

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 30 (1939)
Heft: 11

Artikel: Ueber die Zahl der unabhängigen Einheiten in der Lehre von den elektromagnetischen Erscheinungen
Autor: Fischer, Johannes
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1060826>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 25.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Während die ersten beiden Definitionen auf Normalen (Etalons) beruhen, stellen die letzten beiden auf universelle Konstanten ab.

Aus der Gleichsetzung $H/M = P$ folgt $H = MP$, H hat somit jetzt die Dimension $L \cdot \mu$, ein Resultat, das ebenfalls erhalten wird, wenn die Dimensionen in gleicher Weise wie bei den andern Systemen ausgehend von der Beziehung $F = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{4 \pi r^2 \mu}$ im Zuge

der Definitionsgleichungen schrittweise der Reihe nach für alle Grössen abgeleitet werden. Der Uebergang von den magnetischen zu den elektrischen Grössen vollzieht sich über die Gleichungen 1 em oder 2 em (vergleiche Abschnitt: Geschlossenheit eines Maßsystems). Zum Schluss entsteht für ε die Dimension $L^{-2} T^{-2} \mu^{-1}$. Die Dimensionskontrolle mit dem Gesetz $\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0} = \frac{1}{c}$ beweist die Richtigkeit dieses Schlussresultats, indem sich μ heraushebt und eine reziproke Geschwindigkeit übrigbleibt.

Der Vergleich der Grössen B und H zeigt, dass sich diese beiden jetzt im Gegensatz zu früher in den Dimensionen, und zwar in μ unterscheiden, was schon 1930 von der Vollversammlung der CEI in Oslo gefordert wurde.

Mit der Einführung der vierten Dimension, welche das System eindeutig festlegt, ist es möglich, den Grössenvergleich der Einheiten mit den übrigen Systemen in einfacher Weise vorzunehmen und den erwähnten Widerspruch bei der Einheit H aufzuklären. Soll 1 H im Giorgi-System z. B. mit 1 H im QES-System verglichen werden, so ist zu bedenken, dass das QES-System, um es zu einem absolut festliegenden System zu machen, ebenfalls mit der Dimension μ zu ergänzen ist. Die μ -Einheit stimmt dort mit μ_0 (klassisch gerechnet), d. h. der Permeabilität des leeren Raumes überein. Im QES-System erhält 1 H somit die Grösse 1 Q μ_0 , was 10^9 cm $\cdot \mu_0$ ausmacht. Wenn nun für das Giorgi-System in $H = M \cdot P$ für $M = 10^2$ cm und $P = 10^7 \mu_0$ (ebenfalls klassisch gerechnet) eingesetzt wird, so entsteht auch hier 1 H = 10^9 cm μ_0 , womit die Gleichheit erwiesen ist. (Bei rationaler Rechnungsweise ist auf beiden Seiten noch der Faktor $1/4\pi$ zuzusetzen; die Gleichheit bleibt auch so erhalten.)

Die Grösse jeder Einheit in CGS-Einheiten ist beim Giorgi-System ebenfalls nach der schon beim

QES-System angegebenen Methodik zu finden, indem für $M = 10^2$, für $K = 10^3$, für $S = 10^0$ und für $P = 10^7$ gesetzt wird. 1 Volt z. B. = $1 M^{3/2} K^{1/2} S^{-2} P^{1/2} = 1 \cdot 10^2 \cdot 3/2 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \cdot 10^0 \cdot (-2) \cdot 10^7 \cdot 1/2$ CGS = 10^8 CGS-Einheiten. Bezüglich des Verhältnisses zwischen klassischen und rationalen Einheiten kann wieder auf das früher Gesagte verwiesen werden. Anhand der CGS-Grössen können die Verhältnisse zu den andern Systemen, insbesondere zum elektrostatischen System leicht berechnet werden.

Zum Schluss sollen auch mit dem Giorgi-System dieselben Kontrollen, wie bei den andern Systemen, anhand des Beispiels aus der Hochvakuumröhrenphysik durchgeführt werden, um auch auf diese Art die unzweideutige Geschlossenheit des neuen Systems zu erweisen.

Die Formel lautet:

$$I_a = \frac{8 \pi}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2 e}{m}} \frac{l}{r} U_a^{3/2}$$

Die Dimensionskontrolle ergibt Identität

$$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{-1/2} \equiv$$

$$L^{-2} T^2 \mu^{-1} \sqrt{\frac{L^{1/2} M^{1/2} \mu^{-1/2}}{M}} \cdot \frac{L}{L} (L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \mu^{1/2})^{3/2}$$

Die Einheitenkontrolle führt zur richtigen Grösse des Joule

$$A = F/M \sqrt{\frac{C}{K}} \frac{M}{M} V^{3/2}$$

$$A^2 = \frac{A^2 S^2}{M^2} \frac{C}{K} V \quad \left(\text{mit } F = \frac{A \cdot S}{V} \right)$$

$$CV = J = K \frac{M^2}{S^2}$$

$$J = 10^3 \text{ g} \frac{(10^2 \text{ cm})^2}{\text{s}^2} = 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-2} = 10^7 \text{ Erg}$$

Durch Einsetzen der einzelnen Zahlenwerte entsteht der richtige Zahlenwert in der Schlussgleichung

$$I_a = \frac{8 \pi}{9} \frac{10^{-9}}{36 \pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,59 \cdot 10^{-19}}{0,899 \cdot 10^{-30}}} \frac{l}{r} U_a^{3/2}$$

$$I_a = 1,465 \cdot 10^{-5} \frac{l}{r} U_a^{3/2} \quad (\text{Giorgi})$$

Ueber die Zahl der unabhängigen Einheiten in der Lehre von den elektromagnetischen Erscheinungen.

Von Johannes Fischer, Karlsruhe.

621.317.081

Befolgt man die Lehren Maxwells, so hat man in dem System der elektromagnetischen Gleichungen genau vier Grössen mehr, als Gleichungen vorhanden sind. Daher kann man vier Einheiten als Grundeinheiten unabhängig voneinander annehmen. Schreibt man die beiden Maxwellschen Gleichungen in dem sogenannten «Gaußschen absoluten» Maßsystem, so enthalten beide einen Faktor c , den Andronescu «Universalkonstante» nennt. Diese Grösse c steht in eindeutigen Zusammenhang mit der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, die eine bekannte Grösse ist. Daher ist c nicht eine unabhängige, sondern eine abgeleitete Grösse. Also wird durch sie die Zahl der unabhängigen Einheiten nicht vergrössert, diese bleibt vielmehr vier.

Si l'on s'en tient aux enseignements de Maxwell, le nombre des grandeurs contenues dans le système des équations électromagnétiques est supérieur de quatre au nombre des équations. On peut donc choisir quatre de ces grandeurs comme unités fondamentales indépendantes l'une de l'autre. Si l'on transcrit les deux équations de Maxwell dans le système dit absolu de Gauss, elles contiennent toutes les deux un facteur c que M. Andronescu nomme «constante universelle». Cette grandeur c est liée de façon précise à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, qui est une grandeur connue. C'est pourquoi c n'est pas une grandeur indépendante, mais une grandeur dérivée. Elle n'augmente donc pas le nombre des unités indépendantes qui reste quatre.

Kürzlich hat hier ¹⁾ P. Andronescu nochmals ²⁾ seinen Standpunkt vertreten, «dass die neuzeitliche Behauptung, man hätte ein Massystem nur mit 4 willkürlichen Einheiten, ein Irrtum ist, welcher darauf beruht, dass bedauerlicherweise die Universalkonstante c nicht Gemeingut der Ingenieure geworden ist... Die Zahl der willkürlichen Einheiten bleibt... unverändert, nämlich fünf.»

Diese letzte Behauptung, die natürlich aus der ersten folgt, steht sicher im Widerspruch dazu, dass wir in Technik und Physik heute immer mehr in dem bequemen System der vier willkürlichen (voneinander unabhängigen) Einheiten cm, s, V, A rechnen. Ferner haben die jüngsten Erörterungen und Festsetzungen der Generalkonferenz für Mass und Gewicht den Sinn gehabt, ja sie sind geradezu von der Tatsache als Voraussetzung ausgegangen, dass man zu den drei mechanischen Grundeinheiten genau eine weitere unabhängige Festsetzung treffen muss ³⁾, um die Einheiten aller elektrischen und magnetischen Grössen vollständig bestimmen zu können. Aber wir können und wollen gar nicht diese Erkenntnis als eine «neuzeitliche Behauptung» hinstellen; vielmehr hat schon Maxwell gewusst und ausgesprochen, dass man in der Elektrizitätslehre gerade vier voneinander unabhängige (willkürliche) Einheiten hat, er hat sogar zwei Beispiele gegeben für solche Massysteme mit vier unabhängigen Einheiten ⁴⁾. Nach ihm wurde diese Tatsache unter der Vorherrschaft der «absoluten» Massysteme in der Elektrizitätslehre wohl eine zeitlang wenig beachtet, später aber durch Autoritäten wie G. Giorgi ⁵⁾, G. Mie ⁶⁾, A. Sommerfeld ⁷⁾ und andere ins rechte Licht gerückt — mit dem Erfolg ihrer heutigen allgemeinen Anerkennung.

Wie hat nun Andronescu die Zahl der voneinander unabhängigen Einheiten in der Elektrizitätslehre festgestellt? Auf die gleiche Weise, wie Maxwell diese Anzahl gefunden hat, nämlich durch Vergleich der Zahl der in den Grundgleichungen vorkommenden Grössen mit der Zahl der zwischen

diesen bestehenden, durch Gleichungen ausgedrückten Beziehungen ⁸⁾. So viele Grössen mehr vorhanden sind als Gleichungen, so viele Einheiten können offenbar unabhängig voneinander gesetzt werden. Die Zahl der unabhängigen Grössen ist aber bei Andronescu um eins grösser als bei Maxwell, nämlich um die «Universalkonstante c ».

Sollten nun Maxwell, Giorgi, Mie, Sommerfeld und viele andere, sollten die Fachleute aller Kulturländer in der Generalkonferenz versehentlich die «Universalkonstante» unbeachtet gelassen haben und dadurch auf die Zahl vier gekommen sein? Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von der von Andronescu angegebenen Zusammenstellung elektromagnetischer Grundgleichungen aus (1938, S. 298). Die «Universalkonstante c » tritt dort nur in den beiden Grundgleichungen der Elektrodynamik auf, die in der erwähnten Tabelle in ihrer Integralform als Durchflutungs- und als Induktionsgesetz geschrieben sind:

$$c \oint \mathfrak{H} dl = \Sigma I, \quad c \oint \mathfrak{E} dl = -\partial \Phi / \partial t.$$

Da erhebt sich zunächst die naive Frage, warum die Konstante c in beiden Gleichungen dieselbe ist: hätte man zwei verschiedene Konstanten

$$c_1 \oint \mathfrak{H} dl = \Sigma I, \quad c_2 \oint \mathfrak{E} dl = -\partial \Phi / \partial t,$$

so würden doch wohl nach diesem Gedankengang folgerichtig die willkürlichen Einheiten in ihrer Anzahl nochmals um eine vermehrt werden, und so weiter mit jedem weiteren Koeffizienten. Die Antwort hierauf ist anderwärts gegeben ⁹⁾, es genügt hier, darauf hinzuweisen, dass tatsächlich die Konstante in beiden Grundgesetzen die gleiche sein kann. Die übrig bleibende Kardinalfrage lautet daher: unter welcher Bedingung halten wir einen Koeffizienten in einer Gleichung zwischen physikalischen Grössen für notwendig? Sie lässt sich vom Einheitenstandpunkt aus leicht beantworten: ein Koeffizient steht mit Sicherheit immer dann, wenn die Einheiten der Grössen beiderseits vom Gleichheitszeichen unabhängig voneinander und unabhängig von der Gleichung festgelegt sind ¹⁰⁾.

Beispiele: Die Beziehung zwischen Kraft F , Masse m und Beschleunigung d^2s/dt^2 ist allgemein mit dem Faktor f zu schreiben als

$$F_s = f \cdot m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (1)$$

falls die Einheiten für Kraft, Masse, Weg und Zeit

⁸⁾ Betrachtungen zu diesen siehe Verf., wie Anm. 3, S. 338.

⁹⁾ Verf., Z. Phys. Bd. 100 (1936), S. 360, bes. S. 365. — Verf., Einführung in die klassische Elektrodynamik, Berlin 1936, S. 172. Die Gleichheit ist nur möglich, nicht notwendig: Systeme mit verschiedenen Konstanten an diesen Stellen siehe F. Emde, Z. phys. u. chem. Unterr. Bd. 48 (1935), S. 145, Verf. Phys. Z. Bd. 36 (1935), S. 914.

¹⁰⁾ R. T. Birge, Am. Phys. Teacher Bd. 3 (1935), S. 102, 171; Verf., wie Anm. 3, S. 337, Elektrodynamik S. 180.

¹⁾ Bull. SEV, Bd. 24 (1938), S. 297.

²⁾ Zuerst in: Arch. Elektrotechn. Bd. 30 (1936), S. 48.

³⁾ Es sei an die beiden dort erörterten Vorschläge erinnert: neben cm, g, s als viertes Festlegung eines Widerstandes (1 Ohm; Giorgi) oder einer Spule (μ_0). — Vgl. die zusammenfassende Darstellung des Verf., Phys. Z., Bd. 38 (1937), S. 336.

⁴⁾ J. C. Maxwell, Treatise, Art. 620—624. — Dass man durch jede willkürliche Vorschrift über den Zusammenhang von Einheiten die Zahl der unabhängigen Einheiten um Eins vermindert, hat Maxwell hier schon ausgesprochen; durch eine solche Einheitenvorschrift kommt man auf die berühmte Zahl der drei unabhängigen Einheiten, die den verschiedenen sogenannten «absoluten» Maßsystemen der Elektrizitätslehre zu Grunde liegt. Auch in der Mechanik kann man durch willkürliche Einheitenbeziehungen die Zahl der drei Grundeinheiten vermindern. Eine diesbezügliche Uebersetzung findet man z. B. bei H. Helmholtz, Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 17 (1883), S. 44.

⁵⁾ G. Giorgi, Atti dell'AEI, 1901.

⁶⁾ G. Mie, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Stuttgart 1912; Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 11/1, Leipzig 1932, mit ausführlicher theoretischer Grundlegung dieses Systemes.

⁷⁾ A. Sommerfeld, Z. techn. Phys. Bd. 16 (1935), S. 420.

alle vier unabhängig voneinander und von dieser Gleichung festgelegt sind, dagegen in der Form

$$F_s = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (2)$$

wenn für die vorkommenden vier Grössen nur drei unabhängige Einheiten zum voraus festgelegt sind; diese Gleichung definiert damit die vierte Einheit als «abgeleitete Einheit»^{10a)}.

Die Beispiele lassen sich beliebig vermehren, es soll nur noch eines angeführt werden: Die elektromagnetischen Gleichungen sind von Andronescu im wesentlichen in der Form beschrieben, die dem sogenannten «Gaußschen absoluten System» zugehört. In diesem System wird, wie man weiss, angenommen, dass die elektrischen und die magnetischen Einheiten unabhängig voneinander festgesetzt werden. Die Folge davon ist das Auftreten des Koeffizienten c an den Stellen, wo elektrische und magnetische Grössen einander beiderseits eines Gleichheitszeichens gegenüberstehen, also in den beiden Grundgesetzen. Die Schreibweise des Gaußschen Systemes stimmt also mit unserer Erklärung vom Auftreten von Koeffizienten durchaus überein. Auch wenn man für den leeren Raum schreibt $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$ setzt, so will man mit der «elektrischen Konstanten» ε_0 und der «magnetischen Konstanten» μ_0 im allgemeinen nichts weiter ausdrücken, als dass es für das elektrische Feld zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren der Messung und daher der Darstellung durch Feldvektoren gibt, und ebenso für das magnetische Feld¹¹⁾.

Derartige Koeffizienten kann man nun ungefähr so viele haben als Gleichungen, wenn man nur hinreichend viel unabhängige Festsetzungen trifft. Dies ist aber nicht im Sinne der Theorie. In ihrem Streben nach Einfachheit sucht sie mit einer Mindestzahl auszukommen, die sie dadurch gewinnt, dass sie Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten aufsucht. Dass in den elektromagnetischen Grundgleichungen, wenn ihre Darstellung allgemein gültig sein will, zwei Koeffizienten, z. B. ε_0 und μ_0 notwendig sind, ist gegenwärtig allgemein anerkannt: auch Andronescu benutzt ja diese beiden Koeffi-

zienten. Er hat aber noch den Koeffizienten c . Als letzte Frage bleibt darum: *Ist die «Universalkonstante c » eine unabhängige Grösse, oder kann sie durch die elektromagnetische Theorie in irgendeine Beziehung zu anderen Koeffizienten gesetzt werden?* Zur Beantwortung schreiben wir die beiden elektrodynamischen Grundgesetze in der von Andronescu gewählten, c enthaltenden Schreibweise, aber in der Differentialform, indem wir für den leeren Raum ε_0 statt ε und μ_0 statt μ setzen:

$$c \cdot \text{rot } \mathfrak{H} = \varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}}, \quad c \cdot \text{rot } \mathfrak{E} = -\mu_0 \dot{\mathfrak{H}}. \quad (3)$$

Aus ihnen folgt aber in bekanntem Rechnungsgang mit

$$\text{div } \mu_0 \mathfrak{H} = 0, \quad \text{div } \varepsilon_0 \mathfrak{E} = 0$$

für jeden Feldvektor die Differentialgleichung

$$\frac{c^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \Delta \mathfrak{H} = \ddot{\mathfrak{H}}; \quad \frac{c^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \Delta \mathfrak{E} = \ddot{\mathfrak{E}}. \quad (4)$$

Sie ist die Wellengleichung; die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im leeren Raum c_0 ist also

$$c_0 \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

und es ist eines der bekannten Hauptergebnisse der elektromagnetischen Theorie, dass c_0 die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, also eine bekannte Grösse ist. *Die Universalkonstante c ist daher durch*

$$c = c_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (6)$$

zu anderen Grössen in Beziehung gesetzt; sie ist also dann nicht mehr eine unabhängige Grösse, wenn man das in der Identität (5) ausgesprochene Ergebnis der Maxwellschen Theorie anerkennt. Es kann nicht deutlich genug hervorgehoben werden, dass die Bewertung von c als einer unabhängigen Grösse — ganz unabhängig von ihrem Vorkommen oder Fehlen in den elektromagnetischen Gleichungen — gleichbedeutend ist mit einer willkürlichen Vernachlässigung des Ergebnisses der elektromagnetischen Lichttheorie. Ist aber die «Universalkonstante c » mit Hilfe der Theorie auf andere Grössen zurückgeführt, so zählt sie nicht mehr zu den unabhängigen Grössen, deren Zahl sie demnach auch nicht vermehren kann; vielmehr ist diese Anzahl nach unserer heutigen Kenntnis von den elektromagnetischen Erscheinungen, und unserer heutigen Ausdrucksweise dieser Kenntnis in Form von Gleichungen gerade vier, in Uebereinstimmung mit Maxwell und allen ihm folgenden.

Die Tatsache, dass c aus anderen Grössen abgeleitet werden kann, besteht gänzlich unabhängig davon, ob c in gewissen Gleichungen explizit geschrieben werden muss (wie im Gaußschen System), oder nicht. Sie hat auch mit der Messung, das heisst der zahlenmässigen Festlegung von c in bezug auf gewählte Einheiten, keinen Zusammenhang, denn es ist ja grundsätzlich gleichgültig, welche zwei Grössen in (6) man, bei bekannter Lichtgeschwindigkeit, als vorgegeben betrachten will, mit anderen

^{10a)} Zum Begriff der primitiven Einheiten und der abgeleiteten Einheiten siehe Verf., Phys. Z. Bd. 37 (1936), S. 120 bis 129, bes. S. 121—122. — Jede Theorie strebt natürlich darnach, derartige Faktoren, die auf keinerlei Weise physikalisch beeinflusst werden können, daher auch zu der in der betreffenden Gleichung ausgedrückten Aussage nichts beitragen, zu unbenannten Zahlen, nach Möglichkeit von der Grösse Eins, zu machen.

¹¹⁾ Gegenüber Einwendungen wie der, dass für die Mikrophysik ε_0 und μ_0 wenig Sinn hätten und daher für diese eines der alten «absoluten» Maßsysteme vorzuziehen sei, muss immer wieder darauf hingewiesen werden, dass niemand genötigt ist, ε_0 und μ_0 als Grundgrössen anzusehen. In ihrer Grösse unabhängig von jeder Einheitenwahl und daher wirkliche Naturkonstanten sind mit Sicherheit die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im leeren Raum c_0 und das Verhältnis Γ_0 der Beträge der elektrischen zur magnetischen Feldstärke dieser Welle. Aus diesen Naturkonstanten folgt aber $\varepsilon_0 = 1/c_0 \Gamma_0$, $\mu_0 = \Gamma_0/c_0$, die man also, wenn man will, als abgeleitete Grössen auffassen kann (F. Emde, wie Anm. 9, S. 146, Verf., Elektrodynamik, S. 139, 169, ferner wie Anm. 3, S. 341).

