

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 23 (1932)
Heft: 21

Artikel: Zeigerinstrumente für Schwebungsmethoden
Autor: Laible, Th.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059344>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zeigerinstrumente für Schwebungsmethoden.

Von Th. Laible, dipl. Ing., Zürich.

621.317.712:621.317.313

Nach einer kurzen Uebersicht über die Anwendungen des Schwebungsprinzips für Zwecke der elektrischen Messtechnik wird die Theorie der elektrodynamischen Instrumente entwickelt und daraus Schlüsse für deren Verwendungsmöglichkeit zu Schwebungsmessungen gezogen.

Après avoir donné un bref aperçu des applications du principe des battements aux mesures électriques, l'auteur développe une théorie des instruments électrodynamiques et en tire des conclusions sur les possibilités d'utilisation de ces instruments pour des mesures par la méthode des battements.

Prinzip und Anwendung der Schwebungsmethoden.

Die sogenannten Schwebungsmethoden beruhen auf der Ueberlagerung von Schwingungen mit verhältnismässig geringem Frequenzunterschied. Dabei entsteht eine Differenzschwingung oder Schwebung mit dieser kleinern Frequenz, die häufig einen bequemeren Nachweis des ursprünglichen Schwingungsvorganges gestattet als eine direkte Messung bei der höhern Frequenz. Die verbreitetste Anwendung dieses Prinzips ist der Ueberlagerungs-empfang der Radiotechnik.

Im folgenden seien die mir bekannten messtechnischen Anwendungen dieses Prinzips zusammengestellt:

Frequenzmessung: Die Messung einer hohen Frequenz wird zurückgeführt auf die Messung einer bedeutend tieferen Frequenz, indem der zu messenden eine nur wenig verschiedene «Normalfrequenz» (z. B. diejenige eines Quarzoszillators) überlagert wird¹⁾.

Messung von kleinen Induktivitäten und Kapazitäten: Zwei gleiche Schwingungskreise, bestehend aus Kapazität und Induktivität, werden von einem Generator mit ihrer Resonanzfrequenz in möglichst loser Kopplung erregt. Schaltet man in den einen der beiden Kreise die zu messende Induktivität oder Kapazität ein, so wird seine Resonanzfrequenz entsprechend geändert. Zwischen den Strömen der beiden Kreise erhält man eine Schwebung, deren Frequenz direkt ein Mass für die zu messende Grösse ist. Ist die Schwebungsfrequenz noch zu hoch, um direkt gemessen zu werden, so kann sie durch nochmalige Anwendung des Ueberlagerungsprinzips auf eine kleinere zurückgeführt werden²⁾.

Abgleichung von Wechselstrombrücken: Da sich niedrige Frequenzen z. B. mit dem Vibrationsgalvanometer leichter nachweisen lassen als hohe, ist es manchmal von Vorteil, bei der Abgleichung von Wechselstrombrücken dem Brückenstrom einen Hilfsstrom wenig verschiedener Frequenz zu überlagern und das Verschwinden der entstehenden Schwebung als Kriterium für die Abgleichung zu benutzen. Bei genügend kleiner Frequenzdifferenz lässt sich das Vibrationsgalvanometer durch ein dynamometrisches Instrument ersetzen, bei dem z. B. die feste Spule mit dem Hilfsstrom, die bewegliche mit dem Brückenstrom gespeist wird³⁾.

Direkte Kurvenanalyse: Ueberlagert man einer verzerrten Wechselspannungs- oder Wechselstromkurve eine Sinuskurve variabler Frequenz, so wird man jedesmal dann eine Schwebung erhalten, wenn man einer Harmonischen der verzerrten Kurve genügend nahekommt. Aus der Amplitude der Schwebung lässt sich die Grösse der betreffenden Oberwelle ermitteln^{4) 5)}. Auf diesem Prinzip beruhende Kurvenanalysatoren werden fertig zusammengebaut von den Firmen Tinsley & Co⁶⁾, London, und Siemens & Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt, in den Handel gebracht.

Theorie der dynamischen Instrumente.

Bezeichnungen:

ϑ	Ausschlag des Instrumentes
Θ	Trägheitsmoment des Systems
k_d	Dämpfungskonstante
k_f	Federkonstante
$M(\vartheta)$	Koeffizient der gegenseitigen Induktion zwischen fester Spule 1 und beweglicher Spule 2
i_1	Strom in der festen Spule 1
i_2	Strom in der beweglichen Spule 2

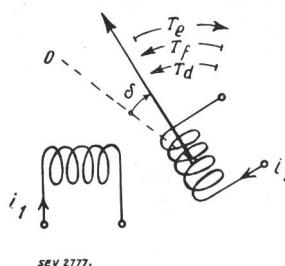


Fig. 1.

Zur Bewegungsgleichung der elektrodynamischen Instrumente.

Die Bewegungsgleichung des Systems (siehe Fig. 1) lautet allgemein:

$$\Theta \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \sum T \quad (1)$$

wobei $\sum T$ die Summe aller Drehmomente bedeutet, die auf das System wirken. Diese sind:

1. das elektrodynamische Drehmoment

⁴⁾ Des Coudres, ETZ 1900, S. 752/770; W. Jäger, El. Messtechnik; P. T. Coe, Rev. Gen. de l'El. 1926, S. 203; T. Laible und E. Bindler, Bull. SEV 1930, Nr. 11, S. 365.

⁵⁾ Die übrigen hier erwähnten Methoden sind mir erst nachträglich zur Kenntnis gekommen. Es wurde daher in der ersten Veröffentlichung die ganze Methode als neu vermutet, während dies nur für die Art des Schwebungsnachweises mit Hilfe eines dynamischen Voltmeters zutrifft.

⁶⁾ Journ. Scient. Instr. 1928, S. 320.

¹⁾ Proc. Inst. Radio Eng. 1929, S. 24.

²⁾ L. Pungs und G. Preuner, Phys. Zeitschr. 1919, S. 543. K. Niemeyer, Phys. Zeitschr. 1930, S. 451, und weitere Literatur in: Blüh, Phys. Zeitschr. 1926, S. 240.

³⁾ W. Jäger, Elektrische Messtechnik, Leipzig 1917.

$$T_e = i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM(\vartheta)}{d\vartheta} \quad (2)$$

das von der festen auf die bewegliche Spule ausgeübt wird. Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall, wo

$$\frac{dM(\vartheta)}{d\vartheta} = K = \text{konst.}$$

was sich durch passende Formgebung und Anordnung der Spulen erreichen lässt. Dann haben wir:

$$T_e = K \cdot i_1 \cdot i_2 \quad (3)$$

2. das rücktreibende Federmoment:

$$T_f = -k_f \cdot \vartheta \quad (4)$$

3. das bremsende Dämpfungsmoment:

$$T_d = -k_d \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad (5)$$

Damit wird aus Gl. (1):

$$\Theta \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + k_d \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + k_f \cdot \vartheta = K \cdot i_1 \cdot i_2 \quad (6)$$

Wir betrachten nun folgende beiden Fälle, die für die hier besprochene Anwendung wichtig sind.

a) Spule 1 wird von einem Strom

$$i_1 = I_{1\max} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \quad (7)$$

und Spule 2 von einem Strom

$$i_2 = I_{2\max} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi) \quad (8)$$

durchflossen. Dann wird:

$$\begin{aligned} T_e &= K \cdot i_1 \cdot i_2 \\ &= K \cdot I_{1\max} \cdot I_{2\max} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi) \\ &= \frac{K \cdot I_{1\max} \cdot I_{2\max}}{2} \cdot \left(\cos[(\omega_2 - \omega_1) \cdot t + \varphi] \right. \\ &\quad \left. + \cos[(\omega_2 + \omega_1) \cdot t + \varphi] \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Setzt man hierin

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, I_{1\max} = \frac{U_{\max}}{R}, I_{2\max} = I_{\max}$$

so hat man den Fall des gewöhnlichen Wattmeters.

b) Spule 1 und Spule 2 seien in Serie geschaltet und von einem Strom

$$i = I_{1\max} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + I_{2\max} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi) \quad (10)$$

durchflossen, der die Summe zweier gewöhnlicher Wechselströme verschiedener Frequenz ist. Diese Schaltung ist bei den dynamischen Volt- und Amperemetern vorhanden. Es ist jetzt $i_1 = i_2 = i$, also

$$\begin{aligned} T_e &= K \cdot i^2 = K \cdot \left(I_{1\max}^2 \cdot \cos^2(\omega_1 \cdot t) \right. \\ &\quad \left. + 2I_{1\max} \cdot I_{2\max} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi) \right. \\ &\quad \left. + I_{2\max}^2 \cdot \cos^2(\omega_2 \cdot t + \varphi) \right) \\ &= K \cdot \left(\frac{I_{1\max}^2 + I_{2\max}^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + I_{1\max} \cdot I_{2\max} \cdot \cos[(\omega_2 - \omega_1) \cdot t + \varphi] \right. \\ &\quad \left. + I_{1\max} \cdot I_{2\max} \cdot \cos[(\omega_2 + \omega_1) \cdot t + \varphi] \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_{1\max}^2}{2} \cdot \cos(2\omega_1 \cdot t) + \frac{I_{2\max}^2}{2} \cdot \cos(2\omega_2 \cdot t + \varphi) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Die rechte Seite der Gl. (6) besteht also in beiden Fällen aus einer Reihe von Cosinusfunktionen. Es genügt daher die Lösung der Gleichung:

$$\Theta \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + k_d \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + k_f \cdot \vartheta = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (12)$$

zu kennen. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\nu = \sqrt{\frac{k_f}{\Theta}} = \text{Scheinfrequenz}^{\text{7)}} \text{ des Systems} \quad (13)$$

$$\eta = \frac{\omega}{\nu} = \text{Frequenzmass} \quad (14)$$

$$\delta = \frac{k_d}{2\sqrt{\Theta \cdot k_f}} = \text{Dämpfungszahl des Systems} \quad (15)$$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{2\eta \cdot \delta}{1 - \eta^2}\right) = \text{Phasennacheilung der Zeigerschwingung gegenüber der erzwungenen Schwingung} \quad (16)$$

$$a(\eta, \delta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\eta^2(1 - 2\delta^2) + \eta^4}} = \text{Amplitudenfunktion} \quad (17)$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet die allgemeine Lösung von Gl. (12):

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{A}{k_f} \cdot a(\eta, \delta) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi - \gamma) \\ &\quad + e^{-\delta \cdot \nu \cdot t} \cdot K' \cdot \cos(\nu \cdot \sqrt{1 - \delta^2} \cdot t + \alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

Das zweite Glied von Gl. (18) stellt den freien Einschwingungsvorgang dar, dessen Konstanten K' und α von den Anfangsbedingungen abhängen. Uns interessiert im weiteren nur die stationäre Schwingung, die durch das erste Glied dargestellt wird. In Fig. 2 und 3 ist die Abhängigkeit der Amplituden-

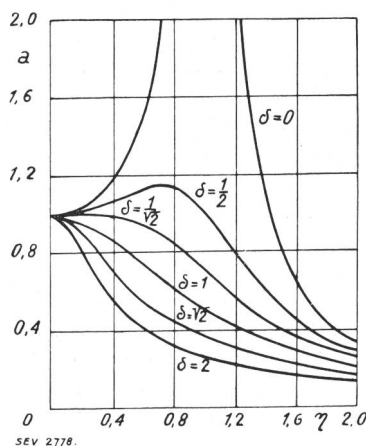


Fig. 2.
Amplitudenfunktion
 $a(\eta, \delta)$.

funktion und der Phasennacheilung vom Frequenzmass und der Dämpfungszahl veranschaulicht. Man ersieht aus ihnen, dass die Amplitudenfunktion

⁷⁾ Die üblicherweise angegebene Eigenfrequenz ω_0 des Instrumentes hängt mit den hier benutzten Größen zusammen durch $\omega_0 = \nu \cdot \sqrt{1 - \delta^2}$.

mit wachsendem Frequenzmass rasch abnimmt, besonders bei höheren Dämpfungszahlen. Für Dämpfungszahlen kleiner als $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$ weist $a(\eta, \delta)$ bei

$$\eta_0 = \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

ein Maximum auf von der Grösse

$$a_{\max} = \frac{1}{2\delta}$$

Um einen Anhaltspunkt über die bei normalen Instrumenten vorkommenden Werte von ν und δ zu geben, sind in Fig. 4 die experimentell aufge-

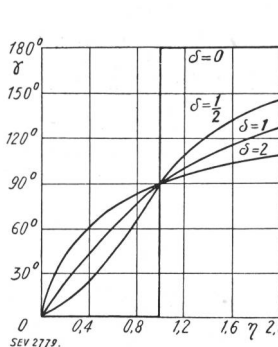


Fig. 3.

Phasennacheilung
 $\gamma(\eta, \delta)$.

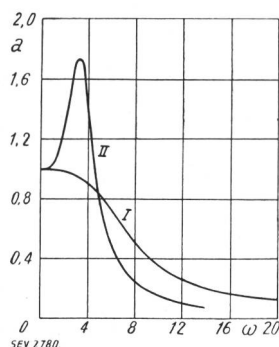


Fig. 4.

I Präzisionswattmeter.
II Dynamisches Voltmeter.

nommenen Kurven $a(\omega)$ für ein modernes Präzisionswattmeter (I) und ein älteres dynamisches Voltmeter (II) dargestellt. Aus ihnen folgt:

für Instrument I:

$$\nu = 6,2, \quad \delta = 0,7, \quad a_{50} = 0,00039$$

für Instrument II:

$$\nu = 3,6, \quad \delta = 0,3, \quad a_{50} = 0,00013$$

Nach Keinath⁸⁾ liegt für gute Instrumente δ zwischen 0,7 und 0,8.

Sind in den beiden oben betrachteten Fällen a) und b) die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 nur wenig verschieden, also:

$$\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \ll \nu$$

während ω_1 und ω_2 selber erheblich grösser als die Scheinfrequenz ν des Instrumentes sind, wird nach obigem

$$a(\delta\omega) \sim 1, \quad a(2\omega_1), \quad a(2\omega_2), \quad a(\omega_1 + \omega_2) \ll 1$$

Der Zeiger des Instruments führt daher im wesentlichen Schwingungen mit der Frequenz $\delta\omega$ aus. Der Ausschlag wird

im Falle a):

$$\delta = \frac{K \cdot I_{1\max} \cdot I_{2\max}}{2k_t} \cdot a \cdot \left(\frac{\delta\omega}{\nu}, \delta \right) \cdot \cos(\delta\omega \cdot t + \varphi - \gamma) \quad (19)$$

⁸⁾ G. Keinath, Die Technik der elektrischen Messgeräte, München und Berlin 1921.

im Falle b):

$$\delta = \frac{K}{k_t} \cdot \left(\frac{I_{1\max}^2 + I_{2\max}^2}{2} \right) + \frac{K \cdot I_{1\max} \cdot I_{2\max}}{2k_t} \cdot a \cdot \left(\frac{\delta\omega}{\nu}, \delta \right) \cdot \cos(\delta\omega \cdot t + \varphi - \gamma) \quad (20)$$

Die vernachlässigbaren Beiträge der übrigen Glieder des dynamischen Drehmomentes und der abklingende Beitrag des Einschaltvorganges sind in den Formeln (19) und (20) bereits weggelassen. Für das oben genannte Wattmeter mit $\nu = 6,4$ und $\omega_1 \sim \omega_2 \sim 314$ ($f = 50$ Per./s) wird beispielsweise der Beitrag des zweiten Gliedes von Gl. (9)

$$a = 0,0001$$

also 0,01 % desjenigen des ersten Gliedes. Die Vernachlässigung ist daher wohl gerechtfertigt.

Für die Verwendung der Instrumente zu Messungen nach Schwebungsmethoden soll der Ausschlag möglichst wenig frequenzempfindlich sein, da sich bei grossen Frequenzen ω_1 und ω_2 die kleine Differenz $\delta\omega$ schwer genau konstant halten lässt. $a(\omega)$ soll also bis zu möglichst grossen $\delta\omega$ wenig von 1 abweichen. Aus Fig. 2 lässt sich ersehen,

dass ein Instrument mit $\delta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder noch etwas kleiner dieser Forderung am besten entspricht.

Für die zweckmässigste Wahl der Frequenz ν ergeben sich folgende beiden Gesichtspunkte:

1. Das Instrument soll für normale Wechselstrommessungen brauchbar sein, d. h. die Zeigerschwingungen dürfen bei $\omega = 314$ ($f = 50$ Per./s) keinen die Ablesung störenden Betrag erreichen. Als Grenze des zulässigen kann ungefähr angenommen werden: $a = 0,001$. Damit folgt aus (17) (mit $\delta = 0,7$): $\eta = 31,6$, also

$$\nu = \frac{2\omega}{\eta} = 20$$

Ueber diesen Wert hinaus soll man also auf keinen Fall gehen.

2. Der Ausschlag soll bis zu jenen Schwebungsfrequenzen $\delta\omega$, bei denen er überhaupt noch genau abgelesen werden kann, richtig sein, d. h. bei $\delta\omega = 6,3$ ⁹⁾ um höchstens 1 % vom Sollwert abweichen. Mit $a = 0,99$ und $\delta = 0,7$ folgt aus (17): $\eta = 0,3775$, also

$$\nu = \frac{\delta\omega}{\eta} = 16,6$$

Man findet also als geeignete Scheinfrequenz $\nu = 17$ bis 20, der bei der günstigsten Dämpfung von $\delta = 0,7$ eine Eigenfrequenz

$$\omega_0 = 12 \text{ bis } 14$$

entspricht.

⁹⁾ Dies entspricht der Annahme, dass die Grenze für gute Ablesbarkeit bei einer Schwingungsdauer von ca. 1s liegt.

Dieser Wert liegt etwas höher als bei üblichen Instrumenten. Er erfordert ein leichtes System, um Θ klein zu halten. Eine Vergrößerung von k_i ist nur in engen Grenzen möglich, da sie auch ein entsprechend erhöhtes dynamisches Moment erfordert.

Dieses lässt sich nur durch Vergrößerung von $\left(\frac{dM}{d\vartheta}\right)$ also Erhöhung der Windungszahl und damit Gewichtszunahme des Systems erreichen.

Handelt es sich nur um die Messung der Frequenz oder die Verwendung als Nullinstrument, so kann $\delta\omega$ ohne Schaden bedeutend grösser werden als oben angenommen. Denn hier handelt es sich nur darum, die Ausschläge überhaupt wahrzunehmen, während ihre absolute Grösse nebensächlich ist. Dazu sind sie aber, wie sich aus Fig. 2 entnehmen lässt, bei $\eta = 1$ bis 1,5, also $\delta\omega = 20$ bis 30, noch genügend gross.

Ueber das Verhältnis zwischen dem integralen und dem differentialen Biot-Savartschen Gesetz.

Von Prof. Dr. H. Greinacher, Bern.

Es wird gezeigt, dass das Biot-Savartsche Elementargesetz eindeutig aus dem Integralgesetz unter der einzigen Annahme folgt, dass ein Stromelement in seiner eigenen Richtung keine magnetische Wirkung ausübt. Der Zusammenhang zwischen beiden Gesetzen lässt sich anschaulich machen. Das Integralgesetz stellt nicht die Summation über die Wirkung von Stromelementen, sondern über die von Elementarstromkreisen dar.

L'auteur montre que la loi élémentaire de Biot-Savart découle directement de la loi intégrale, en admettant uniquement qu'un courant élémentaire n'exerce aucune influence magnétique dans sa propre direction. Il est possible de mettre en évidence les rapports entre les deux lois. La loi intégrale ne représente pas une sommation de l'effet de courants, mais de circuits élémentaires.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes berechnet sich in bekannter Weise für das von einem geschlossenen Stromkreis herrührende magnetische Feld der Ausdruck

$$\mathfrak{H} = \oint \frac{I \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2} \quad (1)$$

Da wir nur geschlossene galvanische Ströme kennen, so ist damit das Verfahren zur Berechnung von $\mathfrak{H}$ eindeutig gegeben, und es erscheint vom praktischen Standpunkt aus missig, nach dem Elementargesetz der magnetischen Wirkung zu fragen. Auch vom Standpunkt der «Nahwirkungstheorie» kann eine solche Frage nicht gestellt werden, da ein solches Elementargesetz sich eben als Fernwirkungsgesetz darstellt. Immerhin wird man nicht darauf verzichten wollen, dem Coulombschen Gesetz ein analoges elektromagnetisches Gesetz an die Seite zu stellen. Nur wird man sich dessen bewusst bleiben müssen, dass es sich dabei um einen für den Gebrauch bequemen und anschaulichen Ausdruck und nicht um eine die Tatsachen wirklich erfassende Beziehung zwischen physikalischen Grössen handelt.

In diesem Sinn darf der Ausdruck (1) so interpretiert werden, dass man jedem Stromelement dl den Beitrag

$$d\mathfrak{H} = \frac{I \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2} \quad (2)$$

zum Felde zuschreibt, d. h. man erhält das Biot-Savartsche Elementargesetz. Es gibt indessen keine theoretische und experimentelle Möglichkeit, dieses Differentialgesetz zu beweisen, da die Theorie nur das Integralgesetz und das Experiment nur geschlossene Ströme liefert. Indessen ist seine Struk-

tur so durchsichtig und dem Coulombschen Gesetz so ähnlich, dass kein Bedürfnis nach einem anderen Elementargesetz vorliegt. Und doch liessen sich unendlich viele andere mit derselben Berechtigung aufstellen. Wie z. B. Chwolson in seinem Lehrbuch der Physik, 1908, Bd. IV, 1, S. 567, schon darauf hinweist, kann man statt des Ausdruckes (1) auch schreiben

$$\mathfrak{H} = \oint \frac{I \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2} + \oint F(r, \varphi) \cdot dl \quad (3)$$

wenn $F(r, \varphi)$ die Bedingung erfüllt, dass das geschlossene Integral gleich null ist. Das ist, wie leicht einzusehen, der Fall, wenn

$$F(r, \varphi) = I \cdot \cos \varphi \cdot F(r)$$

gesetzt wird. Es ist also auch

$$\mathfrak{H} = \oint I \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{r^2} + \cos \varphi \cdot F(r) \right) \cdot dl \quad (4)$$

Als Elementargesetz könnte daher jeder Ausdruck

$$d\mathfrak{H} = I \cdot dl \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{r^2} + \cos \varphi \cdot F(r) \right) \quad (5)$$

gelten, ohne dass man in Widerspruch mit der Erfahrung käme. Wenn man beispielsweise $F(r) = \frac{1}{r^2}$ setzt, würde man erhalten

$$d\mathfrak{H} = \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot dl \cdot \sin(\varphi + 45^\circ)}{r^2} \quad (6)$$

Dass (6) trotz der Aehnlichkeit mit (2) eine ganz andere Gesetzmässigkeit ausdrückt, ersieht man schon aus dem Spezialfall $\varphi = 0$. Nach (6) würde ein Stromelement in seiner Richtung eine