator G , durch eine Leitung, bestehend aus einer Hinleitung von der Länge L und mit den Konstanten r , g , l und c und einer widerstandslosen Rückleitung und endlich durch einen Verbraucher R von bekannter Impedanz Z' . Dieser letztere wird als vollkommen isoliert und vollständig frei von Kapazität zwischen den einzelnen Windungen seiner Wicklung vorausgesetzt, was immer geschehen darf, zum mindesten bei der Untersuchung von Beharrungszuständen. Im übrigen sei auch die vom Verbraucher aufgenommene Leistung P , seine Klemmenspannung V_L und sein Leistungsfaktor $\cos \varphi$ bekannt, wie dies meistens der Fall ist, wodurch der Zustand am Verbrauchsort vollständig bestimmt ist. Zudem stellt der betrachtete Stromkreis (Fig. 14) eine einzelne Phase eines mehrphasigen *symmetrischen* Systems m -ter Ordnung dar, das bekanntlich (auch bei beliebiger Schaltung der Verbraucher) m einphasigen Stromkreisen

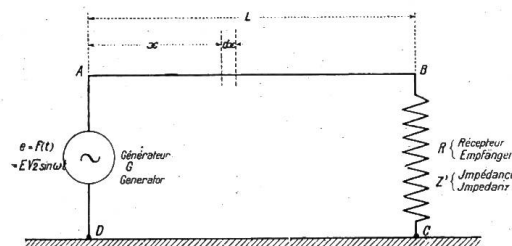


Fig. 14.

*) Siehe Februar-Heft, Seiten 33—52.

von je einer Leistung $\frac{P}{m}$ äquivalent ist, gebildet aus nur je einer der m „Phasen“ des Erzeugers, je einer der m Phasen des Verbrauchers, je einem der m Leiter der Uebertragungsleitung und einer Rückleitung von der Impedanz null. Die Konstanten r, g, l und c der Leitung sind daher auf die einfache (Phasen-) Spannung V_s bezogen, d. h. auf

$$V_s = \frac{V_c}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$

wenn V_c die Spannung zwischen zwei Leitern oder die verkettete Spannung eines Systems mit Sternschaltung bedeutet.

Nach erfolgter Behandlung des Falles der sinusidalen Wechselströme, d. h. nach der Bestimmung der Zustände die von einer sinusförmigen EMK

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t,$$

im Generator G erzeugt, hervorgerufen werden, wird der Uebergang zur Behandlung des Falles wo e eine beliebige periodische EMK ist keine besonderen Schwierigkeiten mehr bieten, da es genügen wird, e mit Hilfe der Fourier'schen Reihe in eine Grundwelle und deren Oberwellen zu zerlegen. Der gesuchte Zustand ergibt sich dann durch Superposition der Einzelzustände, hervorgerufen durch die einzelnen sinusidalen EMK e der Reihe, welche als nacheinander in dem mit den entsprechenden Konstanten r, g, l und c behafteten Stromkreis wirkend gedacht sind. Wir werden diesen Fall aber jeweils nur kurz streifen.

Grundgleichungen für den speziellen Fall der sinusidalen*) Wechselströme.

Symbolische Darstellung.

Nehmen wir also an, dass der Generator G eine sinusidale EMK erzeuge, und fassen wir diese, um uns nicht unnötigerweise mit dem Generator abgeben zu müssen, als Spannung, Potentialdifferenz an den Klemmen auf, so haben wir bei jedem beliebigen Zustand, Fig. 14,

$$v_A = v_D = v_0 \sqrt{2} \sin \omega t = e = E \sqrt{2} \sin \omega t$$

oder bei Anwendung der *Darstellungsweise mit komplexen Grössen*

(siehe Seite 51) Fall 1 $V = V_0 \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t}$

oder Fall 2 $V = V_0$ da die Phase von v_0 als Phasen-Ursprung ($\alpha = 0$) angenommen ist.

Die Spannung v in einem Punkte im Abstände x vom Generator wird sowohl in der Grösse als in der Phase von der Spannung v_0 verschieden sein. Ihr Effektivwert sei für diesen Abstand V_x und ihre Phasenverschiebung gegenüber v sei α (Vor- oder Nacheilung). Sie wird sich demnach darstellen lassen durch:

$$\begin{aligned} (54) \quad V &= V_x \sqrt{2} \epsilon^{-j\alpha} \epsilon^{j\omega t} \\ &= V_x [\cos \alpha - j \sin \alpha] \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t} \\ &= V_x \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t} \end{aligned}$$

Der Strom i im Abstand x wird seinerseits, unabhängig von seiner Phase, dargestellt sein durch den komplexen Ausdruck:

$$(55) \quad I = I_x \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t}$$

Durch Ersetzen von v und i in den beiden Differential-Gleichungen (4) und (5) durch obige Ausdrücke erhält man:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (V_x \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t}) = r I_x \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t} + l \frac{\partial}{\partial t} (I_x \sqrt{2} \epsilon^{j\omega t})$$

*) In diesem Aufsatz ist für „sinusoidal“ „sinoidal“ gebraucht.

$$\text{und} \quad -\frac{\partial}{\partial x} (I_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}) = g V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} + c \frac{\partial}{\partial t} (V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t})$$

Man ersieht nun leicht, dass die Funktion $\varepsilon^{j\omega t}$ welche, entsprechend der getroffenen Annahme, die sinoidale Variation der Grössen v und i darstellt, herausfällt, sowie auch der numerische Faktor $\sqrt{2}$, und dass die obigen zwei Gleichungen übergehen in:

$$(56) \quad -\frac{dV_x}{dx} = (r + j\omega l) I_x = z I_x$$

$$(57) \quad \text{und} \quad -\frac{dI_x}{dx} = (g + j\omega c) V_x = a V_x$$

Durch gleiche Substitution in den Gleichungen (6) und (7) oder durch Elimination in den Gleichungen (56) und (57) können wir zwei Gleichungen erhalten, wovon die eine nur noch V_x und die andere nur noch I_x enthält, also:

$$(58) \quad \frac{d^2 V_x}{dx^2} = (r + j\omega l) (g + j\omega c) V_x = z a V_x$$

$$(59) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 I_x}{dx^2} = (r + j\omega l) (g + j\omega c) I_x = z a I_x$$

Diese beiden Differentialgleichungen stellen ganz allgemein den Beharrungszustand irgend eines Stromkreises dar, in welchem ein sinoidaler Wechselstrom mit der Pulsation ω fliesst. Die erste mit den Variablen V_x ist der reduzierte komplexe Ausdruck für die Spannung und die zweite mit den Variablen I_x , derjenige für den Strom in jedem Punkte der Leitung. Man wird demnach vor allem daraus

$$V_x = f(x)$$

$$\text{und} \quad I_x = \varphi(x)$$

gewinnen können, welche Ausdrücke zeigen werden, wie die *Effektivwerte* und *Phasen* von v und i längs der Leitung sich ändern. Wenn dafür Interesse vorliegt, wird man auch sofort durch entsprechendes Wiedereinführen der Variablen t die Funktionen

$$\text{und} \quad \begin{aligned} v &= f(x, t) \\ i &= \varphi(x, t) \end{aligned}$$

erhalten können, welche die Gesetze für die Aenderung von v und i nach *Zeit* und *Ort* ergehen, immer unter Voraussetzung der gemachten Annahme (sinoidaler zeitlicher Verlauf).

Da die Gleichungen (58) und (59) gleiche Form besitzen, so werden ihre Lösungen sich nur durch die sich aus den Grenzbedingungen bestimmenden Integrationskonstanten unterscheiden. Im Allgemeinen wird man zuerst V_x bestimmen, indem man z. B. von der Gleichung (58) ausgeht; das so gefundene V_x wird man in Gleichung (57) einführen, um daraus I_x durch Integration nach x zu gewinnen, oder auch in Gleichung (56) woraus I_x durch Division der vorher erhaltenen negativen Ableitung von V_x durch z hervorgeht.

Von diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir nun, wie dies auch bei den Gleichströmen geschah, zur Behandlung folgender Fälle über:

1. Fall eines Stromkreises nach Fig. 14, aber unter Vernachlässigung der Kapazität c und der Ableitung g der Leitung. $c = g = 0$.

2. Allgemeiner Fall, unter Berücksichtigung aller besprochenen Einflüsse, d. h. der sie kennzeichnenden Konstanten und r , g , l und c .

Der erste Fall ist für die *gewöhnliche* industrielle Technik typisch, wo dank der niedrigen Frequenzen der hier verwendeten Starkströme und den verhältnismässig kurzen Uebertragungsdistanzen die Kapazität zwischen den einzelnen Leitern, und in noch höherem Masse die Ableitung, eine auch bei verhältnismässig hohen Spannungen, allgemein technisch gesprochen, untergeordnete Rolle spielen. Anders liegen aber die Verhältnisse bei Uebertragungen durch Kabel, auch bei verhältnismässig kurzen Entfernungen, und bei solchen

durch lange Freileitungen. Ganz wesentlich anders verhält es sich auch bei Telephonleitungen, bei denen infolge der höheren und vielfachen Frequenzen der hier verwendeten Ströme und dem ganz verschiedenen Verhältnis zwischen erzeugten und durch die Empfangsapparate aufgenommenen Ströme die Erscheinungen einen grundsätzlich andern Charakter besitzen als er vor allem unter Vernachlässigung der Kapazitätswirkungen, aber auch der Ableitung, hervorgehen würde. Dieser letztere Fall bietet ein sehr hohes Interesse, ist aber so spezieller Art, dass wir ihn im Verlaufe dieser Abhandlung entweder gar nicht, oder dann nur kurz streifend, behandeln werden und uns vorbehalten müssen, bei passender Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Wir haben in obigen Bemerkungen öfters das Wort „verhältnismässig“ gebraucht. Der Grund liegt in dem Umstand dass, sobald man, von den Spezialfällen sich befreiend, einen Ueberblick über die Gesamtheit der wunderbaren Anwendungsmöglichkeiten elektrischer Uebertragung gewinnen will, man überrascht ist wie viel Relativität den aus der Betrachtung dieses oder jenes konkreten Falles gezogenen Schlüssen anhaftet und wie sehr man sich deshalb vor zu weit gehenden Verallgemeinerungen hüten muss. So können z. B. die Bezeichnungen „lange Leitung“ oder „kurze Leitung“ ganz andere Bedeutung annehmen, je nach dem Gebiete in dem man sich befindet. Während eine Energie-Uebertragungsleitung von 400 km Länge bei Betrachtung einzelner sie betreffender Aufgaben (örtliche Phasenverschiebung, Dämpfung) als *kurze Leitung* bezeichnet werden darf, muss sie bei andern (plötzliche Entlastung, Regulierung etc.) als lange Leitung aufgefasst werden. Eine unterirdische Telephonleitung von gleicher Länge hingegen wird stets als „lange Leitung“, ja sogar als „sehr lange Leitung“ zu gelten haben.

1. Beschäftigen wir uns nun, wenn auch nur kurz, mit dem ersten Fall und betrachten wir in Fig. 14 den Stromkreis GLR , in welchem die EMK des Generators wirkt:

$$e = f(t) = E \sqrt{2} \sin \omega t = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t.$$

Unter Voraussetzung dass $g = c = 0$ werden die Gleichungen (56) und (57):

$$(60) \quad -\frac{dV_x}{dx} = (r + j\omega l) I_x = z I_x$$

$$(61) \quad \text{und} \quad -\frac{dI_x}{dx} = 0$$

Sie können auch, da $r + j\omega l$ der komplexe Ausdruck der *Impedanz pro Längeneinheit der Leitung* ist und mit Rücksicht auf das oben gesagte, geschrieben werden:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{dV_x}{dx} = z I_x = z e^{j\varphi} I_x \\ \text{und} \quad -\frac{dI_x}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{mit } z = \sqrt{r^2 + \omega^2 l^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega l}{r}$$

Aus der zweiten Gleichung geht hervor dass

$$(63) \quad I_x = -A = \text{konstant ist,}$$

was besagt, dass die Stromstärke in jedem Punkt des Stromkreises gleichen Effektivwert und gleiche Phase besitzt. Aus der ersten Gleichung erhält man unter Berücksichtigung des vorausgehenden Resultats:

$$(64) \quad V_x = z A x + B = z A x e^{j\varphi} + B$$

Da die Phase der Spannung v_0 am Leitungsanfang als Ursprung für die Phasen gilt, d. h. da

für $x = 0$: $V_x = V_0$

und da für $x = Z$: $V_x = V_L = -Z' A = -Z' A e^{j\varphi}$ ist,

findet man durch Einsetzen dieser Bedingungen in die Gleichung (64) und unter Berücksichtigung der Gleichung (63):

$$B = V_0$$

$$A = -\frac{V_0}{Z' + Lz} = -\frac{V_0}{Z' + Z}$$

woraus endlich nach einigen Umformungen:

$$(65) \quad V_x = V_0 \left[1 - \frac{Z e^{j\varphi}}{Z' e^{j\varphi} + Z e^{j\varphi}} x \right] = V_0 \left[1 - \frac{Z}{Z' + Z} x \right]$$

$$(66) \quad \text{und} \quad I_x = -A = \frac{V_0}{Z' e^{j\varphi} + Z e^{j\varphi}} = \frac{V_0}{Z' + Z} = I$$

hervorgehen, wobei $Z = Lz = Lz e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$ der Ausdruck für die totale Impedanz der Linie ist.

Für $Z' = \infty$, für die am Ende *offene* Leitung, wird:

$$(67) \quad \begin{cases} V_x = V_0 = \text{konstant} \\ I_x = 0, \end{cases}$$

Die Spannung hat also in jedem Punkte des Stromkreises gleichen Effektivwert und gleiche Phase.

Für $Z' = 0$, d. h. für die am Ende *kurzgeschlossene* Leitung, wird:

$$(68) \quad \begin{cases} V_x = V_0 \left[1 - \frac{Z}{Lz} x \right] = V_0 \left[1 - \frac{x}{L} \right] \\ \text{und} \quad I_x = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{Z} e^{-j\varphi} = I. \end{cases}$$

In diesem Falle besitzt die Spannung in allen Punkten der Leitung die gleiche Phase; ihre Grösse aber nimmt stetig und linear um den Betrag:

$$\frac{dV_x}{dx} = -\frac{V_0}{L} \text{ pro Längeneinheit ab.}$$

Seinerseits besitzt der Strom gleichen Effektivwert und gleiche Phasen-Nacheilung von φ gegenüber der Spannung. Man kann daher unter gleichzeitiger *Wiedereinführung der veränderlichen t* schreiben:

$$(69) \quad \begin{cases} v = V_0 \sqrt{2} \left[1 - \frac{x}{L} \right] \sin \omega t = f(x, t) \\ i = \frac{V_0}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V_0 \sqrt{2}}{L \sqrt{r^2 + \omega^2 l^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega l}{r} \right) = g(t) \end{cases}$$

Dasselbe Verfahren könnte man auch auf den allgemeinen, in den Gleichungen (65) und (66) dargestellten Fall anwenden. Man müsste zuerst von den komplexen Grössen auf die reellen zurückkehren und dann die veränderliche t entsprechend wieder einführen.

Man würde dann leicht einsehen, dass in diesem Fall die Spannung V nicht mehr in allen Punkten der Leitung die gleiche Phase besitzt, mit Ausnahme des Falles $\varphi = \varphi'$. Ebenso würde man erkennen, dass der Effektivwert der Spannung mit x sich nicht linear ändert, wiederum mit Ausnahme des Falles $\varphi = \varphi'$ und endlich, dass der *Spannungsabfall* für gewisse negative Werte von φ' (voreilende Phasenverschiebung im Verbraucher: übererregte Synchronmotoren, Kapazitäten) am Ende der Leitung $x = L$ negativ ausfallen könnte, wenn wachsendem x die positive Richtung entspricht, d. h. wenn

$$\left(\frac{dV}{dx} \right)_{x > 0} > 0.$$

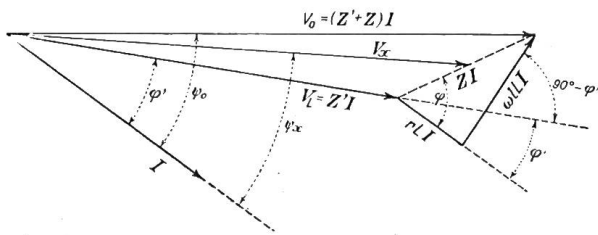


Fig. 15.

Es kann also eine Erhöhung der Spannung vom Leitungsanfang $x = 0$ aus nach dem Leitungsende $x = L$ hin vor- kommen.

Diese Resultate gehen zur Evidenz aus der Fig. 15 hervor, wo φ_x die Phasen- verschiebung von v gegenüber i in einem Punkt x der Leitung und φ_0 die gleiche Grösse für $x = 0$ darstellen.

Die Gleichungen (65) bis (68) zeigen gleichen Aufbau wie die Gleichungen (13) bis (16), die wir für den Stromkreis (Fig. 4) ähnlich dem soeben betrachteten der Fig. 14, bei Gleichstrom erhielten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die reellen Grössen r und R der letzteren (Widerstände) in den ersteren durch die komplexen Grössen z und Z ersetzt sind (komplexe Impedanzen), weshalb man sie, wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, geometrisch aufzufassen hat (Zusammensetzung).

2. Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über, bei dem auch die vier Konstanten r , g , l und c mitberücksichtigt werden.

Durch genaue Betrachtung der Gleichung (56), die wir auch schreiben können

$$-dV_x = r dx I_x + j\omega l dx I_x,$$

erkennt man, dass die Spannungs-Änderung $-dV_x$ zur Ueberwindung der mit dem Strome in Phase befindlichen Gegenspannung $r dx I_x$ (Widerstand $r dx$) und der Reaktanz- Spannung $j\omega l dx I_x$ (Reaktanz $\omega l dx$) die infolge des Faktors $j = \sqrt{-1}$, dem Strome im betrachteten Punkte x um 90° voreilt, dient.

Ebenso erfährt der Strom längs des Elements dx die Änderung $-dI_x$, welche gleich ist der geometrischen Summe des Ableitungsstromes $g dx V_x$, in Phase mit V_x , und über den Isolator mit Ableitung $g dx$ geschlossen und dem Verschiebungsstrome (Kapazität) $j\omega c dx V_x$, um 90° dem V_x voreilend, über die Kapazität $c dx$ des Isolators geschlossen. Dies zeigt uns die Gleichung (57), die wir nun schreiben:

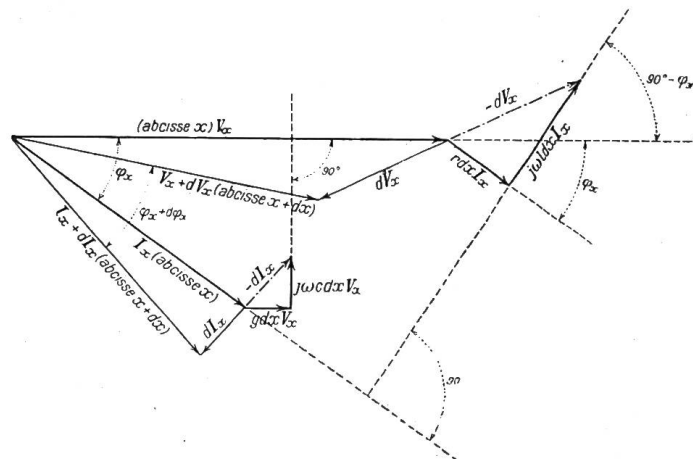
$$-dI_x = g dx V_x + j\omega c dx V_x \text{ (siehe Fig. 16)}$$

Es geht hieraus deutlich her- vor, dass die Spannung v und der Strom i mit x sowohl nach Grösse als Phase sich ändern. Die Variation von v nach Grösse und Phase rührt nicht nur von den Einflüssen des Widerstandes und der Selbstinduk- tion her, sondern auch von denen der Ableitung und der Kapazität, da i gleichzeitig variiert. Dasselbe gilt für i . Da ferner die zeitliche Änderung als sinoidal vorausge- setzt ist, weil allein diese Annahme uns gestattete die Gleichungen (56), (57), (58) und (59) in symbolischer Form aufzustellen, werden i und v , und nicht etwa bloss v , Funktionen des Abstandes x und der Zeit t sein. Wir werden so auf die Lösungen

$$v = f(x, t)$$

$$i = \varphi(x, t) \text{ kommen, wie schon oben gesagt.}$$

Wenn wir die Gleichung (58) betrachten, die wir nach ausmultiplizieren der Klammer- ausdrücke nun anders schreiben

Fig. 16. (Für $x = 0$ in G, fig. 14).

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_x}{dx^2} &= [rg - \omega^2 Lc + j\omega(Lg + rc)] V_x = \mathbf{z} \mathbf{a} V_x \\ &= (\beta + j\gamma)^2 V_x \\ &= k^2 V_x.\end{aligned}$$

sehen wir, dass wir wieder zu einer Gleichung gelangen, welche gleiche Form wie Gleichung (18) aufweist bis auf das k , das, statt gleich der reellen Grösse $\sqrt{rg}$ zu sein nun gleich ist einer komplexen Funktion von r , g , L , c und ω , und das V_x , das hier als komplexe Grösse den dort reellen Wert ersetzt.

Wir werden demnach als Lösungen haben:

$$\text{für } V_x: V_x = A e^{(\beta + j\gamma)x} + B e^{-(\beta + j\gamma)x}$$

und für I_x , gemäss (56)

$$I_x = -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{dV_x}{dx} = \frac{\beta + j\gamma}{r + j\omega L} [B e^{-(\beta + j\gamma)x} - A e^{(\beta + j\gamma)x}]$$

in denen A und B komplexe Grössen sind, homogen in Bezug auf eine Spannung, deren Module (Effektivwerte) und Argumente (Phasen) sich mit Hilfe der Grenzbedingungen bestimmen lassen.

Wir können demnach setzen:

$$\begin{aligned}A &= V_1 e^{-j\alpha_1} \\ B &= V_2 e^{-j\alpha_2}\end{aligned}$$

und schreiben:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} V_x &= V_1 e^{\beta x} e^{j(\gamma x - \alpha_1)} + V_2 e^{-\beta x} e^{-j(\gamma x + \alpha_2)} \\ \text{und } I_x &= \frac{V_2}{Z_0} e^{-\beta x} e^{-j(\gamma x + \alpha_2 + \delta)} - \frac{V_1}{Z_0} e^{\beta x} e^{j(\gamma x - \alpha_1 - \delta)} \end{aligned} \right.$$

indem wir setzen

$$(71) \quad \frac{r + j\omega L}{\beta + j\gamma} = Z_0 = Z_0 e^{j\delta} \text{ gleich einer Grösse, die einer Impedanz homogen ist.}$$

Indem wir endlich

$$\frac{V_2}{Z_0} = I_2 \text{ und } \frac{V_1}{Z_0} = I_1 \text{ setzen,}$$

und dann die veränderliche t gemäss der getroffenen Annahme [siehe Gleichungen (54) und (55)] wieder einführen, erhalten wir:

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= V_1 \sqrt{2} e^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2) = f(x, t) \\ \text{und } i &= I_2 \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2 - \delta) - I_1 \sqrt{2} e^{\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_1 - \delta) = g(x, t) \end{aligned} \right.$$

und es bleibt uns noch die Bestimmung der Konstanten V_1 und V_2 , sowie der Phasenwinkel α_1 und α_2 aus den Grenzbedingungen übrig.

Diese Bestimmung von V_1 , α_1 , V_2 und α_2 kann ohne Schwierigkeit entweder analytisch ausgeführt werden oder aber graphisch, wie *M. A. Blondel* dies in einer Serie äusserst bemerkenswerter Arbeiten über diesen Gegenstand (*Bulletin de la Société Internationale des Electriciens*, 1905; *Eclairage Electrique*, 1906; etc.) gezeigt hat.

Die physikalische Deutung dieser Resultate ist evident. Es genügt nur wenig Uebung in dieser Materie um sofort zu erkennen, dass die Funktionen v und i als *Summe* oder *Differenz* von zwei *gedämpften Schwingungen* erscheinen, die in *entgegengesetzter Richtung* sich mit *gleicher Geschwindigkeit* fortpflanzen.

Da nun gerade der Zweck dieser Arbeit darin besteht, diese für die Vorstellung etwas schwierigen Begriffe mehr zu verbreiten und auch demjenigen, der sich seltener mit solcher Materie beschäftigt, näher zu bringen, wollen wir die Schwierigkeiten etwas auseinanderhalten und mit der Betrachtung des Falles der unendlich langen Leitung, der sich besonders gut zum Hervorheben des Charakters der Wechselstromübertragung eignet, beginnen.

Zuerst aber möchten wir auf einiges zurückkommen. Wir haben gesetzt:

$$k^2 = (\beta + j\gamma)^2 = rg - \omega^2 lc + j\omega(lg + rc) = \mathbf{z} \mathbf{a}$$

$$\text{woraus } \beta^2 - \gamma^2 = rg - \omega^2 lc = b$$

$$\text{und } 2\beta\gamma = \omega(lg + rc) = d.$$

Hieraus folgt:

$$(73) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b + \sqrt{d^2 + b^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[rg - \omega^2 lc + \sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} \right]$$

$$(74) \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-b + \sqrt{d^2 + b^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-rg + \omega^2 lc + \sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} \right]$$

wodurch

$$k = \beta + j\gamma = \sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}}$$

vollständig bestimmt ist.

Im Spezialfall, wo $\omega = 0$ ist, d. h. Gleichstrom im Beharrungszustand (Strom mit Frequenz null oder unendlich langer Periode) haben wir:

$$(75) \quad \begin{cases} \beta = \sqrt{rg} \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad [\text{siehe Formel (20)}]$$

woraus $k = \beta_{\omega=0} = \sqrt{rg}$, als *reeller* Wert gewonnen wird.

Im Falle wo r und g vernachlässigbar sind (Stromkreise oder Leitungen von sehr kleinem Widerstand und sehr guter Isolation) haben wir:

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \omega \sqrt{lc} = 2\pi f \sqrt{lc}$$

$$\text{und } k = j\omega \sqrt{lc}, \text{ als } \textit{imaginären Wert}.$$

Da wo g und l vernachlässigbar sind (gewöhnliches Telephon-Kabel) wird:

$$\beta = \gamma = \sqrt{\frac{\omega cr}{2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega cr}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega cr}{2}} \quad (\textit{komplexer Wert}).$$

Wenn $g = 0$, oder *praktisch vernachlässigt werden kann* (Energie-Uebertragungsleitung) wird

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z - \omega l)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z + \omega l)}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z - \omega l)} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z + \omega l)} \quad (\textit{komplexer Wert}).$$

Endlich ergibt der mehr nur theoretisches Interesse bietende Fall, wo *die Konstanten der Bedingung: $r:l = g:c$ genügen:*

$$\beta = \sqrt{rg}; \gamma = \omega \sqrt{lc}; k = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{lc} \quad (\textit{komplexer Wert}).$$

Anderseits haben wir eine Grösse $\mathbf{Z}_0$ als komplexe Impedanz eingeführt (71), die wir als Symbol wählten für:

$$\frac{r + j\omega l}{\beta + j\gamma} = \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{a}}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = \mathbf{Z}_0 e^{j\delta} = \mathbf{Z}_0 [\cos \delta + j \sin \delta]$$

Man findet nun nach einigen Umrechnungen, wie am Anfang dieses Kapitels gezeigt, dass ihr Modul

$$\text{und ihr Argument } \begin{cases} Z_0 = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 I^2}{\beta^2 + \gamma^2}} \\ \delta = \operatorname{actg} \frac{\beta \omega I - \gamma r}{\beta r + \gamma \omega I} \text{ ist.} \end{cases}$$

Wenn wir nun auf die interessanteren der oben behandelten Spezialfälle zurückgreifen, so sehen wir dass

$$\text{für } \omega = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{r}{g}} = R_0; \quad \delta = 0 \quad [\text{siehe (21)}]$$

$$\text{für } r = g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{I}{c}}; \quad \delta = 0$$

$$\text{für } I = g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{r}{\omega c}}; \quad \delta = -45^\circ$$

$$\text{für } g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{\omega c}}; \quad \delta, \text{ wie oben (80) mit den Spezialwerten von } \beta \text{ und } \gamma \text{ für } g = 0$$

$$\text{für } r : I = g : c; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{I}{c}}; \quad \delta = 0.$$

Gehen wir nun zur Behandlung einer Anzahl Spezialfälle über, uns immerhin nur auf das Wesentlichste beschränkend.

I. Die unendlich lange Leitung.

Stellen wir uns vor, dass eine solche (Fig. 14) unter der Spannung

$$v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

am Leitungs-Anfang A , $x = 0$ gehalten werde. Wenn wir die Phase dieser Spannung als Phasenursprung annehmen, so können wir schreiben

$$V_x = V_0, \text{ für } x = 0.$$

Da nun die Leitung unendlich lang ist, so haben wir, unabhängig von den Bedingungen am Ende B ,

$$V_x = I_x = 0, \text{ für } x = \infty.$$

Unter Berücksichtigung dieser Grenzbedingungen in der ersten der Gleichungen (80) sehen wir, dass

$$(81) \quad \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = V_0; \quad \alpha_2 = 0 \\ \text{woraus } V_x = V_0 e^{-\beta x} e^{-j\gamma x} = V_0 e^{-(\beta + j\gamma)x} = f(x) \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\beta x} e^{-j(\gamma x + \delta)} = \frac{V_x}{Z_0 e^{j\delta}} = \frac{V_x}{Z_0} = g(x) \end{cases}$$

oder wenn wir die Zeit t wieder einführen und von den Hyperbel-Funktionen Gebrauch machen:

$$(82) \quad \begin{cases} v = V_0 \sqrt{2} [\cosh \beta x - \sinh \beta x] \sin(\omega t - \gamma x) = f(x, t) \\ \text{und } i = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{2} [\cosh \beta x - \sinh \beta x] \sin(\omega t - \gamma x - \delta) = g(x, t) \end{cases}$$

Welches ist nun die Bedeutung dieser Resultate?

Zuerst erkennt man (81), dass für $x = 0$,

$$(83) \quad I_x = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\delta} = I_0 \text{ wird,}$$

d. h. dass die unendlich lange Leitung, welches auch die Bedingungen an ihrem Ende B sein mögen, an ihrem Anfang einen Strom aufnimmt, der nach Effektivwert und Phase demjenigen gleich ist, welchen die Stromquelle liefern würde, wenn sie direkt über einen konzentrierten (punktförmigen) äussern Stromkreis von der Impedanz Z_0 geschlossen wäre (80). Diese Impedanz Z_0 heisst *charakteristische Impedanz* oder kurz *Charakteristik* der Leitung.

Andererseits zeigt Gleichung (81), dass die Spannung, welche in A den Wert V_0 hat, auf der unendlich langen Leitung im Abstände $x=1$ auf den Wert $V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)}$ und im Abstand $x=L$ auf den Wert $V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}$ übergeht.

Das Verhältnis

$$\frac{V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}}{V_0} = \varepsilon^{-\beta L} \varepsilon^{-j\gamma L}$$

das auf Grund der auf den Seiten 41 und 51 aufgestellten Beziehungen auch geschrieben werden kann:

$$\varepsilon^{-\beta L} \varepsilon^{-j\gamma L} = [\cos h \cdot \beta L - \sin h \cdot \beta L] [\cos \gamma L - j \sin \gamma L]$$

drückt aus, dass wenn man von A , wo der **Effektivwert** der Spannung V_0 ist, nach dem Punkte $x=L$ übergeht, der Effektivwert der Spannung

$$V_0 \varepsilon^{-\beta L} = V_0 [\cos h \cdot \beta L - \sin h \cdot \beta L]$$

wird, während ihre **Phase** in diesem Punkte $x=L$ um einen Winkel γL derjenigen der Spannung in A nacheilt. Dieses Verhältnis heisst **normaler Dämpfungsfaktor** der Leitung für die Länge L .

Der Exponent $(\beta + j\gamma)L$ ist ein komplexer Winkel und heisst **Dämpfungs-exponent** für die Länge L .

Der reelle Teil von $\varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}$, also $\varepsilon^{-\beta L}$, ist der **Wert-Dämpfungsfaktor** oder **reelle Dämpfungsfaktor**; βL selbst ist dann der **reelle Dämpfungsexponent**; er ist dem **Effektivwert** der Spannung zugeordnet und ist ein *hyperholischer Winkel*. Der imaginäre Teil $\varepsilon^{-j\gamma L}$ ist der **Phasen-Dämpfungsfaktor**; γL selbst ist der **Phasen-Dämpfungsexponent**; er ist der **Phase** der Spannung zugeordnet und ist ein *trigonometrischer Winkel*. (Man vergleiche das am Anfang dieses Kapitels gesagte, Seite 51.) Was die **Stromstärke** betrifft, so zeigt der Ausdruck (81), dass sie dem gleichen Gesetze wie die Spannung folgt, aber mit einer konstanten Phasendifferenz δ .

Diese **Phasenverschiebung** (man bezeichnet sie oft als örtliche Phasenverschiebung, da sie von den verteilten Konstanten herrührt) oder **Phasendifferenz** δ ist negativ und liegt gewöhnlich zwischen -45° und 0° [siehe Formel (80)], so dass i dem v um einen Winkel δ voreilt.

Die Formeln (81) oder (82) zeigen aber auch noch, dass v und i in allen im gegenseitigen Abstand

$$(84) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$$

liegenden Punkten gleiche Phase besitzen. Wenn wir also einen bestimmten **Moment** betrachten, z. B. den Zeitpunkt $t = \frac{T}{4}$, in welchem die Spannung in A ein Maximum und gleich $V_0 \sqrt{2}$ ist, so ist auch im Punkte mit der Abszisse $x=\lambda$, also im Abstand λ von A , **im selben Moment** die Spannung ein Maximum mit dem Wert $V_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta \lambda}$, ebenso erreicht im Abstand 2λ im **selben Moment** die Spannung ihren Maximalwert, $V_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-2\beta \lambda}$, und so fort.

Eine Viertelperiode später, d. h. im Zeitpunkt $t = \frac{T}{2}$ ist die Spannung in A null.

Sie wird im **gleichen Moment** ein Maximum von der Grösse $V_0 \varepsilon^{-\beta \frac{\lambda}{4}}$ im Punkt mit der Abszisse $x = \frac{\lambda}{4}$ haben. Ebenso im Punkte $x = \frac{5}{4}\lambda$ mit dem Wert $V_0 \varepsilon^{-\beta \frac{5\lambda}{4}}$.

Die gleiche Erscheinung tritt auch für den Strom i ein, aber mit einer zeitlichen Verschiebung von der Grösse

$$\omega = \frac{\delta}{\omega} = T \frac{\delta}{2\pi}$$

im Sinne einer Voreilung von i gegen v , oder, in einem bestimmten *Moment* werden v und i in zwei um die Strecke $\frac{\delta}{\gamma}$ entfernten Punkten gleiche Phase besitzen. Die Formeln (81)

und (82) zeigen also an, dass v und i als zwei gedämpfte Wellen erscheinen, die sich in positiver Richtung, d. h. von A weg nach dem unendlich entfernten Ende B hin, fortpflanzen. Die **Einzel-Welle** i eilt der **Einzel-Welle** v um die Länge

$$\frac{\delta}{\gamma} = \gamma \cdot \frac{\delta}{2\pi}$$

vor. Beide schreiten in der Zeitdauer einer Periode um den Wert λ vor, das heisst in der Zeit $T = \frac{1}{f}$, so dass ihre **Fortpflanzungsgeschwindigkeit**

$$(85) \quad v = \frac{\lambda}{T} = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \frac{2\pi f}{\gamma} = \frac{\omega}{\gamma} \text{ ist.}$$

Die Strecke λ ist die **Wellenlänge** der Leitung oder Uebertragung und v die **Fortpflanzungsgeschwindigkeit** der elektrischen Wellen auf der betrachteten Leitung.

Diese Resultate treten deutlich aus den folgenden Figuren, welche die Grösse v darstellen, hervor.

Bei Darstellung durch feste Vektoren (komplexe Grössen) wird man, wie dies in Figur 17 geschehen, die Vertikale $0y$ als Phasenursprung wählen können. Die Spannung am Leitungsanfang, $x = 0$, wird durch den Vektor $0A = V_0 \sqrt{2}$, auf $0y$ abgetragen, dargestellt weil die Phase von v_0 als Phasen-Ursprung genommen wurde. Im Abstand $\frac{1}{12} \lambda$ herrscht eine Spannung von der Amplitude

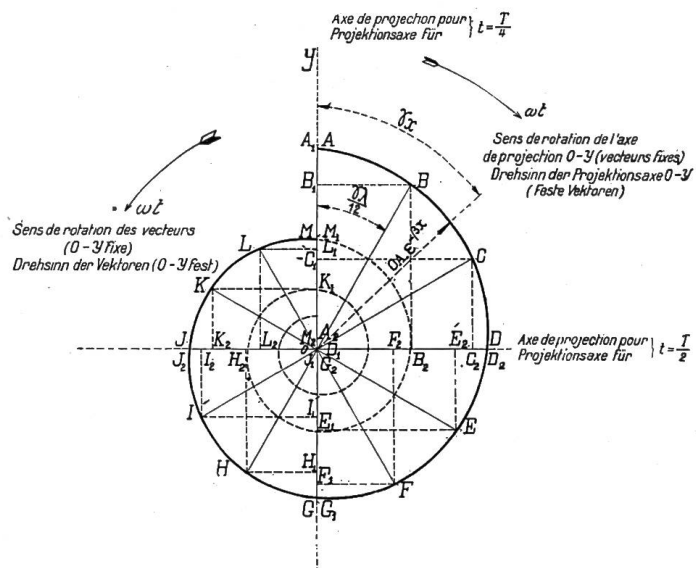


Fig. 17.

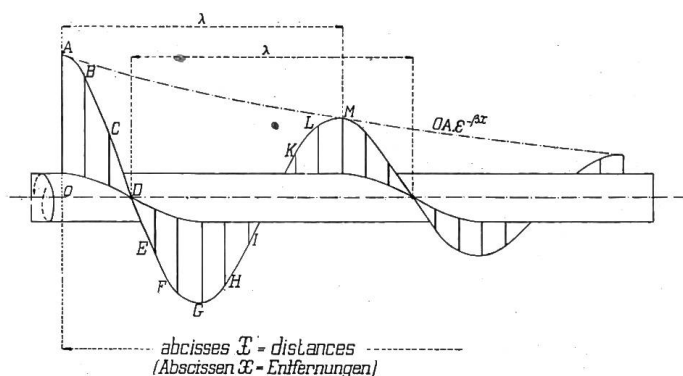
Unendlich lange Leitung $V_x = f(x)$ 

Fig. 18.

Unendlich lange Leitung $V_x = f(x)$

$$V_0 \sqrt{2} e^{-\beta \frac{\lambda}{12}}$$

deren Phase gegenüber derjenigen der Spannung am Anfang der Leitung $x = 0$ um den Winkel $\gamma \frac{\lambda}{12} = 30^\circ$

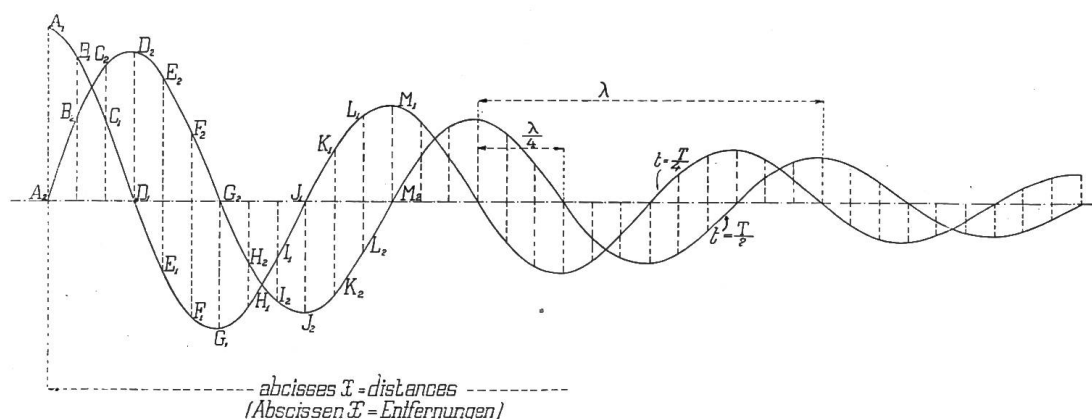
nacheilt. Wir werden sie daher durch einen Vektor

$$0B = 0A e^{-\beta \frac{\lambda}{12}}$$

darstellen können, den wir auf einem um 30° hinter $0y$ zurückbleibenden Strahl abtragen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, d. h. auf der Leitung je um $\frac{\lambda}{12}$ weiter schreitend, erhalten wir die Figur 17. Die Kurve, welche die Endpunkte der Vektoren $0A$, $0B$, $0C$, etc. verbindet, ist eine logarithmische Spirale, die in der Figur bis zur Strecke λ dick ausgezogen und für die beiden weitem Strecken λ nur strichpunktiert ist. Diese Figur stellt also den Verlauf der Endpunkte der Spannungsvektoren von der Generator-Seite der Leitung aus gesehen dar.

Indem man diese Vektoren den entsprechenden Punkten der Leitung zuordnet und nun die Leitung seitlich betrachtet, geht die ausgestreckte Spirale in die Schraubenlinie mit konstanter Steigung (Ganghöhe) aber mit exponentiell abnehmenden Radien der Figur 18 über. Diese Schraubenlinie, die sich um die Axe der Leitung emporwindet, stellt die Gleichung (81) in V_x dar. Durch Projektion dieser Schraubenlinie auf die Papierebene erhält man (Fig. 19) durch die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$, die Spannungswelle im Moment $t = \frac{T}{4}$.



was übrigens naheliegt, auch wenn man dem Skineffekt, der sich durch eine Vergrößerung von r mit wachsendem ω äussert, Rechnung trägt, dass β sehr rasch einem Grenzwert zustrebt, und dass dieser letztere schon für Frequenzen, die von den industriell gebräuchlichen nur wenig verschieden sind, erreicht wird. So sehen wir in Figur 21 β in Funktion der Frequenz f für eine Freileitung mit folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned} r &= 0,35 \, \Omega \text{ pro km} \\ g &= 1,10^{-7} \text{ mho pro km} \\ l &= 0,0014 \text{ Henry pro km} \\ c &= 0,008 \text{ Mikro-Farad pro km} \end{aligned}$$

dargestellt, von der später noch die Rede sein wird und die mit einer Frequenz von 60 Perioden pro Sekunde arbeitet. Es wächst demnach β bis zu 200 Perioden pro Sekunde ziemlich rasch, um dann praktisch konstant zu bleiben. Für diese genannte Leitung wächst β um ungefähr 4%, wenn t von 60 auf 200 Perioden pro Sekunde steigt.

Die Grösse γ strebt ihrerseits sehr rasch dem Werte $\omega \sqrt{lc}$ zu. Für die betrachtete Leitung (siehe Kurve γ , Fig. 21) tritt dies ebenfalls von 200 Perioden pro Sekunde ein. Es folgt hieraus, dass für eine Freileitung die Geschwindigkeit v sehr rasch sich dem Werte

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

nähert, der bekanntlich zahlenmässig *gleich der Lichtgeschwindigkeit*, d. h. 300 000 km pro Sekunde ist. Für obige Leitung ergibt sich

$$\sqrt{lc} = \sqrt{0,0014 \cdot 0,008 \cdot 10^{-6}} = 0,0000334$$

$$\text{was genau } v = \frac{1}{0,0000334} = 300\,000 \text{ km pro Sekunde entspricht.}$$

Mit den wirklichen Werten von γ rechnend, erhält man für

$f = 25$	$\gamma = 0,61742459 \cdot 10^{-3}$	$\lambda = 10412,8 \text{ km}$	$v = 260320 \text{ km pro Sekunde}$
60	$1,31677354 \cdot 10^{-3}$	4771,67 km	286300 " " "
75	$1,62305260 \cdot 10^{-3}$	3871,33 km	290349 " " "
180	$3,80548406 \cdot 10^{-3}$	1651,07 km	297193 " " "
300	$6,32071370 \cdot 10^{-3}$	994,05 km	298215 " " "
420	$8,8404900 \cdot 10^{-3}$	710,73 km	298507 " " "

Man sieht also, dass in einem Fall wie dem soeben betrachteten, sich die Wellen von einem gewissen Werte von ω an *mit gleicher Dämpfung und mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, die nahe an die Lichtgeschwindigkeit, d. h. 300 000 km pro Sekunde grenzt*. Wenn nun diese Leitung mit ihren parallel gelegenen Leitern statt *in Luft*, wie es oben der Fall war, sich in einem homogenen Medium von magnetischer Permeabilität μ und dielektrischer Leitfähigkeit K befindet, so wird die Selbstinduktion l μ -mal und die Kapazität c K -mal grösser als vorhin. Damit wird die Geschwindigkeit v , vom Momente

an wo sie als durch den Wert $\frac{1}{\sqrt{lc}}$ gegeben angesehen werden kann, $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$ -mal so gross

als diejenige des Lichts, also $\frac{300\,000}{\sqrt{K\mu}}$ km pro Sekunde.

Was die Charakteristik Z_0 anbetrifft, so ist zu sagen, dass bei den Verhältnissen welche die obige Leitung aufweist, ihr *Modul* sehr rasch dem Werte

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{0,0014}{0,008}} = 10^3 = 418$$

zustrebt und ihr Argument δ dem Werte 0.

Es geht dies deutlich aus folgender Tabelle hervor: für

$f = 25$	$Z_0 = 572,6 \, \Omega$	$\delta = -26^\circ 39' 20''$
60	458,1 Ω	$-15^\circ 49' 30''$
75	445 Ω	$-13^\circ 12' 53''$
180	423,3 Ω	$-5^\circ 54' 55''$
300	420,2 Ω	$-3^\circ 43' 40''$
420	419,2 Ω	$-2^\circ 34' 14''$

Man erkennt also dass, wenn es sich um eine Freileitung handelt wie die soeben untersuchte, die **Charakteristik Z_0** für Werte von ω oder f die nicht viel höher liegen als diejenigen der industriell verwerteten Pulsationen und Frequenzen durch einen Ohm'schen Widerstand ersetzt werden darf vom Werte

$$Z_0 = R = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

wobei l und c die kilometrische Selbstinduktion bezw. die kilometrische Kapazität der Leitung bedeuten (da $\delta = 0$, so wird Z_0 zur reellen Grösse).

Hieraus kann sofort der weitere Schluss gezogen werden, aber, wenigstens vorläufig, nur für die unendlich lange Leitung und für eine genügend hohe Frequenz der Grundwelle, dass, wenn die ursprüngliche Spannung nicht sinoidal ist (also entgegen der obigen Annahme), sich die nicht-sinoidale, einer sinoidalen Grundwelle und ihren sinoidalen Oberwellen äquivalente Welle, praktisch gesprochen, ohne Deformation fortpflanzen wird. Dies ist der Fall, weil die sinoidalen Schwingungen, aus denen sie besteht, sich mit der gleichen Dämpfung β und der gleichen Geschwindigkeit fortbewegen; sie erlangen in jedem Punkt der Leitung ihre bezüglichen Phasen, so dass in einem solchen Punkte, wenn nicht dem Werte, so doch der Form nach die verzerrte ursprüngliche Welle wieder hergestellt wird.

Wir sagten „praktisch gesprochen“, da sich diese deformationsfreie Fortbewegung in Wirklichkeit nur für den theoretischen Fall, wo die Konstanten der Beziehung $r:l=g:c$ genügen, einstellt.

Es ist in der Tat:

$$\beta = \sqrt{rg}, \quad \gamma = \omega \sqrt{lc}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

und $\delta = 0$ für jeden Wert von ω , wie man sich leicht durch Einsetzen der obigen Bedingung in die Formeln (73), (74) und (80) überzeugen kann, folglich

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

und man kann demnach, unter Berücksichtigung des soeben und früher Gesagten, *speziell für die unendlich lange Leitung mit $r:l=g:c$* schreiben:

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \sqrt{2} \left[\cos h \cdot \sqrt{rg} x - \sin h \cdot \sqrt{rg} x \right] \sin \omega \left[t - \frac{x}{v} \right] = f(x, t) \\ \text{und } i = V_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \sqrt{2} \left[\cos h \cdot \sqrt{rg} x - \sin h \cdot \sqrt{rg} x \right] \sin \omega \left[t - \frac{x}{v} \right] = g(x, t) \end{array} \right.$$

Die Wellen für v und i haben in jedem Punkte der Leitung gleiche Phase. Sie erfahren längs der Leitung keine Deformation, nehmen aber entsprechend dem Exponentialgesetz $e^{\sqrt{r \cdot g} x}$ ab.

$$\text{Im Falle } r=g=0 \text{ ist } \beta=0, \gamma=\omega \sqrt{lc}, Z_0=\sqrt{\frac{l}{c}} \text{ und } \delta=0$$

woraus folgt

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \sqrt{2} \sin \left[\omega t - \omega \sqrt{Lc} x \right] = V_0 \sqrt{2} \sin \omega \left[t - \frac{x}{v} \right] = f(x, t) \\ \text{und} \quad i = V_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \sqrt{2} \sin \left[\omega t - \omega \sqrt{Lc} x \right] = V_0 \sqrt{2} \sin \omega \left[t - \frac{x}{v} \right] = g(x, t) \end{array} \right.$$

Die Strom- und Spannungswelle haben in jedem Punkte der Leitung gleiche Phase. Sie erleiden längs der Leitung weder Deformation, noch Dämpfung.

Der erste dieser Spezialfälle besitzt für die industriellen Starkströme keine grosse Bedeutung. Wohl aber ist es leicht verständlich, dass man alles Interesse hat, sich bei Telefonleitungen diesem Zustande zu nähern, weil die von den Vibrationen der Stimme verursachten Ströme im Empfänger möglichst wenig verzerrt ankommen sollen. Man erreicht dies allerdings nicht immer ohne andere Schwierigkeiten damit einzuführen (Reflexion durch Aenderung der Charakteristik) und oft auch nur unvollkommen, durch die Anwendung gewisser Kunstgriffe, auf die wir hier natürlich nicht eingehen können.

II. Die Leitung von endlicher Länge.

Der vorige Fall bot uns Gelegenheit recht deutlich zu zeigen wie sich v und i längs einer homogenen, unendlich langen Leitung ändern. Auf Grund der gemachten Annahmen, variieren v und i in jedem Punkte der Leitung zeitlich *sinoidal* und können einzeln als durch das Gleiten einer *gedämpften Einzelwelle* verursacht betrachtet werden, die am Leitungsanfang stetig erzeugt, sich mit einer Geschwindigkeit $\frac{\omega}{\gamma}$ fortbewegt. (Man beachte das weiter oben über diese Geschwindigkeit gesagte.)

Wenn wir auf den *allgemeinen Fall* zurückgreifen, wie er durch die Gleichungen (70) in symbolischer oder durch die Gleichungen (72) in gewöhnlicher Form gegeben ist, so sehen wir, dass in einem Punkt x einer homogenen Leitung von endlicher Länge v und i als Superposition zweier, in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden Wellen **gedacht** werden können, die sich mit gleicher Geschwindigkeit $\frac{\omega}{\gamma}$ fortbewegen. Dabei können wir **gewissermassen** die eine als die Reflexion der andern auffassen. Die Welle v entsteht durch **Addition** einer Welle, die sich vom Verbraucher aus nach dem Generator zu bewegt und in dieser Richtung gedämpft wird (oder in umgekehrter Richtung anschwillt) und einer solchen, die vom Generator nach dem Verbraucher schreitet und in dieser Richtung eine Dämpfung erfährt. Die Welle i wird durch **Subtraktion** dieser zwei Wellen gewonnen, die aber in Grösse und Phase im Verhältnis $\frac{1}{Z_0}$ reduziert sind.

Um die einem bestimmten Beharrungszustand entsprechenden Grössen v und i zu finden, können wir uns entweder der symbolischen (70) oder der gewöhnlichen (72) Darstellungsweise bedienen. Durch entsprechendes Einführen der Grenzbedingungen können wir die Konstanten V_1 und V_2 , sowie die Phasenwinkel α_1 und α_2 bestimmen. Zu bemerken ist, dass die Formeln (70), welche bei sinoidalen Grössen die Lösung der allgemeinen Gleichungen (58) und (56) darstellen, genau gleichen Aufbau aufweisen wie die Lösungen (19) der Gleichungen (18), die für Gleichstrom gelten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass βx , das in (19) einem *reellen hyperbolischen Winkel* entspricht, durch den *komplexen hyperbolischen Winkel*

$$Kx = (\beta + j\gamma) x$$

ersetzt ist, und dass an Stelle der reellen Grössen A , B und R_c in (19) nun die komplexen Grössen A , B und Z_0 treten.

Wir können daher, ohne die auf Seite 41 kurz angegebenen Rechnungen zu wiederholen, schreiben:

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{Z' \cosh h \cdot k [L - x] + Z_0 \sinh h \cdot k [L - x]}{Z' \cosh h \cdot k L + Z_0 \sinh h \cdot k L} = f(x) \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{Z' \sinh h \cdot k [L - x] + Z_0 \cosh h \cdot k [L - x]}{Z' \cosh h \cdot k L + Z_0 \sinh h \cdot k L} = \varphi(x) \end{array} \right. \quad [\text{siehe (24)}]$$

Diese Ausdrücke stellen in symbolischer Form **die Effektivwerte und Phasen** von v und i in einem beliebigen Punkte einer am Leitungsanfang mit der Spannung $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t)$ gespeisten und am andern Ende $x = L$ über einen Verbraucher mit der Impedanz $Z' = Z' e^{i\psi'}$ geschlossenen Leitung dar.

Wir werden daher alle, für die verschiedenen Fälle im Kapitel über Gleichstrom im Beharrungszustand aufgestellten Beziehungen wiederfinden, *aber diesmal in symbolischer Form*. Immerhin wird kein Interesse mehr vorliegen, die Unterscheidung $Z' \lesseqgtr Z_0$ zu treffen, wie man sich leicht überzeugen kann.

Wir wollen mit Rücksicht auf das besondere Interesse, welches sie bieten, allerdings ohne alle Rechnungen zu wiederholen, auf einige dieser Fälle zurückkommen.

IIa. Die am Ende B offene Leitung, d. h. $Z' = \infty$.

Wenn wir diese Bedingung in Gl. (90) einführen, finden wir sofort:

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{\cosh h \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\cosh h \cdot (\beta + j\gamma) L} \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{\sinh h \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\cosh h \cdot (\beta + j\gamma) L} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (25)}]$$

und hieraus, nach einigen Umformungen und dem Uebergang zu den reellen Grössen, die Effektivwerte von v und i in einem beliebigen Punkte:

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \sqrt{\frac{\cosh h \cdot 2\beta (L - x) + \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh h \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh h \cdot 2\beta (L - x) - \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh h \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right.$$

und speziell:

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 = V_0 \\ I_x = I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \tanh h \cdot (\beta + j\gamma) L = \frac{V_0}{Z_0} \tanh h \cdot k L \\ \text{mit } I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh h \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}{\cosh h \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (26)}]$$

für $x = 0$, d. h. am Anfang der in B offenen Leitung; dann:

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_L = V_0 \frac{1}{\cosh h \cdot (\beta + j\gamma) L} = \frac{V_0}{\cosh h \cdot k L} = V_0 \operatorname{sech} h \cdot k L \\ I_x = I_L = 0 \\ \text{mit } V_L = V_0 \sqrt{\frac{2}{\cosh h \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (27)}]$$

für $x = L$, d. h. am Endpunkt B der Leitung.

Man sieht also, dass eine am Ende B offene Leitung mit den Charakteristiken Z_0 und $k = \beta + j\gamma$ und von der Länge L , oder mit dem komplexen hyperbolischen Winkel kL , in B eine Spannung

$$(95) \quad V_L = \frac{V_0}{\cosh h \cdot k L} = V_0 \operatorname{sech} h \cdot k L = V_0 \operatorname{sech} h \cdot \sqrt{Z \cdot A} \quad [\text{siehe (28)}]$$

aufweist, und an ihrem Anfang A einen Strom aufnimmt, der gleich ist demjenigen, den die Stromquelle von der Spannung $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t$ in eine in A lokalisierte Impedanz

$$(96) \quad Z_A = Z_0 \cotg h \cdot kL = \sqrt{\frac{Z}{A}} \cotg h \cdot \sqrt{Z \cdot A} \quad [\text{siehe (29)}]$$

liefern würde. (Z = totale komplexe Impedanz und A totale komplexe Admittanz [seitliche] der Leitung.)

Es ist aber hieraus noch mehr zu ersehen. Durch genauere Betrachtung der Ausdrücke (92) erkennt man aus der Tatsache, dass mit wachsendem x der $\cos h \cdot 2\beta[L - x]$ ständig abnimmt und der $\cos 2\gamma[L - x]$ zwischen $+1$ und -1 pendelt:

1. Wenn L sehr gross ist im elektrischen Sinn, schwingen V_x und I_x periodisch (Variable x), wenigstens gegen das Ende B der Leitung hin, die Minima der einen Grösse entsprechen hierbei den Maxima der andern und umgekehrt.

2. Am Endpunkt B erreicht der Effektivwert der Spannung immer ein Maximum; gegen den Generator hin können aber Minima des Effektivwertes der Spannung auftreten, die grösser sind als der Effektivwert der in B herrschenden Spannung.

3. Solange L kleiner als ein Viertel der Wellenlänge λ der Leitung ist, was praktisch stets zutreffen dürfte, wenigstens bei gewöhnlichen industriellen Uebertragungsleitungen (Starkströme), ist die Spannung am Anfangspunkt immer kleiner als die Spannung am Ende und dies um einen immer höheren Betrag, je mehr sich L dem Viertel der Wellenlänge λ nähert.

Es herrscht also am Leitungsende bei geöffnetem Stromkreis ständig Ueberspannung. Diese Ueberspannung kann ziemlich erheblich sein, wenn die Uebertragung, obschon kürzer als $\frac{\lambda}{4}$, im gewöhnlichen Sinn als lang zu bezeichnen ist.

4. Wenn man für jeden Punkt der Leitung den Phasenverschiebungswinkel φ_x zwischen Spannung V_x und Strom I_x bestimmt, was durch einfache Division der entsprechenden komplexen Ausdrücke geschehen kann, so sieht man, dass dieser Winkel um den Wert δ (Argument der Charakteristik Z_0) pendelt, wobei die beidseitigen Abweichungen von δ umso geringer werden, je mehr man in die Nähe des Generators rückt. Weil nun δ mit wachsender Frequenz dem Werte 0 zustrebt, kann daraus geschlossen werden, dass bei Vorhandensein von Oberwellen in der Spannungskurve des Generators, diese mit den ihnen entsprechenden Spannungen in letzterem in Phase sind, und dies um so mehr, je länger die Leitung ist, so dass eine lange Leitung, in Bezug auf den Generator, für die Oberwellen als Dämpfer wirkt.

Wenn die Leitung für eine beliebige Oberwelle n -ter Ordnung und mit dem Effektivwert der Spannung $V_{0,n}$ im Generator die Viertelswellenlänge erreicht, d. h. wenn geschrieben werden kann:

$$(97) \quad L = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{2\pi}{4\gamma_n} \cong \frac{2\pi}{4n\omega\sqrt{Lc}} = \frac{1}{4fn\sqrt{Lc}}$$

weil sich γ sehr rasch dem Werte $\omega\sqrt{Lc}$ nähert, so wird diese Oberwelle am Leitungsende verstärkt und erreicht den durch (94) gegebenen Wert

$$V_{L,n} = V_{0,n} \sqrt{\frac{2}{\cos h \cdot 2\beta_n L + \cos 2\gamma_n L}}$$

worin β_n und γ_n die Werte von β und γ für $f_n = nf$ bedeuten. In diesem Falle ist

$$2\gamma_n L = \pi, \text{ woraus } \cos 2\gamma_n L = -1$$

folgt; es wird also für die betrachtete Harmonische der Faktor für ständige Ueberspannung sein:

$$\sqrt{\frac{2}{\cosh \cdot 2\beta_n L - 1}} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon^{2\beta_n L} + \epsilon^{-2\beta_n L} - 2}} = \frac{2}{\epsilon^{\beta_n L} - \epsilon^{-\beta_n L}}$$

und weil:

$$\epsilon^{\pm\beta_n L} = 1 \pm \beta_n L + \frac{1}{2} \beta_n^2 L^2 \pm \dots \text{ ist,}$$

so wird:

$$(98) \quad V_{L,n} = \frac{2 V_{0,n}}{2 \beta_n L} = \frac{V_{0,n}}{\beta_n L},$$

wenn wir, was für kleine Werte von $\beta_n L$ genügend genau ist, nur die zwei ersten Glieder obiger Reihe nehmen.

Für eine Leitung, die wir später als Beispiel wählen werden, ergibt sich bei $L = 400$ km und $f = 60$ Perioden pro Sekunde:

$$\text{aus (97)} \quad n = \frac{1}{4.400.60 \sqrt{lc}} = 3,1 (3), \quad \beta_n = 0,437 \cdot 10^{-3}$$

$$V_{L,n} = V_{0,n} \cdot \mathbf{5,72}$$

und bei $L = 200$ km:

$$n = 6,2 (5 \text{ oder } 7), \quad \beta_n = 0,439 \cdot 10^{-3}$$

$$V_{L,n} = V_{0,n} \cdot \mathbf{11,4}$$

Berücksichtigt man, dass hauptsächlich Oberwellen niedriger Ordnung in den Generatoren auftreten, so lässt obiges erkennen, dass bei im gewöhnlichen Sinne langen Leitungen und bei relativ hohen Frequenzen der Grundwelle (60 Perioden) wobei die Leitung für Oberwellen niedriger Ordnung (3, 5 oder 7) die Viertelswellenlänge erreicht, sich eine *merkliche ständige Ueberspannung zu derjenigen der Grundwelle hinzufügen* kann. So würde man im ersten, oben erwähnten Falle, wenn man annimmt, dass

$$V_{0,3} = 0,15 V_{0,1} \text{ ist,}$$

was einer ziemlich stark verzerrten Kurvenform entspricht, bei in B offener Leitung ungefähr auf die Spannung

$$V_L = V_0 \mathbf{1,40}$$

gelangen (Faktor für die Ueberspannung der Grundwelle: 1,135; für die Oberwelle dritter Ordnung: 5,72).

II b. Die in B kurzgeschlossene Leitung, d. h. $Z' = 0$.

Die Formeln (90) ergeben für $Z' = 0$ sofort:

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) L} \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) L} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (30)}]$$

woraus, für die Effektivwerte von v und i in einem beliebigen Punkt sich ergeben:

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta [L - x] - \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}} \\ \text{und } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta (L - x) + \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}} \end{array} \right.$$

und, speziell:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 = V_0 \\ I_x = I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \cotg h \cdot k L \\ \text{mit } I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cos h \cdot 2 \beta L + \cos 2 \gamma L}{\cos h \cdot 2 \beta L - \cos 2 \gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (31)}]$$

für $x = 0$, d. h. am Anfang der am Ende B kurzgeschlossenen Leitung.

Anderseits ist: $V_x = V_L = 0$

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = I_L = \frac{V_0}{Z_0} \operatorname{cosec} h \cdot k L \\ \text{mit } I_L = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{2}{\cos h \cdot 2 \beta L - \cos 2 \gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{siehe (32)}]$$

für $x = L$, d. h. am kurzgeschlossenen Ende B.

Man erkennt also, dass eine Leitung von der Länge L , mit den Charakteristiken Z_0 und $k = \beta + j\gamma$, oder dem komplexen hyperbolischen Winkel kL , die an ihrem Ende B ($Z' = 0$) kurzgeschlossen ist und an deren Anfang A eine Spannung $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t$ aufrecht erhalten wird, an ihrem Anfang einen Strom aufnimmt der gleich ist demjenigen, welcher in eine in A lokalisierte Impedanz

$$(103) \quad Z_A = Z_0 \operatorname{tg} h \cdot k L = \sqrt{\frac{Z}{A}} \operatorname{tg} h \cdot \sqrt{Z A}. \quad [\text{siehe (33)}]$$

geliefert würde, während im kurzgeschlossenen Ende B ein Strom auftritt, gleich demjenigen, der in einer ebenfalls in A lokalisierten Impedanz

$$(104) \quad Z_{BA} = Z_0 \sin h \cdot k L = \sqrt{\frac{Z}{A}} \sin h \cdot \sqrt{Z A} \quad [\text{siehe (34)}]$$

erzeugt würde.

Man könnte zeigen, dass auch in diesem Fall die Grössen V_x , I_x und q_x vom Verbraucher nach dem Generator hin oscillieren, wobei der Strom zunächst abnimmt und die Spannung zunächst wächst.

IIc. Die in B über eine Impedanz Z' endlicher, von 0 verschiedener Grösse geschlossene Leitung.

Dieser Fall könnte in gleicher Weise, wie der ihm entsprechende für den Gleichstrom behandelt werden. Es ist aber hier dazu kein Grund vorhanden, weil die gewonnenen Resultate mit Rücksicht auf den nicht allein vom Werte, sondern auch von der Phase abhängigen Einfluss des Verbrauchers (Art der „Belastung“), nicht die gleiche Verallgemeinerung erlauben.

Wir werden uns daher beschränken darauf hinzuweisen, dass im Spezialfall wo $Z' = Z_0$ ist (sowohl nach Grösse als Phase) d. h. dass wenn die Impedanz des Verbrauchers gleich ist der Charakteristik der Leitung, sich diese letztere, wie dies aus den Gleichungen (90) leicht ersichtlich ist (siehe die Berechnungen auf Seiten 44 und 45, Bulletin No. 2), genau so verhält, als ob sie unendlich lang wäre und beliebige Bedingungen für das Ende B vorlägen. In einem Punkte im Abstand x vom Anfang, würden die Spannung v und der Strom i die gleichen Werte und Phasen (Phasenverschiebung δ von i gegen v) aufweisen, wie solche im gleichen Punkte einer unendlich langen Leitung mit gleichen Charakteristiken auftreten würden.

Wir hätten also nur noch eine Einzelwelle v und eine Einzelwelle i ; es könnten weder für v noch für i Wellen als Folge einer Reflexion in B angesehen werden, während in allen anderen Fällen, in übrigens verschiedenem Masse, Reflexion auftritt.

Alle unter 1) erhaltenen Resultate lassen sich demnach auch auf diesen Spezialfall anwenden.

Wir wollen hier den allgemeinen Fall wo Z' von Z_0 verschieden ist, nicht bis in alle Einzelheiten verfolgen. Der allgemeine Sinn des oben gesagten würde derselbe bleiben. Wir werden einfach, um uns dem Vorwurfe der Unvollständigkeit nicht auszusetzen, zeigen wie das Problem graphisch behandelt werden kann und halten uns hiebei an die von Blondel bereits im Jahre 1905 gegebene Lösung. Da meistens, wenigstens in der industriellen Technik, die Betriebsbedingungen für den Verbraucher gegeben sind, wollen wir die Abstände von diesem, also von B aus messen, was einem Ersetzen von x durch $-x$ in den Grundgleichungen (4) und (5) gleichkommt. Die unter (72) angegebenen Lösungen werden dann:

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_1 \sqrt{2} \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2) \\ \text{und } i = \frac{V_1}{Z_0} \sqrt{2} \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1 - \delta) - \frac{V_2}{Z_0} \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2 - \delta). \end{array} \right.$$

Nehmen wir also an, dass die m -phasige Leitung am Endpunkte (nunmehr $x=0$ und nicht $x=L$) eine Leistung P' bei einer Spannung V' zwischen zwei Leitern abgeben muss, und dass der Leistungsfaktor der Verbraucher $\cos \varphi'$ sei. Jeder Leiter der Leitung wird am Ende einen Strom vom Effektivwert

$$I' = \frac{P' 2 \sin \frac{\pi}{m}}{m V' \cos \varphi'}$$

liefern, und da die Phase von i' um den Winkel φ' gegen diejenige der einfachen Spannung des Systems nacheilt, oder gegenüber derjenigen der Spannung deren Effektivwert

$$V_s' = \frac{V'}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$

ist, können wir, wenn wir z. B. die Phase von v_s' als Phasenursprung wählen und in (105) Z_0' in das erste Glied von i hereinnehmen, schreiben, dass für $x=0$, $v=v_s'$ und $i=i'$ wird, und wir erhalten somit:

$$(106) \quad V_s' \sqrt{2} \sin(\omega t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

$$\text{und (107)} \quad Z_0 I' \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) - V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

Durch Addition von (106) und (107) und sodann durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir zwei Bedingungsgleichungen, aus denen sich leicht V_1 , α_1 , V_2 und α_2 entweder analytisch oder graphisch ermitteln lassen.

Die erste Operation ergibt unter Weglassung des Faktors $\sqrt{2}$,

$$V_1 \sin(\omega t - \alpha_1) = \frac{V_s'}{2} \sin(\omega t) + Z_0 \frac{I'}{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta),$$

$$\text{und die zweite} \quad V_2 \sin(\omega t - \alpha_2) = \frac{V_s'}{2} \sin(\omega t) - Z_0 \frac{I'}{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta).$$

Wird nun, in Figur 20, V_s' auf 0 A, I' auf 0 B, um den Winkel φ' gegen 0 A verschoben, $\frac{V_s'}{2}$ als 0 A₁, und $\frac{Z_0 I'}{2}$ als 0 B₁, um den Winkel $\varphi' - \delta$ gegen 0 A verschoben, aufgetragen, so ergibt der Vektor 0 C die Grösse von V_1 und den Winkel α_1 und der Vektor 0 D die Grösse von V_2 und den Winkel α_2 . In der Figur haben wir berücksichtigt dass $\delta < 0$ und haben daher 0 B₁ hinter 0 B aufgetragen.

Nachdem nun V_1 , V_2 , α_1 und α_2 so bestimmt worden sind, wird man den ersten Teil des zweiten Gliedes des Ausdruckes für v [105], für einen beliebigen Punkt im Abstand x vom Ende, durch 0 C_x darstellen können indem man 0 C um den Winkel γx vorwärts dreht und zugleich im Verhältnis

$$\frac{\varepsilon^{\beta x}}{1} = \cos h \cdot \beta x + \sin h \cdot \beta x$$

verlängert.

Der zweite Teil des zweiten Gliedes von v (105) wird seinerseits durch $0D_x$ dargestellt, indem $0D$ um den Winkel γx nach rückwärts gedreht und im Verhältnis

$$\frac{\varepsilon^{-\beta x}}{1} = \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x$$

verkürzt wird.

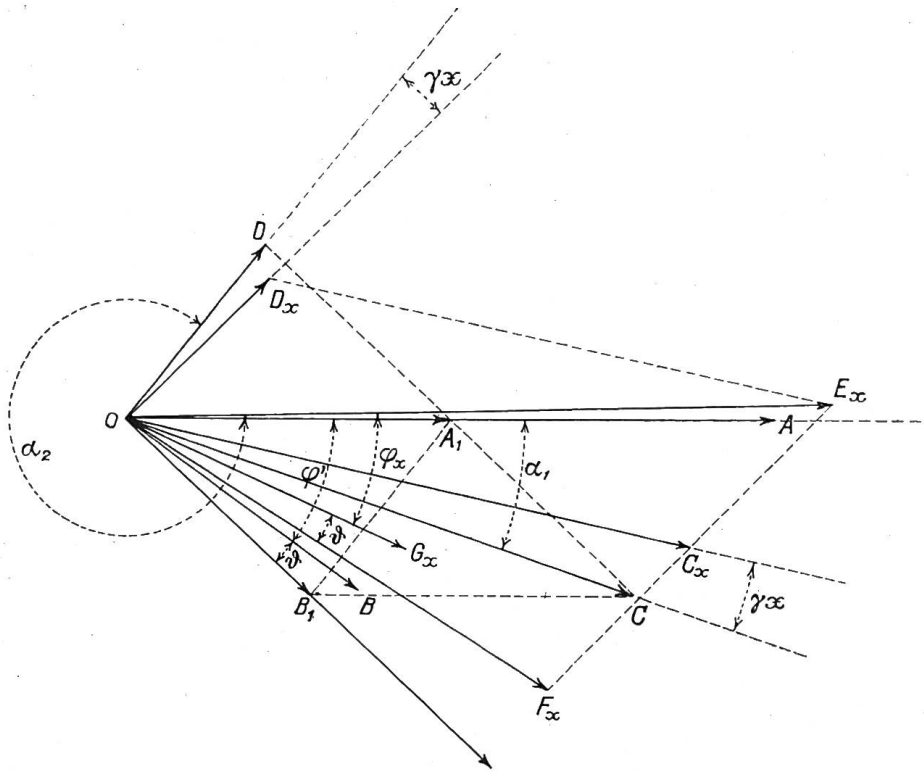


Fig. 20.

(Der Punkt F'_x auf $0F_x$, so dass $0F'_x = OG_x$, ist in obiger Figur aus Versehen nicht eingetragen worden.)

Es stellt nunmehr die geometrische Summe von $0C_x$ und $0D_x$, also $0E_x$ nach Grösse und Phase die einfache Spannung V_{sx} im Punkt x , und die geometrische Differenz der gleichen Vektoren, also $0F_x$, das Produkt $Z_0 I_x$ dar. Um nun I_x , den Strom im Punkte x , nach Grösse und Phase zu erhalten, genügt es $0F_x$ durch Z_0 zu dividieren (wodurch man vom Massstab für die Spannungen auf denjenigen für die Ströme kommt) was $0F'_x$ ergibt und dann $0F'_x$ nach $0G_x$ im entsprechenden Drehsinn um den Winkel δ zu drehen. Der Winkel $G_x 0E_x$ ist der Phasenverschiebungswinkel von I_x gegenüber V_x , also φ_x , für den betrachteten Punkt.

Selbstverständlich bildet auch das soeben gesagte die graphische Interpretation (für $x=0$ in B) der symbolischen Gleichungen (70) aus denen die Gleichungen (72) durch entsprechendes Wiedereinführen von t hergeleitet wurden.

Durch Anwendung dieses (oder anderer gleichwertiger) Verfahrens auf verschiedene Zustände am Verbrauchsort lässt sich ersehen, dass bei *induktiver* „Belastung“ ($\varphi' > 0$) die Spannung V_x vom Verbraucher nach dem Generator hin zunächst anwächst und der Strom I_x zuerst abnimmt während der Phasenwinkel φ_x abnehmen wird. Für grosse Längen L erfahren diese Grössen Oscillationen (nach dem Abstand x). Die gleiche Erscheinung, aber im umgekehrten Aenderungs-Sinn, tritt für eine *anti-induktive* „Belastung“ (äquivalent

der „Belastung“ durch eine Kapazität) $q' < 0$ auf. Bei *nicht-induktiver* Belastung verschwinden die Oscillationen der Werte I_x , V_x und φ_x ganz oder nahezu.

Im ersten und dritten Fall wird, wenigstens für gewisse Werte der „Belastung“ P' und für gewisse Werte von q' , *am Ende Unterspannung herrschen*, während im zweiten Fall *Ueberspannung* auftritt, und dies umso ausgeprägter, je grösser die anti-induktive „Belastung“ sein wird.

Wir erwähnen der Vollständigkeit halber noch, dass wenn die Leitung heterogen ist (Kombination von unterirdischen Kabeln mit Freileitungen) jedes Problem auf gleiche Weise wie oben sich lösen lässt. Es genügt in solchen Fällen, vom Verbraucher aus nach dem Generator fortschreitend, die obigen Resultate auf jedes homogene Teilstück anzuwenden, wobei die Bedingungen am Ende des einen für das nächste Stück die Bedingungen am Anfang bedeuten, immer vom Verbraucher aus gerechnet.

Wir würden allzusehr aus dem Rahmen dieser Abhandlung treten, wollten wir uns weiter mit dem allerdings recht interessanten Fall der belasteten Leitung abgeben.

Zur Bestätigung des Vorangehenden wollen wir weiter unten als Beispiel die Zahlen die wir für die Uebertragungsleitung von 140 000 Volt und 60 Perioden pro Sekunde erhielten, die sich gegenwärtig von *Au Sable Vert* nach *Flint* (Michigan, Vereinigte Staaten von Nord-Amerika) erstreckt, angeben. Wir haben zu diesem Zwecke die im Jahre 1912 von uns an Ort und Stelle aufgenommenen Daten verwendet. Um nun die Wirkung der verteilten Konstanten recht deutlich hervortreten zu lassen, haben wir für verschiedene Zustände am Leitungsende die entsprechenden Zustände am Leitungsanfang gerechnet und zwar zuerst (I.) unter Vernachlässigung von Kapazität und Ableitung $c = g = 0$, sodann (II.) unter Berücksichtigung von c und g jedoch diese durch äquivalente Kapazitäten und Ableitungen in Abständen von 100 km ersetzend, und endlich (III.) unter Berücksichtigung von r, g, l und c als verteilte Konstanten, wobei die für g erhaltenen Angaben benützt worden sind.

Beispiel. Die betreffende Leitung, welche für eine Leistung von 25 000 kW bei 140 000 Volt und bei 60 Perioden pro Sekunde gebaut ist, besitzt eine Länge von ungefähr 200 km und soll später um ebensoviel verlängert werden. Als Drehstromleitung besteht sie aus drei Leitern von 9 mm Durchmesser (Seil von 50 mm² Querschnitt), die sich in einem gegenseitigen Abstand von ca. 4,60 m befinden. Es ergibt sich hieraus, sowie aus allerdings nicht sehr genauen Messungen, die bei der Inbetriebsetzung ausgeführt wurden, dass

$$\begin{aligned} r &= 0,35 \, \Omega \text{ pro km} \\ g &= 1,10^{-7} \text{ mho pro km} \\ l &= 0,0014 \text{ Henry pro km} \\ c &= 0,008 \text{ Mikro-Farad pro km.} \end{aligned}$$

Die Konstanten β , γ , Z_0 , δ , λ und v ergeben sich hieraus ohne Schwierigkeit. Wir haben sie für Periodenzahlen zwischen 0 und 1200 pro Sekunde ausgerechnet und in Figur 21 als Kurven aufgetragen. Ihre Werte für 60 Perioden pro Sekunde sind:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,4208597 \cdot 10^{-3}; \gamma = 1,31677354 \cdot 10^{-3}; \lambda = 4771,67 \text{ km} \\ v &= 286300 \text{ km pro Sekunde}; Z_0 = 458,1 \, \Omega; \delta = -15^\circ 49' 30'' \end{aligned}$$

Wir fassen nun die für $V' = 140\,000$ Volt zwischen den Leitern am Endpunkt der Leitung, was $V'_s = 80\,800$ Volt entspricht, erhaltenen Resultate tabellarisch zusammen, indem wir in Längen von 200 und 400 km verschiedene Belastungen annehmen.

Um auch den Einfluss der Frequenz zu zeigen, haben wir einige Rechnungen für 25 Perioden pro Sekunde ausgeführt, deren Resultate wir weiter unten ebenfalls angeben. Bei dieser Frequenz nehmen obige Grössen folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,37398489 \cdot 10^{-3}; \gamma = 0,61742459 \cdot 10^{-3}; \lambda = 10\,412,8 \text{ km} \\ v &= 260\,320 \text{ km pro Sekunde}; Z_0 = 572,6 \, \Omega; \delta = -26^\circ 39' 20'' \end{aligned}$$

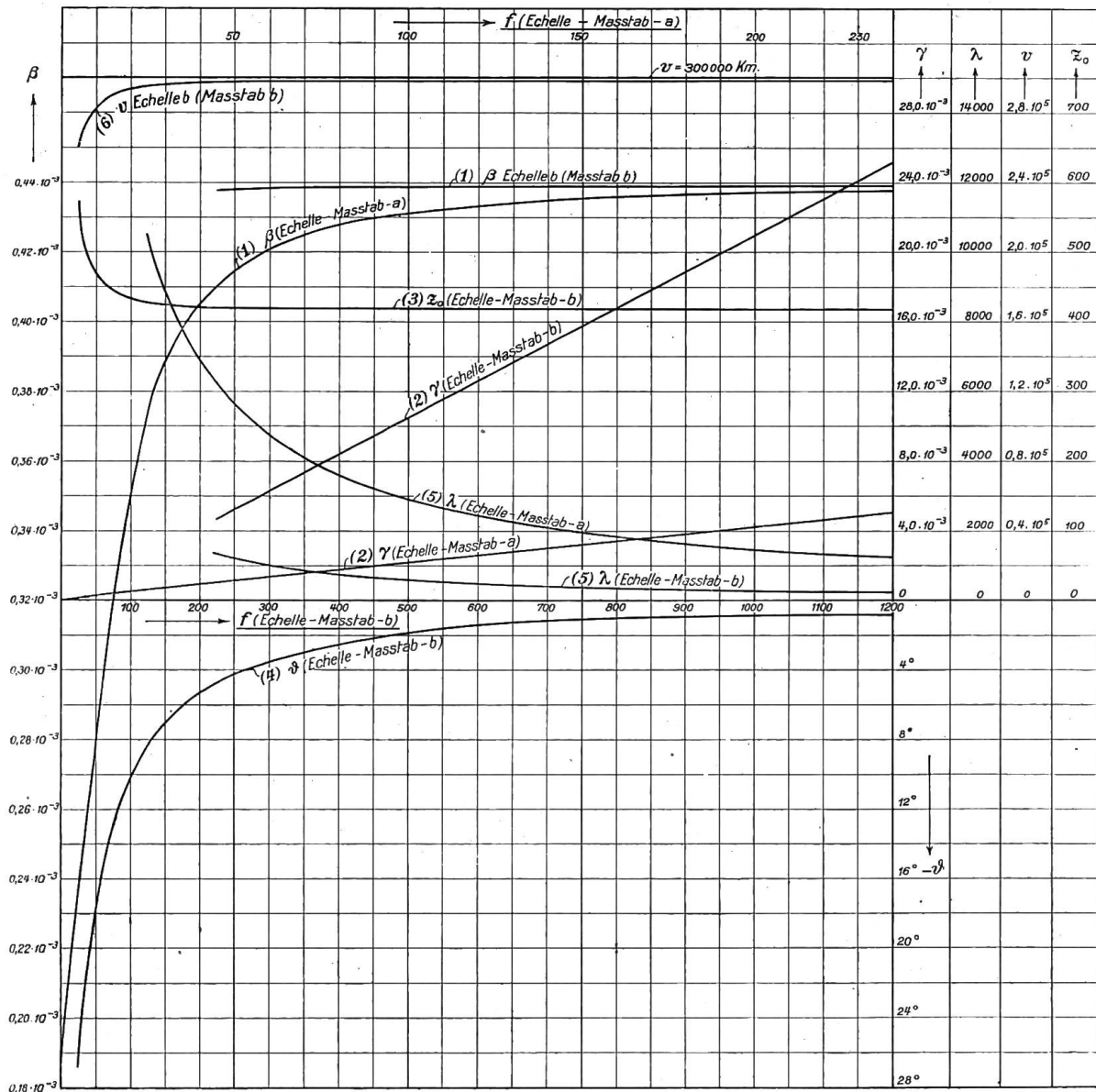


Fig. 21.

Charakteristische Kurven einer Freileitung mit den Konstanten:

$r = 0,35 \, \Omega$ pro km

$g = 1 \cdot 10^{-7} \, \text{mho}$ "

$l = 0,0014 \, \text{Henry}$ "

$c = 0,008 \, \text{Mikro-Farad}$ "

Kurve (1) β in Funktion der Frequenz f

(2) γ " " " " f

(3) Z_0 " " " " f

(4) δ " " " " f

(5) λ " " " " f

(6) v " " " " f

Tabelle No. I.

Zustände am Ende der Leitung für 200 und 400 km bei 25 und 60 Perioden pro Sekunde

Spannung zwischen den Leitern V'	140 000.—	140 000.—	140 000.—	140 000.—
Spannung pro Phase V'_s	80 800.—	80 800.—	80 800.—	80 800.—
Scheinbare Leistung kVA P'_{os}	0.—	31 300.—	25 000.—	31 300.—
Wirkliche Leistung kW P'	0.—	25 000.—	25 000.—	25 000.—
Leistungsfaktor $\cos \varphi'$	—	0,80	1,00	0,80
Phasenverschiebungswinkel φ'	—	$+36^\circ 50'$	0	$-36^\circ 50'$
Sinn der Phasenverschiebung φ'	—	Nacheilung	—	Voreilung
Stromstärke I'	0.—	129.—	103,3	129.—

Tabellen No. II

Zustände am Anfang der Leitung.

60 Perioden pro Sekunde. I. $c = g = 0$

	Entfernung: 200 km.				Entfernung: 400 km.			
Spannung zwischen den Leitern V_0	140 000.—	166 700.—	153 600.—	144 300.—	140 000.—	194 100.—	169 200.—	147 800.—
Spannung pro Phase V_{s0}	80 800.—	96 200.—	88 700.—	83 300.—	80 800.—	112 100.—	97 750.—	85 400.—
Stromstärke I_0	0.—	129.—	103,3	129.—	0.—	129.—	103,3	129.—
Scheinbare Leistung kVA P_{0a}	0.—	37 200.—	27 800.—	32 250.—	0.—	43 350.—	30 300.—	33 050.—
Wirkliche Leistung kW P_0	0.—	28 500.—	27 500.—	28 500.—	0.—	32 000.—	29 500.—	32 000.—
Leistungsfaktor $\cos \varphi_0$	—	0,765	0,992	0,902	—	0,738	0,975	0,970.—
Phasenverschiebungswinkel φ_0	—	+40° 7'	+7° 3'	—25° 33'	—	+42° 27'	+12° 53'	—22° 20'
Sinn der Phasenverschiebung φ_0	—	Nacheilg.	Nacheilg.	Voreilung	—	Nacheilg.	Nacheilg.	Voreilung
Spannungsänderung in ‰	0.—	+19,05	+9,80	+3,10	0.—	+38,7	+21,0	+5,7
Wirkungsgrad der Leitung in ‰	0.—	87,8	91,0	87,8	0.—	78,2	84,8	78,2

60 Perioden pro Sekunde. II. Kapazität und Ableitung in Abständen von 100 km.

	Entfernung: 200 km.				Entfernung: 400 km.			
Spannung zwischen den Leitern V_0	133 700.—	160 400.—	147 800.—	135 700.—	119 100.—	172 400.—	150 900.—	133 000.—
Spannung pro Phase V_{s0}	77 200.—	92 550.—	85 250.—	78 400.—	68 820.—	99 600.—	87 000.—	76 800.—
Stromstärke I_0	48,4	107,3	114,2	162.—	93,7	103,5	137,6	192,8
Scheinbare Leistung kVA P_{0a}	11 200.—	29 800.—	29 270.—	38 150.—	19 330.—	30 850.—	35 950.—	44 300.—
Wirkliche Leistung kW P_0	705.—	28 100.—	27 960.—	30 500.—	2515.—	30 750.—	32 030.—	38 000.—
Leistungsfaktor $\cos \varphi_0$	0,063	0,9424	0,9584	0,7986	0,1299	0,9962	0,8907	0,855
Phasenverschiebungswinkel φ_0	— 86° 24'	+19° 32'	— 16° 34'	— 37°	— 82° 32'	— 5°	— 27° 1'	— 31° 8'
Sinn der Phasenverschiebung φ_0	Voreilung	Nacheilg.	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung
Spannungsänderung in ‰	— 4,5	+14,5	+5,5	— 3,0	— 14,8	+23,2	+7,7	— 4,8
Wirkungsgrad der Leitung in ‰	0.—	89,0	89,4	82,0	0—	81,3	78,2	65,8

Fortsetzung von Tabelle II.

60 Perioden pro Sekunde. III. Gleichmässig verteilte Konstanten.

	Entfernung: 200 km.				Entfernung: 400 km.			
Spannung zwischen den Leitern V_0	135 700.—	162 700.—	149 700.—	137 000.—	123 700.—	177 100.—	157 200.—	135 100.—
Spannung pro Phase V_{s0}	78 400.—	93 880.—	86 400.—	79 080.—	71 400.—	102 280.—	90 740.—	78 000.—
Stromstärke I_0	47,8	105,9	112,8	160,6	94,5	104.—	134,1	190,7
Scheinbare Leistung kVA P_{0a}	11250.—	29 850.—	29 250.—	38 080.—	20 250.—	31 970.—	36 500.—	44 650.—
Wirkliche Leistung kW P_0	556.—	28 400.—	27 800.—	29 500.—	1 707.—	31 620.—	32 850.—	36 870.—
Leistungsfaktor $\cos \varphi_0$	0,04943	0,951	0,950	0,775	0,08426	0,989	0,900	0,8257
Phasenverschiebungswinkel φ_0	— 87° 10'	+18°	— 18° 10'	— 39° 10'	— 85° 10'	— 8° 30'	— 25° 50'	— 34° 20'
Sinn der Phasenverschiebung φ_0	Voreilung	Nacheilg.	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Voreilung
Spannungsänderung in %	— 2,97	+16,20	+6,92	— 2,13	— 11,60	+26,6	+12,3	— 3,46
Wirkungsgrad der Leitung in %	0.—	88,1	89,9	84,8	0.—	79,1	76,2	67,8

25 Perioden pro Sekunde. III. Gleichmässig verteilte Konstanten.

	Entfernung: 200 km.				Entfernung: 400 km.			
Spannung zwischen den Leitern V_0	139 200.—	157 400.—	152 300.—	146 900.—	137 500.—	173 900.—	163 400.—	154 500.—
Spannung pro Phase V_{s0}	80 340.—	90 900.—	87 860.—	84 760.—	79 340.—	100 320.—	94 280.—	89 200.—
Stromstärke I_0	20,15	119,1	107.—	143.—	40,3	112.—	113,3	156,75
Scheinbare Leistung kVA P_{0a}	4850.—	32 480.—	28 200.—	36 400.—	9 600.—	33 700.—	32 070.—	41 900.—
Wirkliche Leistung kW P_0	444.—	28 780.—	26 750.—	29 120.—	960.—	32 070.—	30 930.—	34 080.—
Leistungsfaktor $\cos \varphi_0$	0,0915	0,885	0,9478	0,80	0,100	0,951	0,965	0,814
Phasenverschiebungswinkel φ_0	— 84° 45'	+27° 40'	— 18° 35'	— 36° 55'	— 84° 15'	+18°	— 15° 10'	— 35° 30'
Sinn der Phasenverschiebung φ_0	Voreilung	Nacheilg.	Voreilung	Voreilung	Voreilung	Nacheilg.	Voreilung	Voreilung
Spannungsänderung in %	— 0,70	+12,5	+8,75	+4,90	— 1,93	+24,2	+16,7	+10,4
Wirkungsgrad der Leitung in %	0.—	86,9	93,5	85,9	0.—	78,0	80,8	73,4

Die vorstehenden Tabellen, deren Zahlen durchwegs graphisch ermittelt worden sind, heben deutlich den Einfluss der gleichmässig verteilten Konstanten hervor. Sie würden zu mannigfachen interessanten Bemerkungen Anlass bieten. Um uns zu beschränken, soll nur die folgende Tatsache erwähnt sein.

Es sollen bei der Inbetriebsetzung in Flint (200 km; offene Leitung) Spannungen von bis 190 000 Volt beobachtet worden sein, während die Messinstrumente in der Generatorenstation 140 000 Volt anzeigten. Es wäre hieraus auf einen Faktor für ständige Ueberspannung bei geöffnetem Stromkreis von ca. 1,35 zu schliessen, gegenüber einem solchen von 1,03, welcher sich in der Tabelle findet, der sich aber, worauf wir besonders hinweisen, auf einen sinoidalen Wechselstrom bezieht. Diese grosse Differenz kann nur durch die Anwesenheit von Oberwellen fünfter oder siebenter Ordnung in der Spannungs-kurve der Generatoren erklärt werden. Uebrigens ist die Anwesenheit einer Nuten-Harmonischen sechster Ordnung nicht ausgeschlossen. Wie wir weiter oben sahen, ist der Ueberspannungs-Faktor für letztere 1,4 und es ist leicht einzusehen, dass der beobachtete Ueberspannungs-Faktor (1,35) für eine Harmonische sechster Ordnung mit einer Amplitude von ca 7,5 % derjenigen der Grundwelle erreicht wird.

Es können somit diese Ueberspannungen am Endpunkt der Leitung beträchtlich sein, wie dieses Beispiel zeigt. Sie werden sehr rasch durch eine, wenn auch geringe, induktive „Belastung“ abgedrosselt, dessen ungeachtet kann aber bei plötzlichem Unterbruch die Spannung am offenen Ende stark, sogar gefährlich, erhöht werden infolge der Wirkungsweise der Leitung und der Uebererregung der Generatoren durch den Leerlaufstrom der Leitung, ganz abgesehen von den Wirkungen der zurückgeworfenen Wellen bei Zustands-änderung.

(Schluss im nächsten Bulletin.)



Mitteilung der Redaktion.

Das für die vorliegende Nummer angekündigte

Referat von Herrn Prof. Dr. Kuhlmann über Ueberspannungen

(gehalten in der Kommission des S. E. V. und V. S. E. für Ueberspannungsschutz),

kann erst in der nächsten Nummer erscheinen.

