Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 63 (1972)

Heft: 23

Artikel: Direkte Herleitung von zwei charakteristischen Gleichungen der Gleichstrommaschinen aus der Feldtheorie

Autor: Palit, B.B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915762

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

Direkte Herleitung von zwei charakteristischen Gleichungen der Gleichstrommaschinen aus der Feldtheorie

Von *B. B. Palit*

621.313.2 : 621.317.328

Zwei charakteristische Gleichungen der Gleichstrommaschinen, nämlich die induzierte Spannung und das elektromagnetisch entwickelte Drehmoment im Anker, werden in dieser Arbeit direkt aus einer der Maxwellschen Hauptgleichungen beziehungsweise der Lorentzschen Kraftgleichung hergeleitet.

Deux équations caractéristiques des machines à courant continu, celle de la tension induite et celle du couple développé électromagnétiquement dans l'induit, sont déduites par l'auteur directement de l'une des équations principales de Maxwell et de l'équation des forces de Lorenz, respectivement.

1. Einleitung

In den meisten Lehrbüchern über elektrische Maschinen beziehen sich die Erklärungen über die elektromagnetischen Wechselwirkungen in elektrischen Maschinen kaum auf die Grundlagen der Feldtheorie. Infolgedessen kommt es vor, dass man den Zusammenhang zwischen den Grundgleichungen der Feldtheorie und den charakteristischen Gleichungen der elektrischen Maschinen nicht kennt. Um die charakteristischen Gleichungen der elektrischen Maschinen aus den allgemeingültigen Feldgleichungen herzuleiten, müssen die letzteren zu diesem Zweck den elektromagnetischen Verhältnissen der elektrischen Maschinen angepasst werden. Es wird in dieser Arbeit versucht, zwei einfachste aber wichtigste Gleichungen der Gleichstrommaschinen, nämlich die induzierte Spannung und das elektromagnetisch erzeugte Drehmoment, aus der Maxwellschen bzw. der Lorentzschen Gleichung herzuleiten. Die Kenntnisse der Grundlagen der Vektoralgebra sowie der prinzipiellen Bau- und Funktionsweise der konventionellen Gleichstrommaschinen werden vorausgesetzt.

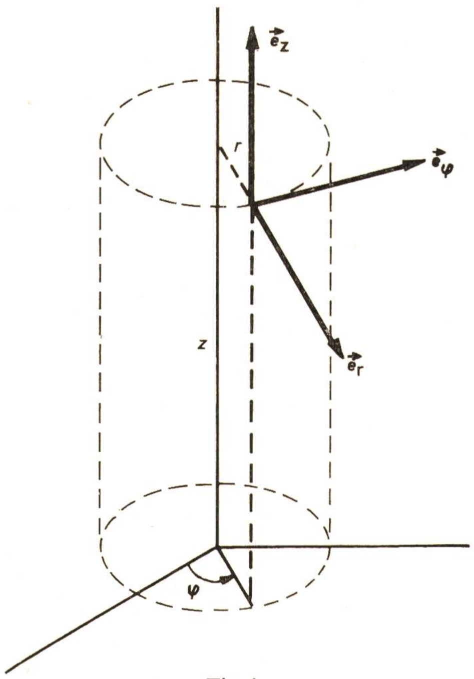

Fig. 1
Zylinderkoordinaten

2. Induzierte Spannung im Anker der Gleichstrommaschinen

Eine der Maxwellschen Hauptgleichungen der Elektrizitätstheorie lautet [1]:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

Der erste Term auf der rechten Seite weist auf die transformatorische und der zweite Term auf die rotatorische Spannung hin.

Man geht von dieser Maxwellschen Gleichung aus, um den Ausdruck für die induzierte Spannung im Anker der Gleichstrommaschinen herzuleiten. Dabei gelten folgende Buchstabensymbole:

$\boldsymbol{E}$ elektrische Feldstärke im Ankerleiter
$\boldsymbol{B}$ magnetische Flussdichte im Luftspalt
$\boldsymbol{v}$ Umfangsgeschwindigkeit des Ankers
∇ Nabla-Operator

In den Gleichstrommaschinen findet keine transformatorische Wirkung statt. Demzufolge reduziert sich Gl. (1) zu:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2}$$

Da die rotierenden elektrischen Maschinen im allgemeinen zylindrisch sind, lässt sich die analytische Behandlung im Zylinderkoordinatensystem vorteilhaft durchführen (Fig. 1).

Die in Fig. 1 verwendeten Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ und $\boldsymbol{e}_z$ sind so geordnet, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi &= \boldsymbol{e}_z \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_r \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r &= \boldsymbol{e}_\varphi \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Die Vektoren $\nabla, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ werden im Zylinderkoordinatensystem wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial_r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{E} &= E_r \boldsymbol{e}_r + E_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + E_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{v} &= v_r \boldsymbol{e}_r + v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + v_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{B} &= B_r \boldsymbol{e}_r + B_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + B_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{4}$$

In einer Gleichstrommaschine sind die aktiven Ankerleiter nur in z-Richtung vorhanden (Fig. 2). Deshalb gibt es nur eine

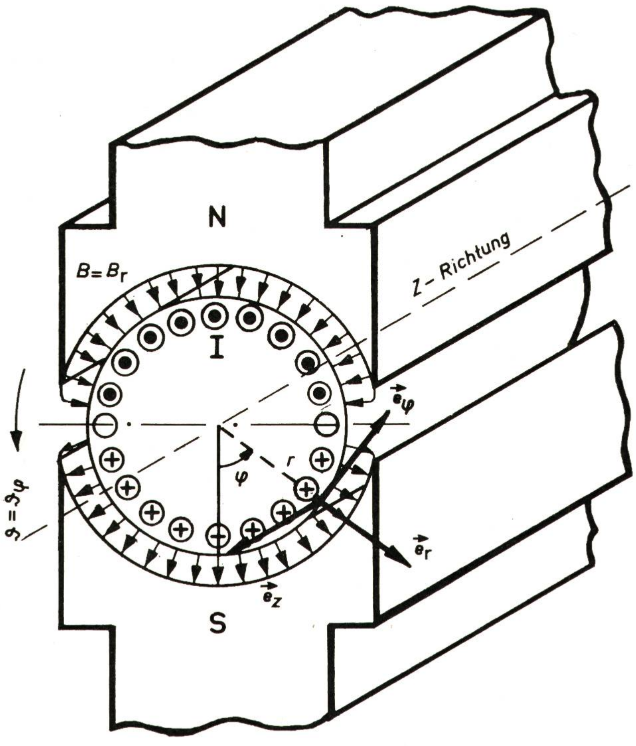

Fig. 2
Schematische Darstellung einer Gleichstrommaschine im Zylinderkoordinatensystem

einzige Komponente der elektrischen Feldstärke, die nun E_z ist. Die Umfangsgeschwindigkeit v des Ankers ist nur in Richtung der Koordinatenachse φ gerichtet. Die magnetische Flussdichte ist hingegen nur radial verteilt. Aus diesen Gründen können die Vektoren $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ bei einer Gleichstrommaschine wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= E_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{v} &= v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{B} &= B_r \boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{5}$$

Aus Gl. (4) und (5) folgt unter Verwendung der Gl. (3):

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \times E_z \boldsymbol{e}_z = \\ &= -\frac{\partial E_z}{\partial r}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{6}$$

Aus Gl. (4) und (5) folgt weiterhin unter Berücksichtigung von Gl. (3):

$$\begin{aligned} -\nabla \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} &= -\left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \times \\ \times (-v_\varphi B_r \boldsymbol{e}_z) &= -\left(v_\varphi \frac{\partial B_r}{\partial_r}\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{v_\varphi}{r}\cdot\frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_r\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Gemäss Gl. (2) ist Gl. (6) der Gl. (7) gleichzusetzen. Es ergibt sich dann:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_r = -v_\varphi \frac{\partial B_r}{\partial r}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{v_\varphi}{r}\cdot\frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_r \tag{8}$$

Aus Gl. (8) folgt eindeutig:

$$E_z = v_\varphi B_r \tag{9}$$

Die induzierte Spannung in einem Leiter der Länge l_z ist durch das Linienintegral der elektrischen Feldstärke über den Leiter gegeben. Die induzierte Spannung u_i lautet dann unter Berücksichtigung von Gl. (9) wie folgt:

$$u_i = \oint_{l_z} \boldsymbol{E}_z \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{l_z} E_z \, dl = v_\varphi B_r l_z \tag{10}$$

Die induzierte Spannung in $\frac{M}{2a}$-Leitern, verteilt über dem Ankerumfang einer Gleichstrommaschine, ist dann gemäss Gl. (10) wie folgt:

$$\begin{aligned} U_i &= u_i \frac{M}{2a} = B_r v_\varphi l_z \frac{M}{2a} = \frac{\Phi}{\tau_p l_z} \pi D n \frac{2p}{2p} l_z \frac{M}{2a} = \\ &= \frac{\Phi}{\tau_p l_z} \cdot \frac{\tau_p n l_z M \cdot 2p}{2a} = \frac{M n \Phi p}{a} \end{aligned} \tag{11}$$

Gl. (11) ist die bekannte Gleichung der induzierten Spannung im Anker der Gleichstrommaschinen [2]. Dabei sind die bei der Herleitung von U_i verwendeten Buchstabensymbole:

M Gesamtleiterzahl im Anker
$2a$ Anzahl Ankerzweige
$2p$ Polzahl
Φ Polfluss
τ_p Polteilung
l_z Ankereisenlänge, aktive Leiterlänge, Pollänge
n Drehzahl
D Ankerdurchmesser

3. Drehmoment im Anker der Gleichstrommaschinen

Aus der Feldtheorie ist bekannt, dass die elektrischen Ladungen sowohl in elektrischem als auch in magnetischem Feld den Krafteinwirkungen ausgesetzt sind. Die Lorentzsche Kraftgleichung gibt besonders den Betrag und die Richtung der elektromagnetischen Kraft an, die eine mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ bewegende Ladung q in einem elektrischen Feld der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und einem magnetischen Feld der Flussdichte $\boldsymbol{B}$ erfährt. Die elektromagnetische Kraft nach *Lorentz* lautet [3]:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{12}$$

$\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ beziehen sich auf ein ruhendes System. Nur die Ladung q bewegt sich im Feldraum mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ relativ zum ruhenden System. In den elektrischen Maschinen bewegen sich die Ladungen (Leiterstrom) durch die Leiter des Ankers, der selbst wiederum eine Umfangsgeschwindigkeit von $\boldsymbol{v}$ hat. Um genauer zu sein, soll nun $\boldsymbol{u}$ in Gl. (12) durch $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$ ersetzt werden, wobei $\boldsymbol{u}'$ die Geschwindigkeit der Ladungen im Leiter relativ zum drehenden Anker bedeutet. Gl. (12) wird dann folgende Form annehmen:

$$\boldsymbol{F} = q\,[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{B}] \tag{13}$$

In den elektrischen Maschinen ist die Bewegungsgeschwindigkeit der Ladungen im Innern der Leiter viel grösser als die Umfangsgeschwindigkeit des Ankers. Infolgedessen kann die relativistische Wirkung auf die Ladungen ausser acht gelassen werden. Weiterhin gibt es in den elektrischen Maschinen keine freien Ladungen und somit kein äusseres elektrisches Feld, welches die Ladungen elektrostatisch beeinflussen könnte. Es gilt dann:

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{14}$$

Auf der rechten Seite von Gl. (12), die nun für die Kraftberechnung in den elektrischen Maschinen gültig ist, bleibt somit nur noch der zweite Term. Die elektromagnetische Kraft auf eine Ladung q, die nur dem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$ ausgesetzt ist, lässt sich durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{15}$$

Es wird nun die Kraft auf einen Leiter der Länge l_z und des Querschnitts A berechnet. Die Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit im Leiter sei N, die Ladung der Ladungsträger sei q. Dann wird die gesamte auf den Leiter der Länge l_z ausgeübte Kraft durch

$$\boldsymbol{F} = A\,l_z\,N\,q\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{16}$$

beschrieben [4]. Da die Ladungsträger sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ im Leiter in Richtung der Leiterachse bewegen, kann Gl. (16) etwas gekürzt werden.

$$\boldsymbol{F} = A\,l_z\,N\,q\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = Q\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{17}$$

Q ist gleich der gesamten Ladung, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt A tritt. Mit I dem im Leiter fliessenden Strom kann Gl. (17) weiter bearbeitet werden:

$$\boldsymbol{F} = Q\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{u}\,Q \times \boldsymbol{B} = \\ = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_z}{\mathrm{d}t} \int I\,\mathrm{d}t \times \boldsymbol{B} = I\,(\boldsymbol{l}_z \times \boldsymbol{B}) \tag{18}$$

$\boldsymbol{l}_z$ ist ein Vektor des Leiters in Richtung der Leiterachse.

Das von einem Leiter erzeugte elektromagnetische Drehmoment im Anker der Gleichstrommaschinen kann unter Berücksichtigung der Gl. (3) und (18) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{el}} = \boldsymbol{F}\,r = I\,(l_z\,\boldsymbol{e}_z \times B_r\,\boldsymbol{e}_r)\,r = \\ = B_r\,l_z\,I\,r\,(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r) = B_r\,l_z\,I\,r\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{19}$$

Das Drehmoment wirkt tangentiell zum Ankerumfang in Richtung der Achse φ und versucht den Anker in dieser Richtung zu drehen. Das Drehmoment, erzeugt durch M-Leiter, ist dann betragsmässig:

$$M_{\mathrm{el}} = m_{\mathrm{el}}\,M = B_r\,l_z\,I\,r\,M = \frac{\Phi}{\tau_p\,l_z}\,l_z\,\frac{I_a}{2\,a} \cdot \frac{2\,\pi\,r}{2\,\pi} \cdot \\ \cdot \frac{2\,p}{2\,p}\,M = \frac{\Phi}{\tau_p\,l_z}\,l_z\,\frac{I_a}{2\,a}\,\tau_p\,\frac{2\,p}{2\,\pi}\,M = \frac{\Phi\,I_a\,p\,M}{2\,\pi\,a} \tag{20}$$

Gl. (20) ist die bekannte Gleichung des Drehmoments der Gleichstrommaschinen [2].

4. Schlussbemerkung

Auf Grund des hohen didaktischen Wertes bietet die Anwendung der Feldtheorie zur Untersuchung der elektromagnetischen Vorgänge in elektrischen Maschinen ein tieferes Verständnis ihrer Arbeitsweise an.

Literatur

[1] *M. J. O. Strutt:* Vorlesung über Feldtheorie. Zürich, Juris-Verlag, 1964.

[2] *A. E. Fitzgerald* and *C. Kingsley:* Electric machinery. The dynamics and statics of electromechanical energy conversion. Second edition. New York/London, McGraw-Hill, 1961.

[3] *S. A. Nasar:* Electromagnetic energy conversion devices and systems. Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.

[4] *I. Wolff:* Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie. Ein Repetitorium. Teil II. Hochschultaschenbücher 731. Mannheim/Zürich, Bibliographisches Institut, 1970.

Adresse des Autors:

Dr.-Ing. *B. B. Palit,* Institut für elektrische Maschinen der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Sonneggstrasse 3, 8006 Zürich.