

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 23 (1932)
Heft: 10

Artikel: Ist die Beziehung $D = F$ im elektrostatischen Felde immer gültig?
Autor: Andronescu, Plautius
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059323>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

den, gelöst werden... und man erkennt, dass es auch so ging!

Also, verehrte Leiter von schweizerischen Elektrizitätsunternehmen: *Lasst heute arbeitslose Elektroingenieure, einzeln dafür ausgewählte, sofort alle die Studien ausführen, die Ihr «schon lange habt machen sollen oder wollen»*, lasst sie vielleicht auch Publikationen daraus bilden, die der Allgemeinheit zugute kommen. Heute besteht entschieden *Auswahl* von Elektroingenieuren für solche Arbeiten. Jeder Auftraggeber wird sie sich selbst, der Aufgabe entsprechend, auswählen; er hat heute die Wahl unter geeigneten z. T. sehr erfahrenen, älteren Ingenieuren; Neulinge kommen dafür natürlich nicht in Betracht, ausser zur Beihilfe.

Ich zweifle nicht, dass der SEV und der VSE gerne zum Gelingen einer solchen Aktion mithelfen werden, die den Verbänden nur nützen kann und wohl ansteht.

Es ergeht meine Bitte an das Generalsekretariat des SEV und VSE in einfachster Weise, aber möglichst sofort, etwa Folgendes zu organisieren:

1. Elektrizitätswerke und Firmen (oder irgendwelche Mitglieder unserer Verbände) geben dem Generalsekretariat die Titel der Aufgaben an, die sie mit bei ihnen liegendem Material für sich bearbeiten lassen wollen.
2. Elektroingenieure, die stellenlos sind (oder eventuell: zwar in Stellung, jedoch mit der Erlaubnis Privatarbeiten ausführen zu dürfen, zur Ergänzung ihres reduzierten Gehaltes), geben ihre Adressen und dazu ein Curriculum vitae mit Angabe bisheriger Arbeiten oder Studien, über die sie Erfahrung besitzen, an das Generalsekretariat.
3. Das Generalsekretariat, unterstützt durch seine eigene Personenkenntnis oder diejenige ihm bekannter Berater, schlägt für die gewünschten

Arbeiten den Auftraggebern ihm geeignet erscheinende Bearbeiter aus den Angemeldeten zur Auswahl vor.

4. In allen diesen Fällen (oder auch in weiteren, von ihm selbst oder Mitgliedern angemeldeten Fällen) sucht das Generalsekretariat dort, wo es nützlich und angängig erscheint, um die Erlaubnis nach, den Verfassern die Veröffentlichung ihrer Arbeiten (wenn nötig verallgemeinert oder konzentriert) im «Bulletin» zu gestatten. In diesem Fall erhält der Autor dafür auch das übliche Bulletin-Honorar.

Auf diese Weise dürften wir nicht nur die Schwierigkeiten lindern können, die heute mancher tüchtige Elektro-Ingenieur durchzumachen hat, wir können ihn auch dem Gebiete erhalten, ja ihn darin fördern und damit auch die Tüchtigkeit des verfügbaren Personals; wir können auch die Krisiszeit noch fruchtbringend gestalten.

Nachwort des Generalsekretariates des SEV und VSE.

Das Generalsekretariat des SEV und VSE leistet dieser schönen und nützlichen Anregung des verehrten Ehrenmitgliedes des SEV gerne Folge und würde sich sehr freuen, wenn es ihm auf diese Weise möglich würde, recht vielen Fachgenossen in der Krise etwas helfen zu können und dem Vereinszweck gemäss die Entwicklung der Elektrotechnik und der Elektrotechniker in der Schweiz zu fördern. Es bittet alle, die es gemäss vorstehenden Ausführungen betreffen mag, diese Bestrebungen tatkräftig zu unterstützen; wo besondere vertrauliche Behandlung des Falles angezeigt erscheinen sollte, können die Zuschriften auch persönlich an den Generalsekretär gerichtet werden.

Das Generalsekretariat nimmt von heute an, gemäss den vorstehenden Vorschlägen, Anmeldungen von Auftraggebern und von Elektroingenieuren an und wird sie raschestens erledigen.

Ist die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{F}$ im elektrostatischen Felde immer gültig?

Von Prof. Dr.-Ing. Plautius Andronescu, Bukarest.

53.72

Der Autor unterscheidet dreierlei elektrostatische Felder: In Feldern erster Kategorie befinden sich nur Metallkörper mit oder ohne «wahre» elektrische Ladungen, in solchen zweiter Kategorie befinden sich ausserdem Isoliertkörper ohne «wahre» elektrische Ladungen und in solchen dritter Kategorie befinden sich zudem noch Isoliertkörper mit «wahren» elektrischen Oberflächen- und Raumladungen. Es wird gezeigt, dass die Beziehung $\delta = \varepsilon \cdot \mathfrak{F}$ (δ = Vektor der Verschiebung, ε = Dielektrizitätskonstante, $\mathfrak{F}$ = Vektor der Feldstärke) für Felder erster Kategorie immer, dagegen für Felder zweiter Kategorie nur dann gilt, wenn eine gewisse Bedingung erfüllt ist. Der komplizierte Fall der Felder dritter Kategorie ist zur Zeit noch nicht abgeklärt. Am Schluss wird ein Anwendungsbeispiel bei vereinfachten Annahmen gegeben.

Allgemeine Betrachtungen.

In der Elektrostatik spielt bekanntlich die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{F}$ eine wesentliche Rolle, wie z. B. bei der Bestimmung der Kapazität einer Kraftröhre, bei der Festlegung der Brechungsge-

L'auteur distingue trois espèces de champs électrostatiques. Dans les champs de la première espèce, il ne se trouve que des corps métalliques avec ou sans charge électrique «vraie»; dans ceux de la seconde espèce on trouve en outre des corps isolants sans charge électrique «vraie» et dans ceux de la troisième espèce, de plus, des corps isolants avec charges électriques superficielle et spatiale «vraies». Pour les champs de la première espèce, la relation $\delta = \varepsilon \cdot \mathfrak{F}$ (δ = vecteur-déplacement, ε = constante diélectrique, $\mathfrak{F}$ = vecteur intensité de champ) est toujours valable, tandis que pour ceux de la seconde espèce la dite relation n'est valable que dans certaines conditions; le cas compliqué des champs de la troisième espèce n'est pas encore éclairci. L'auteur termine son étude par un exemple d'application pour lequel les données ont été simplifiées.

setze, bei der Bestimmung des Potentials eines Dielektrikums, der elektrostatischen Energie und der mechanischen Kräfte, die auf elektrisierte Körper wirken. Diese Beziehung soll im folgenden einer eingehenden Betrachtung unterzogen werden.

Man geht am besten von folgenden zwei Grundbegriffen des elektrischen Feldes aus: 1. die atomistische Struktur der Elektrizität und 2. die Betrachtung des Raumes nicht nur als mathematischen Begriff, sondern auch als physikalisches Objekt.

Der Raum, wie auch die in ihm befindlichen Körper werden unter dem Einfluss der elektrischen Mengen in einen besonderen Zustand, den elektrischen Zustand, versetzt. Der elektrisierte Raum und die elektrisierten Körper bilden den Sitz der elektrischen Energie. Wenn die elektrischen Mengen sich im Ruhezustand befinden, wird die Energie als elektrostatische Energie bezeichnet. Auf die elektrisierten Körper wirken mechanische Kräfte ein.

Zur Bestimmung der Grösse und der Verteilung sowohl der elektrostatischen Energie als auch der mechanischen Kräfte hat man folgende zwei Vektorfelder eingeführt:

$\mathfrak{D}$ - und $\mathfrak{F}$ -Vektorfelder.

Diese beiden Vektorfelder bilden das elektrostatische Feld. Der $\mathfrak{D}$ -Vektor wird dielektrische Verschiebung und der $\mathfrak{F}$ -Vektor die Feldstärke des elektrostatischen Feldes genannt.

Zur Beantwortung unserer Titelfrage erinnern wir uns zuerst derjenigen Begriffe, die zur Bestimmung eines elektrostatischen Feldes nötig sind.

Bestimmung des elektrostatischen Feldes.

Zur Festlegung der $\mathfrak{D}$ - und $\mathfrak{F}$ -Vektorfelder werden folgende vier Begriffe eingeführt:

Zwei erste Begriffe, die wahre und die freie elektrische Ladung, beziehen sich auf die elektrischen Mengen.

Man bezeichnet als ruhende *wahre elektrische Ladung* eine solche elektrische Menge, die auf der äusseren Oberfläche eines Metallkörpers, wie auch auf der Oberfläche und in der Masse eines Isolierkörpers sitzen kann und bei jeder Lage des Körpers (von Erde isoliert) unverändert bleibt. Die Summe der wahren elektrischen Ladungen im ganzen Felde ist Null.

Was die *freie elektrische Ladung* anbelangt, beziehen wir uns auf die folgenden Vorgänge: Durch Einführung eines Körpers in ein elektrostatisches Feld entstehen durch die Verschiebung der Elektronen in der Masse des elektrisierten Körpers die freien elektrischen Ladungen. Die Elektronenverschiebung findet solange statt, bis das elektrostatische Gleichgewicht hergestellt ist. Darunter ist zu verstehen, dass die Feldstärke $\mathfrak{F}$, welche sich aus der Verteilung der freien elektrischen Ladungen bestimmen lässt, in metallischen Körpern Null wird. Hingegen wird die Feldstärke in Isolierkörpern von Null verschieden und dieselbe erhält einen Wert, welcher von den sogenannten dielektrischen Eigenschaften des Körpers abhängig ist. Wird der elektrisierte Körper aus dem Felde herausgenommen, so kehren die freien elektrischen Mengen unter der Wirkung des Feldes wieder in ihre ursprüngliche neutrale Lage zurück. Es ist zu bemerken, dass die

Summe aller freien elektrischen Mengen eines elektrisierten Körpers Null ist.

Die anderen zwei Begriffe betreffen die elektrischen Eigenschaften des elektrisierten Körpers, nämlich die leitenden und die dielektrischen Eigenschaften der Materie.

Die *elektrisch leitende Eigenschaft der Materie* lässt sich bekanntlich wie folgt ausdrücken:

$$y = \eta \mathfrak{F}$$

wobei y die elektrische Stromdichte und η die Konduktivität der Materie darstellen.

y , η und $\mathfrak{F}$ sind in CGS-Einheiten des elektromagnetischen Maßsystems gemessen. Z. B. sind die Metalle elektrisch leitende Körper. Im elektrostatischen Gleichgewichtszustand ist die Feldstärke in der Metallmasse Null; auf der Metalloberfläche steht sie senkrecht. Die Feldstärke bildet also den Gradient einer skalaren Funktion (Potentialfunktion):

$$\mathfrak{F} = -\nabla V, \text{ wobei: } [-\nabla \nabla V] = \text{rot } \mathfrak{F} = 0$$

Das Vektorfeld $\mathfrak{F}$ stellt also ein wirbelfreies Feld dar, welches Aequipotentialflächen besitzt.

Die *dielektrischen Eigenschaften der Materie* sind durch den Einfluss der Materie auf die Grösse und die Verteilung des $\mathfrak{F}$ -Vektorfeldes in der Masse des Isolierkörpers gekennzeichnet. Für die Oberflächendichte der freien elektrischen Mengen, die in der Trennfläche eines Metallkörpers und eines homogenen und isotropen Isolierkörpers sitzt, kann man erfahrungsgemäss schreiben:

$$m = kM \text{ oder } m = \frac{1}{\epsilon} M$$

worin M die Oberflächendichte der wahren elektrischen Ladung, die in der Metalloberfläche sitzt, und m die Oberflächendichte der resultierenden freien elektrischen Mengen der Trennflächen bedeuten. Diese Beziehung gilt aber, wie wir sehen werden, nur mit Einschränkungen. k oder ϵ charakterisiert die dielektrischen Eigenschaften des Körpers. ϵ wird Dielektrizitätskonstante genannt.

Mit Hilfe dieser vier Begriffe lassen sich nun die Vektorfelder $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen. Dazu wendet man das Coulombsche Gesetz an. Man bestimmt das $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld in seiner Abhängigkeit von Grösse und Verteilung der wahren elektrischen Ladungen und das $\mathfrak{F}$ -Vektorfeld in derjenigen von den freien elektrischen Ladungen.

In irgend einem Punkt P im Raume werden $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ folgende Werte erhalten:

$$\mathfrak{D} = \sum_{\xi=1}^{\xi=t_1} \sum_{S_{\xi}} \frac{M_{\xi} dS_{\xi}}{r_{\xi}^2} \bar{r}_{\xi} + \sum_{v=1}^{v=Z_1} \sum_{v_p} \frac{U_v d v_p}{r_v^2} \bar{r}_v \quad (1)$$

$$\mathfrak{F} = \sum_{\xi=1}^{\xi=t_2} \sum_{S_{\xi}} \frac{m_{\xi} dS_{\xi}}{r_{\xi}^2} \bar{r}_{\xi} + \sum_{v=1}^{v=Z_2} \sum_{v_p} \frac{u_v d v_p}{r_v^2} \bar{r}_v \quad (2)$$

worin M_{ξ} , m_{ξ} , U_v , u_v die oberflächlichen und räumlichen Dichten der wahren und freien elek-

trischen Ladungen bedeuten. $\bar{r}_\xi$ und $\bar{r}_\nu$ bilden die Einheitsvektoren. Dieselben liegen in der Verlängerung der Strahlen, die von den Oberflächen- und Volumenelementen dS_ξ , dv_ν ausgehen, und an dem im Raume liegenden Punkt P endigen.

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\int_{S_1} (\mathfrak{D} d\gamma) = 4\pi \sum_{p_1=1}^{p_1=p_1} Q_{p_1} \quad (1a)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi U \quad (1b)$$

$$\operatorname{div}_S \mathfrak{D} = D_{1n_1} + D_{2n_2} = 4\pi M \quad (1c)$$

$$\int_{S_2} (\mathfrak{F} d\gamma) = 4\pi \sum_{p_2=1}^{p_2=p_2} q_{p_2} \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = 4\pi u \quad (2b)$$

$$\operatorname{div}_S \mathfrak{F} = F_{1n_1} + F_{2n_2} = 4\pi m \quad (2c)$$

worin S_1 , S_2 beliebige geschlossene Flächen bedeuten, die p_1 wahre, bzw. p_2 freie elektrische Ladungen einschliessen.

Die Gl. (1b, 1c bzw. 2b, 2c) geben die räumliche und oberflächliche Divergenz der Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ an. $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ bilden die Normal-Einheitsvektoren, die von der Trennfläche nach dem Innern der Körper gerichtet sind.

Ferner gestützt auf die Beziehung:

$$\mathfrak{F} = -\nabla V$$

und unter Zuhilfenahme der Gl. (2) erhält das Potential folgende Form:

$$V = \sum_{\xi=1}^{\xi=t_2} \int_{S_\xi} \frac{m_\xi dS_\xi}{r_\xi} + \sum_{\nu=1}^{\nu=t_2} \int_{v_\nu} \frac{u_\nu dv_\nu}{r_\nu}$$

wobei das Potential sowohl auf der Oberfläche als auch in der Metallmasse konstant ist. Mit Hilfe dieser Ausdrücke sind wir nun in der Lage, die Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ festzulegen. Dazu ist es zweckmässig, das elektrostatische Feld in folgende drei Kategorien einzuteilen:

1. *Das elektrostatische Feld der ersten Kategorie.* Im elektrostatischen Feld befinden sich nur Metallkörper mit — und ohne — wahren elektrischen Ladungen. Der Zwischenraum ist leer oder kann mit einem homogenen und isotropen Isolierkörper gefüllt werden.

2. *Das elektrostatische Feld der zweiten Kategorie.* Im Felde der ersten Kategorie befinden sich noch Isolierkörper, frei von wahren elektrischen Ladungen.

3. *Das elektrostatische Feld der dritten Kategorie.* Im Felde der zweiten Kategorie befinden sich Isolierkörper, die räumlich wahre elektrische Ladungen wie auch Oberflächenladungen besitzen. Die Verteilung der wahren elektrischen Ladungen auf den Isolierkörpern kann beliebig sein.

I. Festlegung der Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ im elektrostatischen Feld der ersten Kategorie.

Wir nehmen zuerst an, dass sich im Raume nur ein Metallkörper mit der wahren elektrischen Oberflächenladung Q_1 befindet. Unter der Bedingung, dass $\mathfrak{D}$ in der Metallmasse Null ist, wird die Oberflächendichte M_1 mit Hilfe der Gl. (1) eine ganz bestimmte Verteilung erhalten. Die Induktionslinien, deren Tangenten durch die $\mathfrak{D}$ -Vektoren gebildet sind, entstehen auf der Metalloberfläche und werden im Unendlichen auf einer gleichgrossen wahren Ladung von umgekehrtem Vorzeichen ($-Q_1$) endigen. Was die Oberflächendichte der freien elektrischen Ladung anbelangt, lässt sich dieselbe aus der Beziehung

$$m_{01} = k_0 M_1 \text{ oder: } m_{01} = \frac{1}{\epsilon_0} M_1 \quad (4)$$

bestimmen. Aus den Gl. (2) und (4) ergibt sich in der Metallmasse $\mathfrak{F}_0 = 0$, eine Bedingung, die dem elektrostatischen Gleichgewicht entspricht.

Die Kraftlinien, deren Tangenten durch die $\mathfrak{F}$ -Vektoren dargestellt sind, entstehen auf der freien elektrischen Ladung ($k_0 Q_1$) und endigen im Unendlichen auf der freien elektrischen Ladung ($-k_0 Q_1$).

$\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ erhalten im angenommenen Fall, in irgend einem Punkte P im Raume, folgende Werte:

$$\mathfrak{D} = \sum_{S_1} \frac{M_1 dS_1}{r_1^2} \bar{r}_1 \quad (5)$$

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_{S_1} \frac{m_{01} dS_1}{r_1^2} \bar{r}_1 \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$k_0 \mathfrak{D} = \mathfrak{F}_0 \text{ oder: } \mathfrak{D} = \epsilon_0 \mathfrak{F}_0 \quad (7)$$

Wir gehen nun zum folgenden Fall über: Im Raume befindet sich der Metallkörper 1 mit der wahren elektrischen Ladung Q_1 und der Metallkörper 2 ohne wahre elektrische Ladung. Das elektrostatische Gleichgewicht ergibt sich durch die Entstehung der freien elektrischen Ladungen auf den Oberflächen der beiden Metallkörper. Für die Oberflächendichten derselben kann man schreiben:

$$m_{01} = k_0 M_1 + m_{0i_1} \quad m_{02} = m_{0i_2} \quad (8)$$

worin m_{0i_1} und m_{0i_2} die Oberflächendichten derjenigen freien elektrischen Ladungen sind, welche durch Hineinbringen des Metallkörpers 2 ins Feld der Ladung Q_1 entstehen.

Man hat:

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_1} m_{0i_1} dS_1 &= q_{0i_1} - q_{01} = 0 \\ \int_{S_2} m_{0i_2} dS_2 &= q_{0i_2} - q_{02} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

woraus zu ersehen ist, dass die Summe der auftretenden freien elektrischen Ladungen auf jedem Metallkörper Null ist.

Aus den Gl. (8) ergibt sich, dass im angenommenen Fall zwischen m_{01} und M_1 keine Proportionalität mehr bestehen, folglich auch eine Beziehung von der Form $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{F}_0$ nicht mehr gültig sein kann. Wir werden aber sehen, dass bei der Vervollständigung unserer bisherigen Betrachtungen, gestützt auf Erfahrungstatsachen, die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{F}_0$ im angenommenen Fall immer noch gültig ist.

Es sind ja die verschiedenen Mittel bekannt, um die positiven und negativen freien elektrischen Ladungen, die auf der Oberfläche eines Metallkörpers auftreten, getrennt aus dem Felde herauszunehmen. Dieselben werden also als wahre elektrische Ladungen betrachtet (die bekannte Influenzerscheinung). Wird z. B. der Metallkörper 2 in diejenigen zwei Teile getrennt, die den beiden freien elektrischen Ladungen entsprechen, und zwar in der Art, dass zwischen den beiden Teilen des Körpers ein kleiner Luftspalt gebildet wird, dann erhält man durch Herausnehmen der beiden Metallteile aus dem Felde die positiven und die negativen elektrischen Ladungen jede für sich allein. Oder, wenn man den Metallkörper 2 mit der Erde metallisch in Verbindung setzt, so verteilt sich die freie elektrische Ladung q_{012} fast ganz auf die Erdoberfläche. Auf der Metalloberfläche bleibt also nur die Ladung $-q_{012}$ übrig. Wenn man nun die Erdung unterbricht, dann bleibt die freie elektrische Ladung $-q_{012}$ auf der Oberfläche des Metallkörpers 2 bestehen auch dann, wenn der Körper aus dem Feld entfernt wird.

Die Eigenschaft der Metalle, die ihre freien elektrischen Ladungen in wahre umzuwandeln ermöglicht, beruht darauf, dass die Feldstärke in der Metallmasse Null ist. So erklärt sich, warum es nicht möglich ist, die auf der Oberfläche eines Isolierkörpers auftretenden freien elektrischen Mengen getrennt aus dem Felde herauszunehmen. Der Isolierkörper wird vom $\mathfrak{F}$ -Vektorfeld durchgesetzt. Wird der elektrisierte Isolierkörper in zwei Teile getrennt, dann entsteht im Luftspalt sofort ein $\mathfrak{F}$ -Vektorfeld und auf den beiden Oberflächen der gegenüberstehenden Teilkörper treten neue freie elektrische Ladungen auf. Die Summe der freien elektrischen Ladungen auf jedem der beiden Teile des Körpers ist Null. Folglich treten die positiven und negativen freien Ladungen in ihre ursprüngliche neutrale Lage zurück, sobald der Isolierkörper aus dem Feld herausgenommen wird.

Daraus ist ein wichtiger Schluss zu ziehen: Man betrachtet also die auf Metalloberflächen auftretenden freien elektrischen Ladungen als wahre elektrische Ladungen. Was die Grösse k_0 oder ε_0 anbelangt, so erhalten dieselben erfahrungsgemäss den Wert «Eins». Die Gl. (8) werden somit in folgender Weise geschrieben:

$$M_{01} = M_1 + M_{011} \quad M_{02} = M_{012} \quad (10)$$

Ferner hat man:

$$Q_{01} = Q_1 + Q_{011} - Q_{011} \quad Q_{02} = Q_{012} - Q_{012} \quad (11)$$

Diese Resultate werden verallgemeinert lauten: Die totale wahre elektrische Ladung, die auf der Oberfläche eines im leeren Raume liegenden Metallkörpers sitzt, wird der bereits vorhandenen wahren elektrischen Ladung der Kategorien Q_ξ gleich. Die Dichte der totalen wahren elektrischen Ladung kann aber von der Dichte M_ξ verschiedenen Wert haben.

Mit Rücksicht auf die Beziehungen (10) und durch Anwendung der Gl. (1) und (2) werden die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}_0$ identisch.

Es sei nun der Raum mit einem homogenen und isotropen Isolierkörper ε_3 gefüllt.

Mit Hilfe der Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} m_{13} &= K_3 M_{01} = \frac{1}{\varepsilon_3} M_{01} \\ m_{23} &= K_3 M_{02} = \frac{1}{\varepsilon_3} M_{02} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

und durch die Anwendung der Gl. (1) und (2) oder (1c) und (2c) erhält man:

$$K_3 \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{F}_3 \text{ oder } \mathfrak{D}_3 = \varepsilon_3 \mathfrak{F}_3 \quad (13)$$

Die Oberflächendichte m_{13} setzt sich aus der Dichte M_{01} und der Dichte m_{d3} der freien elektrischen Ladung zusammen, die auf der Trennfläche S_{13} des Metallkörpers (1) und Isolierkörpers (ε_3) auftritt. Wir können schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \text{Für die Trennfläche } S_{13}: m_{13} &= M_{01} + m_{d3} \\ \text{Für die Trennfläche } S_{23}: m_{23} &= M_{02} + m_{d3} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Daraus ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \text{Für die Trennfläche } S_{13}: m_{d3} &= -M_{01} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \\ \text{Für die Trennfläche } S_{23}: m_{d3} &= -M_{02} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Man erhält dasselbe Resultat, wenn im Raume oder in einem homogenen und isotropen Isolierkörper mehrere Metallkörper mit und ohne wahre elektrische Ladungen vorhanden sind.

Die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{F}$ ist also im elektrostatischen Feld der ersten Kategorie immer gültig.

II. Festlegung der Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ im elektrostatischen Feld der zweiten Kategorie.

Bringt man ins Feld der ersten Kategorie einen Isolierkörper, so unterscheidet man bei der Betrachtung des elektrostatischen Gleichgewichtes zwei Fälle, je nachdem die freie elektrische Ladungsdichte der Metalloberfläche unverändert bleibt oder sich geändert hat.

a) Unveränderte Dichte.

Betrachten wir das in Fig. 1 dargestellte Kraftrohr. Gestützt auf Erfahrung, kann man schreiben:

$$m_{12} = \frac{M_{01}}{\varepsilon_2} \quad m_{34} = \frac{M_{04}}{\varepsilon_3} \quad (16)$$

Die Beziehungen (16) gelten nur dann, wenn sich das Induktionsrohr mit dem Kraftrohr überlagert.

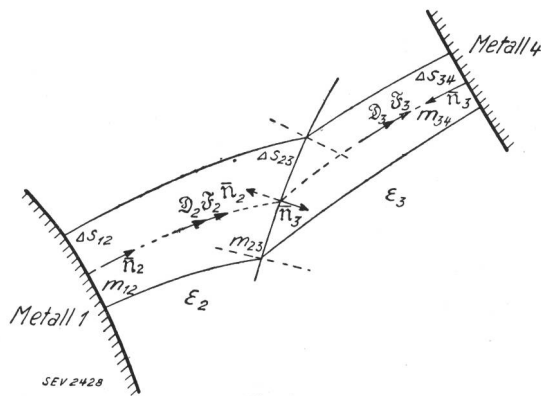


Fig. 1.

Ferner hat man:

$$\left. \begin{aligned} m_{12} &= M_{01} + m_{d2} \\ m_{23} &= m_{d2} + m_{d3} \\ m_{34} &= m_{d3} + M_{04} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Grösse m_{d2} , welche in den Gleichungen von m_{12} und m_{23} vorkommt, verschieden sein kann. Für das gegebene Kraftrohr kann man schreiben:

$$\int_{\Delta S_{12}} m_{12} dS_{12} + \int_{\Delta S_{23}} m_{23} dS_{23} + \int_{\Delta S_{34}} m_{34} dS_{34} = 0 \quad (18)$$

wobei:

$$\int_{\Delta S_{12}} m_{d2} dS_{12} = - \int_{\Delta S_{23}} m_{d2} dS_{23} \quad (19a)$$

$$\int_{\Delta S_{23}} m_{d3} dS_{23} = - \int_{\Delta S_{34}} m_{d3} dS_{34} \quad (19b)$$

$$\int_{\Delta S_{34}} M_{04} dS_{34} = - \int_{\Delta S_{12}} M_{01} dS_{12} \quad (19c)$$

Aus den Gl. (16) und (17) erhält man

$$\left. \begin{aligned} \text{für die Fläche } \Delta S_{12}: m_{d2} &= -M_{01} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_2}\right) \\ \text{für die Fläche } \Delta S_{34}: m_{d3} &= -M_{04} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Mit Hilfe der Gl. (20) sind wir nun in der Lage, eine Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ zu ermitteln. Man bildet die Oberflächendivergenz der Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$. Für die Metalloberflächen ΔS_{12} und ΔS_{34} (Fig. 1) erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} D_{2n_2} &= D_2 = 4\pi M_{01} \\ F_{2n_2} &= F_2 = 4\pi m_{12} = 4\pi \frac{M_{01}}{\epsilon_2} \\ D_{3n_3} &= D_3 = 4\pi M_{04} \\ F_{3n_3} &= F_3 = 4\pi m_{34} = 4\pi \frac{M_{04}}{\epsilon_3} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Aus Gl. (21) ergibt sich:

$$\mathfrak{D}_2 = \epsilon_2 \mathfrak{F}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_3 = \epsilon_3 \mathfrak{F}_3 \quad (22)$$

Die Beziehungen (22) sollten auch aus der Bildung der Flächendivergenz der Fläche ΔS_{23} ermittelt werden können. Mit Hilfe der Gl. (16), (17), (19a), (19b), (19c) und (20) kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Delta S_{23}} m_{23} dS_{23} &= \int_{\Delta S_{12}} M_{01} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_2}\right) dS_{12} \\ + \int_{\Delta S_{34}} M_{04} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_3}\right) dS_{34} &= \int_{\Delta S_{12}} M_{01} \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_2}\right) dS_{12} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Durch die Einführung der Flächendivergenz folgt:

$$\int_{\Delta S_{12}} M_{01} dS_{12} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_{23}} D_{2n_2} dS_{23} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_{23}} D_{3n_3} dS_{23} \quad (24)$$

Für die Fläche ΔS_{23} erhält man:

$$D_{2n_2} + D_{3n_3} = 0 \quad \text{und} \quad F_{2n_2} + F_{3n_3} = 4\pi m_{23} \quad (25)$$

Mit Gl. (24) erhält Gl. (23) folgende Form:

$$\int_{\Delta S_{23}} m_{23} dS_{23} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_{23}} D_{3n_3} \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_2}\right) dS_{23}$$

Daraus ergibt sich:

$$4\pi m_{23} = D_{3n_3} \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_2}\right) \quad (26)$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass mit Rücksicht auf die Ausdrücke:

$$\mathfrak{D}_2 = \epsilon_2 \mathfrak{F}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_3 = \epsilon_3 \mathfrak{F}_3$$

man aus den Gl. (25) dieselbe Beziehung wie in (26) bekommt.

Daraus schliessen wir, dass im elektrostatischen Felde zweiter Kategorie bei unveränderter Dichte der elektrischen Ladungen der Metalloberflächen die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{F}$ gültig ist.

Wir gehen nun zum zweiten Fall über:

b) *Veränderte Dichte nach Einführung des Isolierkörpers.*

Die Ueberlegungen sind dieselben wie in Fall a). Wir beziehen uns auf Fig. 2.

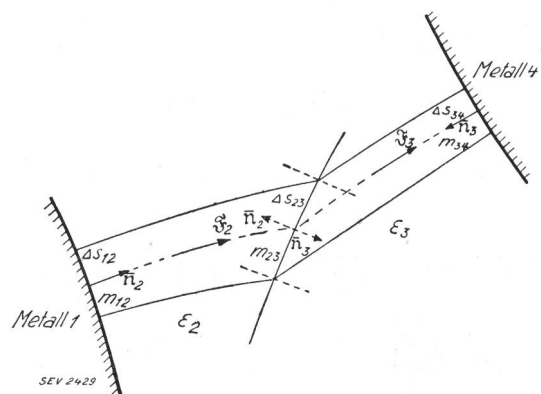


Fig. 2.

Die Gl. (17) erhalten nun folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} m_{12} &= (M_{01} + m_1) + m_{d2} \\ m_{23} &= m_{d2} + m_{d3} \\ m_{34} &= m_{d3} + (M_{04} + m_4) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

worin $(M_{01} + m_1)$ und $(M_{04} + m_4)$ die neuen elektrischen Dichten der Metalloberflächen ΔS_{12} und ΔS_{34} darstellen.

Ferner hat man:

$$\int_{\dot{S}_1} m_1 dS_1 = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\dot{S}_4} m_4 dS_4 = 0 \quad (28)$$

S_1, S_4 sind die Oberflächen der Metallkörper 1 und 4. Gl. (18) gilt auch in diesem Fall. Die Gl. (19) erhalten aber folgende Form:

$$\int_{\Delta \dot{S}_{12}} m_{d2} dS_{12} = - \int_{\Delta \dot{S}_{23}} m_{d2} dS_{23} \quad (28a)$$

$$\int_{\Delta \dot{S}_{23}} m_{d3} dS_{23} = - \int_{\Delta \dot{S}_{34}} m_{d3} dS_{34} \quad (28b)$$

$$\int_{\Delta \dot{S}_{34}} (M_{04} + m_4) dS_{34} = - \int_{\Delta \dot{S}_{12}} (M_{01} + m_1) dS_{12} \quad (28c)$$

Wir führen die Flächendivergenz für die Flächen ΔS_{12} und ΔS_{34} an:

$$\left. \begin{aligned} D_{2n_2} &= D_2 = 4\pi M_{01} & F_{2n_2} &= F_2 = 4\pi m_{12} \\ D_{3n_3} &= D_3 = 4\pi M_{04} & F_{3n_3} &= F_3 = 4\pi m_{34} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Zur Bildung der Flächendivergenz z. B. des Vektors $\mathfrak{D}_2$ für die Fläche ΔS_{12} wird nicht die totale Dichte $(M_{01} + m_1)$ der Metalloberfläche ΔS_{12} in Betracht gezogen, denn die Bedingung, dass $\mathfrak{D}$ in der Metallmasse Null sein muss, wird nur von der Oberflächenverteilung der Dichte M_{01} erfüllt. Die gleiche Ueberlegung wird man auch bei der Bildung der Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{D}_3$ für die Fläche ΔS_{34} machen. Man soll somit darauf achten, dass das Vektorfeld $\mathfrak{D}$ von der Oberflächenverteilung der Dichte $M_{0\xi}$ abhängig ist.

Wir stellen nun die wichtige Frage, ob die Gl. (16) auch in diesem Fall gültig sein könnten? Zur Beantwortung dieser Frage wird zuerst angenommen, die Gl. (16) seien gültig.

Bei Berücksichtigung der Gl. (16) und (29) erhält die Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ für die Flächen ΔS_{12} und ΔS_{34} folgende Form:

$$\mathfrak{D}_2 = \varepsilon_2 \mathfrak{F}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_3 = \varepsilon_3 \mathfrak{F}_3 \quad (30)$$

Bei der Bildung der Flächendivergenz für die Fläche ΔS_{23} erhält man mit Hilfe der Gl. (16), (27) und (28) folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta \dot{S}_{23}} m_{23} dS_{23} &= \int_{\Delta \dot{S}_{12}} M_{01} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{12}} m_1 dS_{12} \\ &+ \int_{\Delta \dot{S}_{34}} M_{04} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) dS_{34} + \int_{\Delta \dot{S}_{34}} m_4 dS_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Delta \dot{S}_{12}} (M_{01} + m_1 - m_1) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) dS_{12} \\ &+ \int_{\Delta \dot{S}_{34}} (M_{04} + m_4 - m_4) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) dS_{34} \\ &+ \int_{\Delta \dot{S}_{12}} m_1 dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{34}} m_4 dS_{34} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung (28c) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Delta \dot{S}_{23}} m_{23} dS_{23} &= \int_{\Delta \dot{S}_{12}} (M_{01} + m_1) \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) dS_{12} \\ &+ \int_{\Delta \dot{S}_{12}} \frac{m_1}{\varepsilon_2} dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{34}} \frac{m_4}{\varepsilon_3} dS_{34} = \int_{\Delta \dot{S}_{12}} M_{01} \\ &\cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{12}} \frac{m_1}{\varepsilon_3} dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{34}} \frac{m_4}{\varepsilon_3} dS_{34} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Aus dem Ausdruck (31) würden sich die Gl. (30) ergeben, wenn die Bedingungsgleichung

$$\int_{\Delta \dot{S}_{12}} m_1 dS_{12} + \int_{\Delta \dot{S}_{34}} m_4 dS_{34} = 0 \quad (32)$$

erfüllt wird. Ist sie erfüllt, so bekommt der Ausdruck (31) die gleiche Form wie Gl. (23). Ferner ersieht man, dass Gl. (28c) unter Berücksichtigung der Gl. (32) folgende Form erhält:

$$\int_{\Delta \dot{S}_{34}} M_{04} dS_{34} = - \int_{\Delta \dot{S}_{12}} M_{01} dS_{12} \quad (33)$$

eine Beziehung, die mit Gl. (19c) identisch ist.

Wir kommen also zu dem wichtigen Ergebnis, dass im elektrostatischen Felde zweiter Kategorie bei veränderter Dichte der elektrischen Ladung der Metalloberflächen nur dann die Gl. (16) und folglich eine Beziehung von der Form $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{F}$ gelten kann, wenn die Bedingungsgleichung (32) erfüllt ist.

Es ist also von Fall zu Fall zu untersuchen, ob die Bedingungsgleichung (16) erfüllt wird. Ist das der Fall, so fällt das Induktionsrohr mit dem Kraftrohr zusammen. Wenn speziell in den elektrostatischen Feldern dritter Kategorie die Bedingungsgleichung (32) nicht erfüllt ist, dann kann die Beziehung (28c) nicht mehr in die Formen (19c) und (32) zerlegt werden. Das Induktionsrohr fällt dann nicht mehr mit dem Kraftrohr zusammen.

Eine Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ kann wohl immer festgelegt werden. Man benutzt dazu die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) und für die Punkte, die in der Nähe der Körperoberflächen liegen, bestimmt man die Oberflächendivergenzen. Dabei müssen die Oberflächendichten der wahren und freien elektrischen Ladungen bekannt sein. Das Problem ist somit ziemlich schwierig.

III. Festlegung der Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Felde dritter Kategorie.

Die besprochenen Beziehungen dürften auch für elektrostatische Felder dritter Kategorie anwendbar sein. Die Untersuchung solcher Felder bietet aber gegenüber den vorigen Fällen viel grössere Schwierigkeiten. Man muss dazu erstens die beliebige räumliche und oberflächliche Verteilung der wahren elektrischen Mengen der Isolierkörper und zweitens die totale oberflächliche und räumliche Verteilung der wahren und freien elektrischen Ladungen kennen. Das Problem wurde bis heute nicht gelöst.

Schlussbemerkung.

Gestützt auf die bekannten Grundgleichungen der Elektrostatik wurde gezeigt, dass im elektrostatischen Feld erster Kategorie die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ immer gültig ist.

Bei den elektrostatischen Feldern zweiter Kategorie hängt die Gültigkeit der Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ von der Bedingungsgleichung (32) ab.

Im elektrostatischen Felde dritter Kategorie bildet der Beweis, ob die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ immer gültig ist oder nicht, ein neues Problem, welches bis heute noch nicht behandelt worden ist. Es muss betont werden, dass unsere heutigen Kenntnisse über das elektrostatische Feld dritter Kategorie sehr unvollständig sind.

Im Anschluss an die behandelten Fälle der elektrostatischen Felder mögen einige Vorschläge für weitere Arbeiten gemacht werden. Wir verfolgen den behandelten Fall des elektrostatischen Feldes zweiter Kategorie mit Aenderung der Dichte der freien elektrischen Ladungen der Metalloberflächen bei der Einführung eines Isolierkörpers. Es sei angenommen, dass die Bedingungsgleichung (32) erfüllt und folglich die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ gültig ist. Man behauptet, dass in diesem Falle das Induktionsrohr sich mit dem Kraftrohr deckt.

Wenn man aber Gl. (1) betrachtet, so sieht man, dass das Vektorfeld $\mathfrak{D}$, welches nur von der Grösse und Verteilung der Dichte der oberflächlichen wahren elektrischen Ladungen der Metalle abhängig ist, ohne Brechung durch die Trennfläche ΔS_{23} der Isolierkörper ϵ_2 und ϵ_3 hindurchgehen sollte. Wie kommt es, dass an der Trennfläche ΔS_{23} der Vektor $\mathfrak{D}$ für zwei sehr nahe liegende Punkte P_2 und P_3 an der Trennfläche (siehe Fig. 2) nicht die gleiche Grösse und Richtung und den gleichen Sinn hat? Lässt sich aus dem Ausdruck der Flächendivergenz der Vektoren $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$ an der Trennfläche ΔS_{23} , welche lautet:

$$D_{2n_2} + D_{3n_3} = 0$$

nicht ersehen, dass die Vektoren $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$ dieselbe Grösse, Richtung und denselben Sinn haben? Diese Fragen sind sehr wichtig. Wie wir sehen werden, bildet das $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld, durch die Gleichungen

$$\mathfrak{D}_2 = \epsilon_2 \mathfrak{E}_2 \text{ und } \mathfrak{D}_3 = \epsilon_3 \mathfrak{E}_3$$

gekennzeichnet, nicht dem wirklichen $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld, sobald die Feldlinien gebrochen werden.

Um zu zeigen, warum es nötig war, ein fiktives $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld einzuführen, muss man vor allem beweisen, dass die Vektoren $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$, welche der Beziehung $D_{2n_2} + D_{3n_3} = 0$ unterliegen, gleich gross sind, dieselbe Richtung und denselben Sinn haben. Man betrachtet zu diesem Zweck den allgemeinen Fall einer Trennfläche S_{23} mit einer wahren elektrischen Dichte M_{23} . Die Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{D}$ wird:

$$D_{2n_2} + D_{3n_3} = 4\pi M_{23}$$

Nun kann man den Vektor $\mathfrak{D}$ in zwei Komponenten zerlegen:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}''$$

wobei $\mathfrak{D}'$ den ganzen im Felde vorhandenen wahren elektrischen Ladungen mit Ausnahme der La-

dung $\int_{\Delta S_{23}} M_{23} dS_{23}$ des Flächenelementes ΔS_{23} ent-

spricht. Das Flächenelement ΔS_{23} liegt den sehr benachbarten Punkten P_2 und P_3 gegenüber (Fig. 3a). Der Vektor $\mathfrak{D}''$ entspricht der wahren elek-

trischen Ladung $\int_{\Delta S_{23}} M_{23} dS_{23}$.

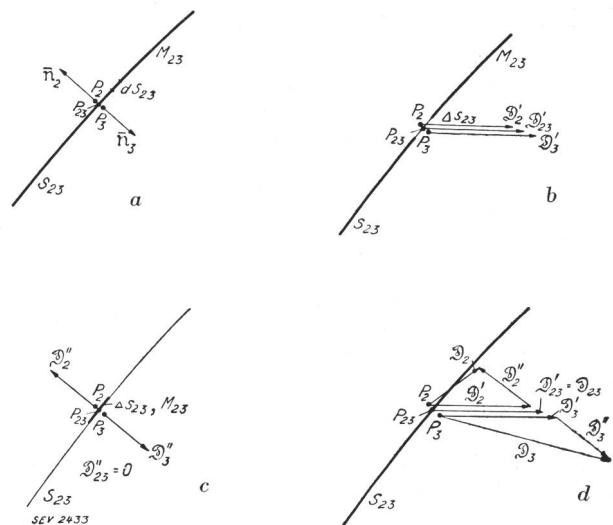


Fig. 3a-d.

Mit grosser Annäherung kann man annehmen, dass für die sehr benachbarten Punkte P_2 , P_{23} und P_3 die Vektoren $\mathfrak{D}'_2$, $\mathfrak{D}'_{23}$ und $\mathfrak{D}'_3$ dieselbe Grösse und Richtung und denselben Sinn haben (Fig. 3b). Was den Vektor $\mathfrak{D}''$ anbelangt, so besitzen die Vektoren $\mathfrak{D}''_2$ und $\mathfrak{D}''_3$ dieselbe Grösse und Richtung, aber umgekehrten Sinn. Ferner hat man $\mathfrak{D}''_{23} = 0$ (Fig. 3c).

Man hat (Fig. 3d):

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_2 &= \mathfrak{D}'_2 + \mathfrak{D}''_2 \\ \mathfrak{D}_3 &= \mathfrak{D}'_3 + \mathfrak{D}''_3 \\ \mathfrak{D}_{23} &= \mathfrak{D}_{23} \end{aligned}$$

Durch Bildung der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$ -Vektoren erhält man:

$$D'_{2n_2} + D'_{3n_3} = 0 \quad \text{und} \quad D''_{2n_2} + D''_{3n_3} = 4\pi M_{23}$$

wobei man im angenommenen Fall schreiben kann:

$$\begin{aligned} D'_{2n_2} &< 0 & D''_{2n_2} &> 0 \\ D'_{3n_3} &> 0 & D''_{3n_3} &> 0 \end{aligned}$$

Ferner betehen folgende Beziehungen:

$$D_{2n_2} = D'_{2n_2} + D''_{2n_2} \quad \text{und} \quad D_{3n_3} = D'_{3n_3} + D''_{3n_3}$$

Daraus ergibt sich, dass die plötzliche Aenderung des Vektors $\mathfrak{D}$, welche beim Uebergang des Vektors $\mathfrak{D}$ von Punkt P_2 in Punkt P_3 auftritt, nur auf die plötzliche Aenderung des Vektors $\mathfrak{D}''$ zurückzuführen, d. h. von der auf der Fläche ΔS_{23} vorhandenen wahren elektrischen Ladung abhängig ist.

Ist z. B. das Medium 2 ein Metall, so ist:

$$D_{2n_2} = D'_{2n_2} + D''_{2n_2} = 0$$

In diesem Fall stehen die Vektoren $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ senkrecht auf der Metalloberfläche. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D'_{3n_3} &= D''_{3n_3} = 2\pi M_{23} \\ D'_{3n_3} &= D'_{23n_3} = D'_{23} = D_{23} = 2\pi M_{23} \\ D_{3n_3} &= D_3 = 4\pi M_{23} \end{aligned}$$

Wir kommen also zu dem Ergebnis, dass, wenn die Beziehung $D_{2n_2} + D_{3n_3} = 0$ erfüllt ist, die Vektoren $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$ dieselbe Grösse und Richtung und denselben Sinn haben. Daraus folgt also, dass das wahre $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld mit dem $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld, welches durch die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ gekennzeichnet ist, nicht mehr identisch ist.

Es bleibt noch zu zeigen, warum das fiktive $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld eingeführt wurde. Bei der Bestimmung der Kapazität einer Kraftrohre, bei der Festlegung der Brechungsgesetze usw. muss die Verteilung der wahren elektrischen Ladungen auf den Metalloberflächen bekannt sein. Ist z. B. ein vollständiges Kraftrohr bekannt, d. h. ein solches Kraftrohr, dessen Kraftlinien durch zwei metallische Oberflächen begrenzt sind, so wird bei der Bestimmung der Kapazität usw. verlangt, dass die Grösse der wahren Ladung derjenigen Metallfläche, von der die Kraftlinien ausgehen, bekannt sein muss. Man nimmt somit eine geschlossene Fläche, welche die verlangte unbekannte wahre elektrische Ladung einschliesst, und man bildet das Flächenintegral des wahren Vektors $\mathfrak{D}$ über die ganze geschlossene Fläche. Man erhält:

$$\int_S (\mathfrak{D} d\gamma) = 4\pi \int_{\Delta S_{12}} M_{01} dS_{12}$$

Um das Flächenintegral bilden zu können, muss man die räumliche Verteilung des wahren $\mathfrak{D}$ -Vektorfeldes kennen. Dieselbe ist aber unbekannt. Man greift dann zu einem sehr sinnreichen Kunstmittel: *Man hat bewiesen, dass es Fälle gibt, in denen das Oberflächenintegral des Vektors $\mathfrak{E}$ multi-*

pliziert mit ϵ die eingeschlossene wahre Ladung angibt.

Man bildet also das Integral über die Oberfläche eines Kraftrohres und man erhält, wie wir schon gesehen haben, folgenden Ausdruck:

$$-\int_{\Delta S_{23}} (\mathfrak{E}_2 \epsilon_2 d\gamma_{23}) = \int_{\Delta S_{23}} (\mathfrak{E}_3 \epsilon_3 d\gamma_{23}) = 4\pi \int_{\Delta S_{12}} M_{01} dS_{12}$$

Man sieht daraus, dass, wenn die Feldlinien gebrochen sind, bei der Bestimmung der wahren Ladung, das wahre $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld durch ein fiktives $\mathfrak{D}$ -Vektorfeld ersetzt werden kann.

Bei der Behandlung zukünftiger Aufgaben ist, speziell beim elektrostatischen Felde dritter Kategorie, immer zu untersuchen, ob die Beziehung $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ gültig ist.

Wir sind am Schlusse unserer Betrachtungen angelangt. Durch ein Beispiel werden nun die elektrostatischen Felder erster und zweiter Kategorie erläutert.

Beispiel.

Wir betrachten folgenden Fall eines elektrostatischen Feldes erster Kategorie: Es sei im Felde einer wahren elektrischen Punktladung Q_1 eine Metallkugel vom Radius ϱ_2 vorhanden. Der Raum sei mit einer homogenen und isotropen Isoliermasse von der Dielektrizitätskonstante ϵ_3 gefüllt.

Man soll bestimmen:

1. Das Potential V_2 der metallischen Kugel;
2. Die oberflächliche Verteilung der Feldstärke und der Dichte der freien elektrischen Ladung der Kugel ϱ_2 .

Wir bemerken vor allem, dass die wahre elektrische Ladung Q_1 als Punktladung aufzufassen ist. Dadurch ist das Problem wesentlich einfacher geworden, denn wenn eine elektrische Ladung auf die Oberfläche einer sehr kleinen metallischen Kugel verteilt ist, können die verschiedenen Abstände vom Punkte P zu den Flächenelementen (dS) der Kugel, durch den Abstand zwischen P und dem Mittelpunkt der Kugel ersetzt werden. Infolgedessen werden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und V , die aus den Gl. (1), (2) und (3) bestimmt werden können, *von der oberflächlichen Verteilung der Ladung unabhängig. Diese Grössen hängen damit nur von der Grösse der Ladung ab.*

Fast alle Probleme aus dem Gebiete des elektrostatischen Feldes erster Kategorie werden durch Einführung von Punkt- und Linienladungen, d. h. durch die Methode der elektrischen Bilder gelöst. Damit ist die Kenntnis der Verteilung der wahren und freien elektrischen Ladungen auf den Metalloberflächen nicht mehr nötig.

Bestimmung des Potentials V_2 .

Zur Bestimmung des Potentials V_2 im Punkte P wählt man zur Vereinfachung das Zentrum Q_2 der Kugel ϱ_2 aus (Fig. 4).

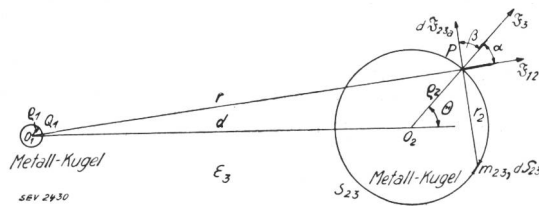


Fig. 4.

Also:

$$\left. \begin{aligned} V_p = V_2 &= \frac{Q_1}{\epsilon_3 d} + \int_{S_{23}} \frac{m_{23} d S_{23}}{Q_2} = \frac{Q_1}{\epsilon_3 d} \\ &+ (q_{i2} - q_{i2}) \frac{1}{Q_2} = \frac{Q_1}{\epsilon_3 d} + (Q_{oi2} - Q_{oi2}) \cdot \\ \frac{1}{\epsilon_3 Q_2} &= \frac{Q_1}{\epsilon_3 d} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Q_{oi2} lässt sich in folgender Weise ermitteln: Man erdet die Metallkugel Q_2 . Das Potential V_2 wird Null und die wahre elektrische Ladung Q_{oi2} geht zur Erde.

Man hat:

$$V_p = 0 = \frac{Q_1}{\epsilon_3 d} - \frac{Q_{oi2}}{\epsilon_3 Q_2}$$

Daraus ergibt sich:

$$Q_{oi2} = \frac{Q_1 Q_2}{d}$$

Bestimmung der Feldstärke $\mathfrak{F}_3$ im Punkte P auf der Trennfläche S_{23} .

Für einen Punkt P auf der Metalloberfläche hat man:

$$F_{3P} = F_{12} \cos \alpha + \int_{S_{23}} dF_{23a} \cos \beta = \frac{Q_1}{\epsilon_3 r^2} \cos \alpha + \int_{S_{23}} \frac{m_{23} d S_{23}}{r_2^2} \cos \beta$$

wobei die Feldstärken $\mathfrak{F}_{12}$ und $\mathfrak{F}_{23a}$ von den freien elektrischen Ladungen $\frac{Q_1}{\epsilon_3}$ und $q_{i2} - q_{i2}$ im Punkte P erzeugt sind. Für einen Punkt P_a ausserhalb der Kugel, aber sehr nahe von der Oberfläche S_{23} , erhält die Feldstärke $\mathfrak{F}_3$ folgenden Wert:

$$\mathfrak{F}_3 = 2 \mathfrak{F}_{3p}$$

Durch Einführung der Potentialgleichung in den obigen Ausdruck erhält man:

$$F_3 = \frac{Q_1}{\epsilon_3 Q_2} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{r_3} (d^2 - Q_2^2) \right] \quad (36)$$

Bestimmung der Oberflächendichte m_{23} der freien elektrischen Ladung der Kugel Q_2 .

Durch Einführung der Flächendivergenz kann man schreiben:

$$F_{3n3} = F_3 = 4\pi m_{23}$$

Somit:

$$m_{23} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_3 Q_2} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{r^3} (d^2 - Q_2^2) \right] \quad (37)$$

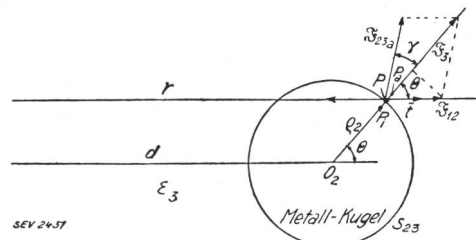


Fig. 5.

Erster Sonderfall.

Wenn die Metallkugel Q_2 sich sehr weit von der wahren elektrischen Punktladung Q_1 befindet, dann stellt sich heraus, wie wenn das Feld $\mathfrak{F}_{12}$ gleichförmig wäre (Fig. 5).

$$\text{Man hat: } \mathfrak{F}_{12} = \frac{Q_1}{\epsilon_3 d^2} \bar{t} \quad (38)$$

Setzt man $r = d + Q_2 \cos \Theta$ ein, so erhält der Ausdruck (36) folgende Form:

$$F_3 \cong \frac{Q_1}{\epsilon_3 Q_2} \left[\frac{1}{d} - \frac{d^2}{r^3} \right] = \frac{Q_1}{\epsilon_3 Q_2} \frac{(r-d)(r^2 + rd + d^2)}{d^4} = \frac{Q_1}{\epsilon_3 Q_2} \frac{3 Q_2 \cos \Theta}{d^2}$$

$$\text{oder: } F_3 = 3 F_{12} \cos \Theta \quad (39)$$

Mit $\mathfrak{F}_{23a}$ und $\mathfrak{F}_{23i}$ seien die von den freien elektrischen Ladungen q_{i2} und $-q_{i2}$ in P_a und P_i erzeugten Feldstärken bezeichnet; sie lassen sich wie folgt bestimmen (Fig. 5):

$$F_3 = F_{23} \cos \gamma + F_{12} \cos \Theta = 3 F_{12} \cos \Theta$$

somit:

$$F_{23an2} = F_{23a} \cos \gamma = 2 F_{12} \cos \Theta \quad (40)$$

Andererseits hat man:

$$(F_{23a} \cos \gamma)^2 + (F_{12} \sin \Theta)^2 = F_{23a}^2 \quad (41)$$

Aus den Gl. (40) und (41) ergibt sich:

$$F_{23a} = F_{12} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \Theta} \quad (42)$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung des elektrostatischen Gleichgewichts wird die Feldstärke $\mathfrak{F}_2$ in der Metallmasse Null. Daraus folgt:

$$F_2 = F_{12} + F_{23i} = 0 \quad (43)$$

$$\text{oder } F_{12} = -F_{23i} \quad (44)$$

Zweiter Sonderfall.

An Stelle der Metallkugel Q_2 wird eine Isolierkugel Q_2 mit der Dielektrizitätskonstante ϵ_2 eingesetzt. Man erhält damit ein elektrostatisches Feld zweiter Kategorie. *Durch Einführung der Isolierkugel ins Feld hat sich die Oberflächendichte der freien elektrischen Mengen der sehr kleinen Metallkugel Q_1 geändert.*

Man vernachlässigt aber die Aenderung der Oberflächendichte, denn die Metallkugel Q_1 liegt sehr weit von der Isolierkugel Q_2 und der Radius Q_1 ist so klein, dass die elektrische Ladung Q_1 als

Punktladung betrachtet wird. Man erkennt somit aus den festgelegten Annahmen, dass in diesem Fall die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ mit grosser Annäherung gültig ist.

Bei der Ersetzung der Metallkugel durch eine Isolierkugel von gleichem Radius ϱ_2 tritt auf der Trennfläche S_{23} eine solche Oberflächendichte m'_{23} auf, dass im elektrostatischen Gleichgewichtszustande die Feldstärke $\mathfrak{E}'_2$ einen den dielektrischen Eigenschaften der Isolierkugel entsprechenden Wert erhält. Ferner ist die Verteilung von m'_{23} derjenigen der m_{23} gleich.

Wir können also einsetzen: $m'_{23} = \mu m_{23}$. (45)

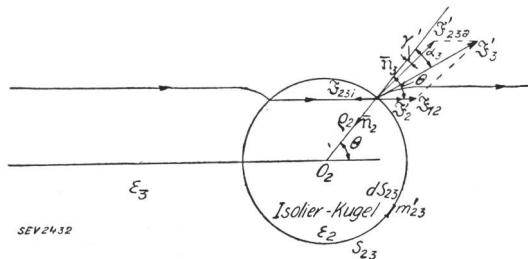


Fig. 6.

Die Aufgabe ist nun, μ zu bestimmen. Man bildet die Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{D}'$ für die Oberfläche S_{23} (Fig. 6):

$$D'_{2n_2} + D'_{3n_3} = 0$$

wobei:

$$D'_{2n_2} = D'_{23in_2} + D'_{12in_2} = \varepsilon_2 F'_{2n_2} = \varepsilon_2 (\mu F_{23in_2} - F_{12} \cos \theta)$$

$$D'_{3n_3} = D'_{23an_3} + D'_{12an_3} = \varepsilon_3 F'_{3n_3} = \varepsilon_3 (\mu F_{23an_3} + F_{12} \cos \theta)$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (40) und (44) erhält man:

$$D'_{2n_2} = \varepsilon_2 (\mu F_{12} \cos \theta - F_{12} \cos \theta) \quad (47)$$

$$D'_{3n_3} = \varepsilon_3 (\mu 2 F_{12} \cos \theta + F_{12} \cos \theta) \quad (48)$$

Aus den Gl. (46), (47) und (48) lässt sich μ bestimmen

$$\frac{1 + 2\mu}{1 - \mu} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \quad (49)$$

$$\text{somit:} \quad \mu = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3} \quad (50)$$

Als die Kugel ϱ_2 eine Metallkugel war, stand die Feldstärke $\mathfrak{E}_3$ senkrecht zu der Metalloberfläche. Die Feldstärke $\mathfrak{E}'_3$ steht aber auf der Oberfläche des Isolierkörpers nicht mehr senkrecht (Fig. 6). Die Feldlinie erfährt beim Durchgang von der Isoliermasse ε_2 zu der Isoliermasse ε_3 eine Brechung. Durch Anwendung der Brechungsgesetze kann man den Brechungswinkel α_3 bestimmen.

Bestimmung des Brechungswinkels α_3 .

Man hat:

$$\mathfrak{E}'_2 \sin \theta = \mathfrak{E}'_3 \sin \alpha_3$$

$$\varepsilon_2 \mathfrak{E}'_2 \cos \theta = \varepsilon_3 \mathfrak{E}'_3 \cos \alpha_3$$

$$\text{Somit:} \quad \text{tg } \theta \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \text{tg } \alpha_3$$

Durch dieses Beispiel wurde erläutert, unter welchen Verhältnissen die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ gültig war.

Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

Maschennetz-Sicherungen ¹⁾.

621.316.923

Weitgehende Vermaschung der Niederspannungsverteilnetze bringt grosse Vorteile. Diesen stehen jedoch als Nachteil die Vergrösserung der Kurzschlußströme nicht nur in Stationsnähe, sondern im ganzen Verteilnetz, und die Schwierigkeit selektiver Abschaltung schadhafter Netzteile gegenüber.

1. Bisher verwendete Sicherungen.

Bisher wurden zum Schutz von Wechselstrom-Niederspannungsnetzen zumeist Schmelzleiter in Form von Blechstreifen oder Drähten, eingesetzt in Schraubverbindungen oder Griffhalter, verwendet. Diese wurden auf Tafeln vereinigt und in Kabelnetzen oft in die Kabelabzweigkasten unter dem Strassenpflaster mit Deckel und Wasserglocke montiert. Da die BEWAG (Berliner städtische Elektrizitätswerke A.-G.) beabsichtigt, ihre Netze zu vermaschen, wurden vorerst Kurzschlussversuche mit handelsüblichen Sicherungen gemacht. Bei den offenen Schmelzstreifen zeigten sich bei der Abschaltung hoher Ströme starke Lichtbögen, die lange stehen blieben. Versuche an 200-A-Schmelzstreifen mit 20 000 A und 380 V ergaben bei einem nach 5 ms auftretenden Lichtbogen eine Lichtbogendauer von 0,13 s. Eigentliche Stehlichtbögen wurden jedoch erst beim Ubergreifen auf benachbarte Phasen beobachtet, womit dann aber ein Weitergreifen der Störung auf primär nicht betroffene Netzteile verbunden war.

¹⁾ Freiberger, Elektrizitätswirtschaft, 1931, Nr. 23, S. 651.

Die Gefahr dieses Ueberschlages ist weniger von der Grösse des Kurzschlußstromes als von der verdampften Metallmenge, d. h. vom Querschnitt des Schmelzstreifens abhängig.

Bei Verwendung guter Isoliermaterialien und bei zweckmässiger Konstruktion der Griffhalter, die insbesondere gegen Wegschleudern durch die bei heftigen Kurzschlüssen auftretenden elektrodynamischen Kräfte gesichert werden müssen und keine lockern Verbindungen aufweisen dürfen, können, wenn für feuersichere Phasentrennung gesorgt ist und den Lichtbogengasen freier Abzug gewährt wird, von 1000-A-Sicherungen Kurzschlüsse bis 30 000 A sicher abgeschaltet werden. In Kabelkästen bedingt jedoch diese Phasentrennung kostspielige Aenderungen oder gar Neukonstruktionen, die in bestehenden Netzen schwer einzubauen sind. Andererseits ist es schwierig, den Gasen freien Abzug zu gewähren; sie führen sogar nicht selten zu eigentlichen Explosionen der Kabelkasten, die infolgedessen den Strassenverkehr gefährden.

2. Verzicht auf die Absicherung, Ausbrennen der Fehlerstelle.

In amerikanischen Großstädten verzichtet man demzufolge heute überhaupt auf jede Absicherung der Verteilnetze und lässt bei Störungen die Fehlerstelle durch den Strom selbst ausbrennen ²⁾. Versuche der BEWAG ergaben,

²⁾ Aemmer, Die zukünftige Energieverteilung in New-York, Bull. SEV 1931, Nr. 2, S. 44.