Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 68 (1977)

Heft: 14

Artikel: Anwendung des Anpassungssatzes bei Asynchronmaschinen

Autor: Cetin, I.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-915051

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Anwendung des Anpassungssatzes bei Asynchronmaschinen

Von I. Cetin

621.313.33:621.317.727

Der in der Nachrichtentechnik geläufige Anpassungssatz findet in der Energietechnik kaum Anwendung, weil man nicht mit maximaler Leistung, sondern mit maximalem Wirkungsgrad arbeiten könne. Im Aufsatz wird dieser Satz erweitert und am Beispiel von Asynchronmaschinen gezeigt, dass er die Maximalleistungen von elektrischen Maschinen, insbesondere die Kippleistungen wohl erfasst und physikalisch erklärt. Es zeigt sich, dass die Klosssche Gleichung einen Sonderfall einer für Wechselstromkreise allgemeingültigen Leistungsgleichung darstellt. Weiter wird die innere mechanische Leistung analytisch untersucht, und ihre verschiedenen Ausdrücke werden ermittelt.

La règle de l'adaptation, usuelle en technique des télécommunications, n'est guère utilisée en technique de l'énergie, parce que l'on ne pourrait pas travailler avec puissance maximale, mais seulement avec rendement maximal. Cet article concerne une règle d'adaptation élargie; à l'exemple des machines asynchrones, on constate que les puissances maximales de machines électriques, notamment les puissances de décrochage, peuvent fort bien être déterminées et expliquées physiquement. L'auteur montre que l'équation de Kloss représente un cas particulier d'une équation de puissance valable d'une façon générale pour des circuits à courant alternatif. Il examine en outre analytiquement la puissance mécanique interne et en détermine les diverses expressions.

1. Einleitung

Der in der Literatur als Anpassungsgesetz bezeichnete Anpassungssatz oder der Satz der Maximalleistung bezweckt die Bestimmung der Maximumbedingungen für die Leistung, die von einem Erzeuger einem Verbraucher abgegeben oder von einer Leitung übertragen wird. Er ist bei Gleich- und Wechselstrom seit langem bekannt und wird in der Nachrichtentechnik häufig angewandt. Dagegen wird in Standardwerken der Elektrotechnik [1...5][1]) auf etwaige Anwendungen in der elektrischen Energietechnik überhaupt nicht hingewiesen. Derartige Anwendungen sind angeblich deshalb unzweckmässig, weil man nicht mit maximaler Leistung, sondern mit maximalem Wirkungsgrad arbeiten will. Der Anpassungssatz kann jedoch auch in der elektrischen Energietechnik, vor allem bei der Untersuchung der Leistungsverhältnisse von Synchron-, Asynchron-, Kommutatormaschinen und kurzen Leitungen vorteilhaft verwendet werden. Damit kann man diese Frage physikalisch und einheitlich erklären, ausserdem leichter und übersichtlicher verfolgen. Zudem lässt sich der Einfluss der verschiedenen Ersatzstromkreise bei Drehfeldmaschinen einfach und zwanglos berücksichtigen. Die bei Drehfeldmaschinen und kurzen Leitungen vorhandenen Kippleistungen sind in Wirklichkeit Teilanpassungsleistungen und erklären sich ganz natürlich mit dem Satz der Maximalleistung. Die Kippleistung von Synchronmaschinen tritt bei Teilanpassung nach dem Lastwinkel auf, diejenige von Asynchronmaschinen bei Teilanpassung nach dem äusseren Widerstand bzw. dem Schlupf. Grundsätzlich sind dies Eigenschaften des aktiven Zweipoles. In Standardwerken über elektrische Maschinen [6...14] wird die Untersuchung der Leistungsverhältnisse und die Darstellung der Kippleistungen leider ohne Bezug auf ihren wesentlichen Zusammenhang mit dem Satz der Maximalleistung vorgenommen.

Im Aufsatz wird zuerst der Anpassungssatz kurz erläutert und erweitert. Abweichend von der klassischen Darstellung, bei der man nur die positive Lastleistung nach der veränderlichen Lastimpedanz betrachtet, werden Anpassungen von drei Leistungen im positiven und negativen Bereich nach verschiedenen Veränderlichen eingeführt. Die Anwendbarkeit des Anpassungssatzes bei elektrischen Maschinen wird am Beispiel von Asynchronmaschinen aufgezeigt. Die in der einschlägigen Literatur kaum untersuchte innere mechanische Leistung wird näher betrachtet. Es ist möglich, auch die Synchronmaschine nach dem Anpassungssatz zu behandeln, wodurch man eine einheitliche Sicht für Maximalleistungen bei verschiedenen Maschinenarten erhalten kann.

2. Anpassungsarten

Der vollständige Wechselstromkreis besteht aus einem Wechselstromgenerator mit sinusförmiger Quellenspannung von konstantem Effektivwert und konstantem innerem Scheinwiderstand, der einen veränderlichen äusseren Scheinwiderstand speist (Fig. 1a). Der Generator kann eine wirkliche oder eine Ersatzspannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_q und der Ersatzimpedanz Z_i oder eine kurze Leitung mit der Anfangsspannung U_q und der Impedanz Z_i sein. Der vollständige Wechselstromkreis kann in der Nachrichtentechnik verschiedene Anordnungen, in der Energietechnik hauptsächlich eine kurze Wechselstromleitung, einen Transformator, eine Synchronmaschine oder einen Wechselstrom-Reihenschlussmotor darstellen. Auch die Sonderfälle sind in der Energietechnik von grosser Bedeutung. So kann der Stromkreis mit $R_i = 0$ die Vollpolsynchronmaschine, der Stromkreis mit $R_i = X_a = 0$ oder nur $X_a = 0$ die Asynchronmaschine darstellen.

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

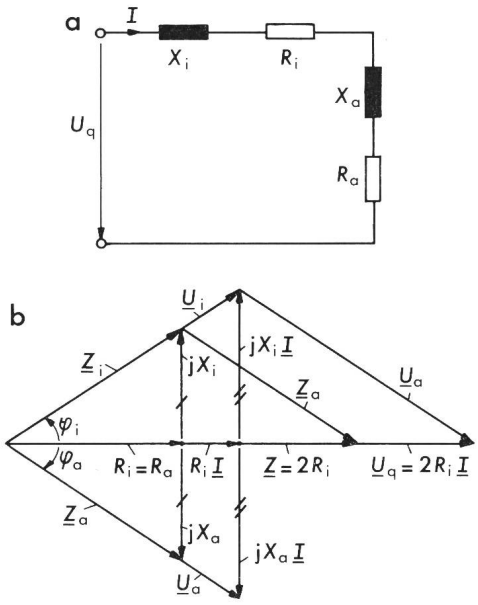

Fig. 1 Vollständiger Wechselstromkreis (a) und Impedanz- und Spannungsdiagramm bei der konjugierten Anpassung (b)

X_i, R_i, Z_i, φ_i, U_i innere Reaktanz, Widerstand, Impedanz, Phasenwinkel, Spannung

X_a, R_a, Z_a, φ_a, U_a äussere Reaktanz, Widerstand, Impedanz, Phasenwinkel, Spannung

Z, R, U_q, I Gesamtimpedanz, Gesamtwiderstand, Quellenspannung, Strom

Die Gesamtimpedanz Z des Wechselstromkreises hat die Komponenten $R = R_i + R_a$ und $X = X_i + X_a$. In den Wirkwiderständen R, R_i, R_a treten die drei Wirkleistungen P, P_i und P_a auf.

$$P = RI^2 = U_q^2\, R/Z^2 \qquad P_i = R_i\, I^2 = U_q^2\, R_i/Z^2$$
$$P_a = R_a\, I^2 = U_q^2\, R_a/Z^2 \tag{1}$$

P stellt die Gesamtleistung des Stromkreises dar, P_i die innere Verlustleistung und P_a die Nutz- oder äussere Leistung. In der Energietechnik sind alle diese Leistungen wichtig, wogegen in der Nachrichtentechnik nur P_a von Bedeutung ist. Ihre Änderung kann man nach je einer der folgenden Abhängigkeiten untersuchen. Die Hauptanwendungen sind in Klammern angegeben.

1. Abhängigkeit von Widerstand bzw. Schlupf und Reaktanz der äusseren Impedanz (Nachrichtentechnik, Asynchronmaschinen)
2. Abhängigkeit von Modul bzw. Schlupf und Argument der äusseren Impedanz (Nachrichtentechnik, Asynchronmaschinen)
3. Abhängigkeit vom Lastwinkel und von der Spannung (Synchronmaschinen, Leitungen)
4. Abhängigkeit von der äusseren Blindleistung und der Spannung (Synchronmaschinen, Leitungen)
5. Abhängigkeit vom Strom und Leistungsfaktor (Synchron- und Asynchronmaschinen)

In jedem Falle ändert sich grundsätzlich die äussere Impedanz, die auch fiktiv sein kann. Diese Änderung wird in den ersten zwei Fällen direkt, in den folgenden Fällen indirekt erfasst. Jede der obigen Abhängigkeiten definiert eine Anpassungsart. Es ist daher unentbehrlich, die bei der Anpassung angenommene Veränderliche unbedingt anzugeben. Eine *Teilanpassung* ergibt einen relativen, eine *Vollanpassung* einen absoluten Extremwert. Bei der 1. Anpassungsart z. B. erhält man eine Teilanpassung nach R_a oder nach X_a und eine Vollanpassung nach R_a und X_a. In einem gegebenen Stromkreis sind Teilanpassungen meistens verschieden, wogegen verschiedene Vollanpassungen immer zum gleichen Ergebnis führen, weil der absolute Extremwert bei Variablenänderung erhalten bleibt.

Im folgenden werden nur die für Asynchronmaschinen wichtigen Anpassungen kurz behandelt. Es sei hier jedoch betont, dass die ganz verschiedenartig erscheinenden Verhalten von Synchron- und Asynchronmaschinen eigentlich durch die zugrundegelegten Veränderlichen bedingt sind.

3. Anpassungen nach der äusseren Impedanz

Ausgehend von den Gleichungen (1) und mit R_i und X_i fest, können die Teil- und Vollanpassungen nach der äusseren Impedanz ermittelt werden. Die mit dem Index MX_a bezeichneten relativen Leistungsmaxima bei Teilanpassungen nach X_a erfordern alle die gleiche Resonanzbedingung, die sich mit der Ableitung leicht finden lässt.

$$X_a = -X_i \rightarrow P_{MX_a} = U_q^2/R \qquad P_{iMX_a} = U_q^2\, R_i/R^2$$
$$P_{aMX_a} = U_q^2\, R_a/R^2 \tag{2}$$

Die Bedingungen für Teilanpassungen nach R_a sind verschieden.

$$\partial P/\partial R_a = 0 \qquad R = \mp X = \mp (X_i + X_a)$$
$$P_{MR_a} = \mp U_q^2/2\, X \tag{3}$$

$$\partial P_i/\partial R_a = 0 \qquad R_a = -R_i$$
$$P_{iMR_a} = U_q^2\, R_i/X^2 \tag{4}$$

$$\partial P_a/\partial R_a = 0 \qquad R_a = \mp \sqrt{R_i^2 + (X_i + X_a)^2} = \mp Z_f$$
$$P_{aMR_a} = U_q^2/2\,(R_i \mp Z_f) \tag{5}$$

Bei Teilanpassung von P_a ist R_a gleich dem festen Teil Z_f der Gesamtimpedanz. Mit dem hier verwendeten Vorzeichen $\mp$ von Z_f wird das Ergebnis verallgemeinert.

Die absoluten Leistungsmaxima bei Vollanpassung erfordern die gleichzeitige Erfüllung der Bedingungen für Teilanpassung nach R_a *und* X_a. Dann erhält man die gleiche Leistungsverteilung wie bei Gleichstrom: Die Gesamtreaktanz ist null. Die Leistungen hängen nur noch von Wirkwiderständen ab und haben gleiche Anpassungswerte wie im Gleichstromfall. Für die äussere Leistung erhält man dann die bekannte konjugierte Anpassung (Fig. 1b) mit den folgenden aus Gl. 1 berechneten Leistungen und einem Wirkungsgrad von nur 50 %.

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^* = R_i - jX_i \qquad P_{aM} = P_i = U_q^2/4\, R_i$$
$$P = U_q^2/2\, R_i \tag{6}$$

Die für Asynchronmaschinen wichtige 2. Anpassungsart nach dem Modul Z_a und Argument φ_a der äusseren Impedanz sei noch für die äussere Leistung kurz erläutert. Formt man P_a in Gl. 1 nach dem Modul und Argument um, so erhält man bei der in der Nachrichtentechnik sehr wichtigen und mit Anpassungstransformatoren verwirklichten Teilanpassung nach Z_a die Bedingung $Z_a = \mp Z_i$ aus $\partial P_a/\partial Z_a = 0$ und die Teilanpassungsleistung P_{aMZ_a} zu

$$P_a = \frac{U_q^2\, Z_a \cos\varphi_a}{Z_a^2 + Z_i^2 + 2\, Z_a\, Z_i \cos(\varphi_a - \varphi_i)}$$
$$P_{aMZ_a} = \frac{U_q^2 \cos\varphi_a}{2\, Z_i\, [\mp 1 + \cos(\varphi_a - \varphi_i)]} \tag{7}$$

Die in der Literatur angegebene Bedingung $Z_a = Z_i$ ist unvollständig, da sie die Anpassung im negativen Bereich nicht erfasst. Aus (7) findet man folgende grundsätzliche bezogene Gleichung für P_a.

$$p_a = \frac{P_a}{P_{aMZ_a}} = \frac{2 + 2\cos(\varphi_a - \varphi_i)}{Z_a/Z_i + Z_i/Z_a + 2\cos(\varphi_a - \varphi_i)} \tag{8}$$

Die bezogene äussere Leistung p_a ist nur von Z_a/Z_i und vom Parameter $\cos(\varphi_a - \varphi_i)$ abhängig. Die Extrempunkte bei $Z_a/Z_i = \mp 1$ können auch aus dieser Gleichung ermittelt werden. Die entsprechende Kurvenschar geht immer durch zwei feste Punkte, den Null- und den Maximumpunkt (1; 1). In dieser Darstellungsweise ist also der Maximumpunkt fest, trotz der Veränderlichkeit des Parameters. Wird als Ordinate P_a aufgetragen, so bekommt man eine Kurvenschar, die durch den Nullpunkt geht, bei der aber das Maximum parameterabhängig ist. Die Ortskurve des Maximum- und des Minimumpunktes ist dann je eine zur Ordinatenachse parallele Gerade vom Abstand ∓ 1. Die Teilanpassung nach φ_a mit $\partial P_a/\partial \varphi_a = 0$ ist für Asynchronmaschinen uninteressant, da hier $\varphi_a = 0$ ist. Die Vollanpassung ist identisch mit der vorher besprochenen konjugierten Anpassung.

4. Anpassungen bei der Asynchronmaschine

Der Wechselstromkreis mit $X_a = 0$ in Fig. 2a kann den Rotor-Ersatzstromkreis von Asynchronmaschinen darstellen. Um die vorherigen allgemeinen Ergebnisse anwenden zu können, muss man von den Symbolen des Zweipoles auf diejenigen der Asynchronmaschine übergehen. U_q ist die Läufer-Quellenspannung im Stillstand, $I = I_2$ der Rotorstrom. Die innere Reaktanz X_i entspricht der Rotorstreureaktanz $X_{2\sigma 0}$ und die innere Impedanz Z_i der Rotorimpedanz $Z_{2\sigma 0}$, beide im Still-

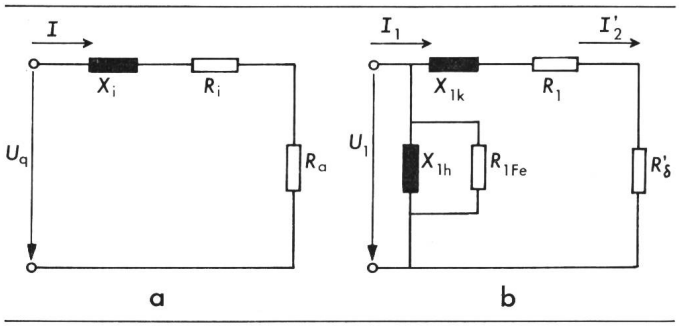

Fig. 2 Ersatzstromkreise der Asynchronmaschine

a Rotorersatzstromkreis als Sonderfall des Wechselstromkreises gemäss Fig. 1a

b Üblicher Ersatzstromkreis

U_1 Statorspannung
I_1 Statorstrom
I_2' bezogener Rotorstrom
X_{1k} Kurzschlussreaktanz
R_1 Statorwiderstand
R_δ Widerstand der Luftspaltleistung
X_{1h} Hauptreaktanz
R_{1Fe} Widerstand der Eisenverluste

stand. Weiter entspricht der Gesamtwiderstand R dem Widerstand R_δ der Luftspaltleistung $P_\delta = P$. Er ist der Quotient des Rotorwiderstandes R_2 und des Schlupfes s und kann in zwei Teile zerlegt werden: Der Rotorwiderstand $R_2 = R_i$ ist der Sitz der Rotorverlustleistung $P_e = P_i$; der Widerstand der mechanischen Leistung $R_m = R_a$ ist, als Folge des Satzes der Erhaltung der Energie, der Sitz der inneren mechanischen Leistung $P_m = P_a$.

$$R_\delta = R_2/s = R_2 + R_m \qquad R_m = R_\delta - R_2 = R_2\,(1-s)/s \tag{9}$$

R_m ist ein fiktiver veränderlicher Lastwiderstand der Asynchronmaschine. Fig. 3 zeigt die Änderung der algebraischen Grössen mit dem Schlupf.

Ausgehend vom Anpassungssatz können die Leistungsmaxima und die dazugehörigen Bedingungen unmittelbar ermittelt werden, wobei nur die Anpassung nach R_a gemäss Gl. 3 bis 5 in Frage kommt.

$$\begin{aligned} &R = \mp X_i \qquad R_\delta = R_2/s = \mp X_{2\sigma 0} \qquad s_K = \mp R_2/X_{2\sigma 0} \\ &P_{\delta K} = \mp U^2{}_q/2\, X_{2\sigma 0} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &R_a = -R_i \qquad R_m = R_2\,(1-s)/s = -R_2 \qquad s_M = \infty \\ &P_{eM} = U_q{}^2\, R_2/X^2_{2\sigma 0} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &R_a = \mp Z_i \qquad R_m = R_2\,(1-s)/s = \mp Z_{2\sigma 0} \\ &s_M = R_2/(R_2 \mp Z_{2\sigma 0}) \qquad P_{mM} = U_q{}^2/2\,(R_2 \mp Z_{2\sigma 0}) \end{aligned} \tag{12}$$

Diese wichtigen Ergebnisse sind leicht zu merken: Die 1. Anpassung erfolgt, wenn der Gesamtwiderstand gleich der inneren Reaktanz wird. Der äussere Widerstand ist bei der 2. Anpassung dem negativen inneren Widerstand und bei der 3. Anpassung der inneren Impedanz gleich. Die 1. und 3. Anpassung können auch aus der Anpassung nach dem Modul Gl. 7 für $Z_a = \mp Z_i$ hergeleitet werden. Diese Formel ist sogar einfacher in der Anwendung.

Drückt man die Extremwerte der Luftspaltleistung und der inneren mechanischen Leistung nach dem dazugehörigen Schlupf aus, so vereinfachen sich ihre Ausdrücke und nehmen die gleiche Form an.

$$\begin{aligned} &R_{\delta K} = \mp X_{2\sigma 0} \qquad P_{\delta K} = U_q{}^2/2\, R_{\delta K} = s_K\, U_q{}^2/2\, R_2 \\ &P_{mM} = s_M\, U_q{}^2/2\, R_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Formeln gelten sowohl für das Maximum, als auch für das Minimum der erfassten Leistung. Daraus erhält man das einfache Verhältnis $P_{mM}/P_{\delta K} = s_M/s_K$.

Die bei der Anpassung nach R_m mit dem Kippschlupf s_K auftretende Maximalleistung $P_{\delta K}$ wird als Kippleistung bezeichnet. Die obige Schreibweise enthält den Wirkwiderstand $R_{\delta K}$, in dem sie auftritt. Dagegen wird sie in der Literatur über Induktionsmaschinen nur in der Form $\mp U_q{}^2/2\, X_{2\sigma 0}$ geschrieben, obwohl eine Wirkleistung nicht in einer Reaktanz zustandekommen kann. Als weiteres physikalisches Merkmal sei bemerkt, dass im Kippunkt die äussere Spannung gleich der inneren Spannung ist. Daher rührt der Zahlenfaktor 1/2 in Gl. 10 als Quadrat des Spannungsverhältnisses $U_a/U_q = 1/\sqrt{2}$ her. Die Gesamtimpedanz, deren Leistungsfaktor und der Strom im Kippunkt haben folgende Werte:

$$\begin{aligned} &Z_K = \sqrt{2}\, X_{2\sigma 0} \qquad \cos\varphi_K = \sqrt{2}/2 \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_K = 1 \\ &I_K = I_k/\sqrt{2} \qquad I_k = U_q/X_{2\sigma 0} \end{aligned} \tag{14}$$

Bei Asynchronmaschinen kann man die betragsmässige Gleichheit $|R| = X_i$ bei Anpassung auf zwei Arten interpretieren:

1. Der Widerstand der Luftspaltleistung im Kippunkt wird der Rotorstreureaktanz im Stillstand gleich.

2. Die Rotorstreureaktanz im Kippunkt wird dem Rotorwiderstand gleich.

$$\begin{aligned} &R_{\delta K} = \mp X_{2\sigma 0} \qquad R_2 = \mp s_K\, X_{2\sigma 0} = X_{2\sigma K} \\ &X_{2\sigma} = |s|\, X_{2\sigma 0} \end{aligned} \tag{15}$$

Fig. 3 zeigt die Bestimmung dieser Grössen aus dem Schnittpunkt der Widerstands- und der Streureaktanzgeraden. Dabei wurde die Streureaktanz als Produkt aux $X_{2\sigma 0}$ und dem Betrag des Schlupfes geschrieben.

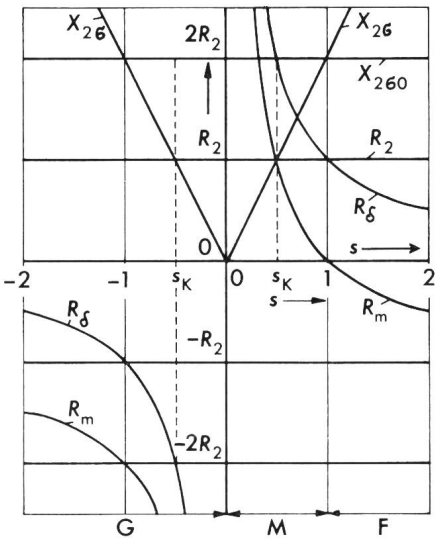

Fig. 3 Änderung der Stromkreiselemente der Asynchronmaschine in Funktion des Schlupfes s

R_2 Rotorwiderstand
R_δ Widerstand der Luftspaltleistung
R_m Widerstand der mechanischen Leistung
$X_{2\sigma}$ Rotorstreureaktanz
$X_{2\sigma 0}$ dieselbe im Stillstand
s_K Kippschlupf
G, M, F Generator-, Motor- und Bremsbetrieb

5. Klosssche Gleichung und Anpassungswirkungsgrad

Die für alle Maschinen und Leitungen mit dem Ersatzstromkreis gemäss Fig. 1a gültige Gl. 8 nimmt bei Induktionsmaschinen mit dem Ersatzstromkreis gemäss Fig. 2a die von *Kloss* [15] gefundene und nach ihm benannte besondere Form mit dem Parameter null an. Zu ihrer Ermittlung genügt es, den Luftspaltwiderstand als äusseren Widerstand zu betrachten und die Proportionalität zwischen P_δ und dem inneren Drehmoment T_δ zu berücksichtigen.

$$R_i = X_a = 0 \quad Z_a/Z_i = R_a/X_i \quad \cos(\varphi_a - \varphi_i) = 0 \qquad P_a = P_\delta \tag{16}$$

$$\frac{R_a}{X_i} = \frac{R_2}{sX_{2\sigma 0}} = \frac{s_K}{s} \qquad \frac{P_\delta}{P_{\delta K}} = \frac{T_\delta}{T_{\delta K}} = \frac{2}{R_a/X_i + X_i/R_a} = \frac{2}{s/s_K + s_K/s} \tag{17}$$

Die Herleitung zeigt, dass Gl. 17 eine allgemeine Eigenschaft des Stromkreises mit $R_i = X_a = 0$ ist und auch für die von diesem Stromkreis erfassten Asynchronmaschinen gilt. *Kloss* fand sie auf dem Umweg über das Heylandsche Kreisdiagramm durch Anwendung von Fluss-Beziehungen, ohne den Zusammenhang mit dem Anpassungssatz zu erkennen.

Fig. 2a kann auch den Ersatzstromkreis mit Kurzschlussreaktanz der Asynchronmaschine darstellen. Dann wird X_i der Kurzschlussreaktanz X_{1k}, R_i dem bezogenen Rotorwiderstand R_2', R_a dem bezogenen Widerstand $R_m' = R_2'(1-s)/s$, P_a der inneren mechanischen Leistung, I dem bezogenen Rotorstrom I_2' und U_q der Statorspannung U_1 gleich. Werden diese Symboländerungen vorgenommen, dann bleiben die vorherigen Ergebnisse gültig. In gleicher Weise kann man auch mit dem meist verwendeten Ersatzstromkreis der Asynchronmaschine von Fig. 2b verfahren. Der Parallelzweig übt keinen Einfluss auf die Anpassung aus. Die hier als äussere Leistung P_a zu betrachtende Luftspaltleistung P_δ wird nach Gl. 5 oder 7

$$P_\delta = I_2'^2 R_2'/s \quad R_\delta' = R_a = R_2'/s = \mp Z_i \qquad s_K = \mp R_2'/Z_i \quad P_{\delta K} = U_1^2/2\,(R_1 \mp Z_i) \tag{18}$$

Dabei besteht die innere Impedanz Z_i aus der Kurzschlussreaktanz X_{1k} und dem Statorwiderstand R_1. Die Gl. 8 führt auf die allgemeine Klosssche Gleichung, wenn man $X_a = 0$, $Z_a = R_a$, $\varphi_a = 0$ einsetzt.

$$\frac{Z_a}{Z_i} = \frac{R_2'}{sZ_i} = \frac{s_K}{s} \qquad \frac{P_\delta}{P_{\delta K}} = \frac{T_\delta}{T_{\delta K}} = \frac{2 + 2\cos\varphi_i}{s/s_K + s_K/s + 2\cos\varphi_i} \tag{19}$$

Die innere mechanische Leistung berechnet sich, indem man R_m' als Aussenwiderstand, also $R_{1k} = R_1 + R_2'$ als Innenwiderstand nimmt. Nach Fig. 2b besteht dann die Kurzschlussimpedanz aus dem Kurzschlusswiderstand R_{1k} und der Kurzschlussreaktanz X_{1k}.

Eine besondere Beachtung verdient auch der Anpassungswirkungsgrad. In Wechselstromkreisen gemäss Fig. 2a erfolgt die Übertragung der Gesamtleistung im allgemeinen und der Luftspaltleistung von Asynchronmaschinen im besonderen verlustlos mit einem Wirkungsgrad von 100 % im ganzen Arbeitsbereich, also auch bei Anpassung, weil der Innenwiderstand hier zum äusseren gezählt wird und folglich die innere Impedanz nur aus X_i besteht. Wegen der Aufteilung der Luftspaltleistung in elektrische und mechanische Leistung ist der entsprechende innere Wirkungsgrad schlupfabhängig und bekanntlich gleich $1-s$. Da der Kippschlupf normalerweise in der Grössenordnung von 10 bis 20 % liegt, beträgt der Anpassungswirkungsgrad im Kippunkt ca. 80 bis 90 %. Je nach vorliegenden Parameterwerten kann er eigentlich einen beliebigen Wert aufweisen. Bei Schleifring-Asynchronmotoren mit einstellbarem Rotorwiderstand kann er bis null heruntergehen. Man sieht, dass der Wirkungsgrad im Anpassungspunkt verschiedene Werte aufweisen kann und kein Hindernis für Anpassungsanwendungen in der Energietechnik darstellt. Der Wert von 50 % für den Anpassungswirkungsgrad gilt nur bei konjugierter Anpassung, also für Vollanpassung von vollständigen Stromkreisen, nicht aber bei Teilanpassungen und unvollständigen Stromkreisen.

6. Untersuchung der inneren mechanischen Leistung

Diese in einschlägigen Werken [7...14] wenig bekannte Untersuchung gilt auch für die praktisch wichtige mechanische Leistung an der Welle, die sich nach Abzug der geringeren mechanischen Verlustleistung aus der inneren mechanischen Leistung ergibt. Sie wird im folgenden nach dem Schlupf und dem bezogenen Strom vorgenommen. Wie betont, dienen diese Veränderlichen zur indirekten Erfassung des veränderlichen Aussenwiderstandes. Aus der für den Ersatzstromkreis in Fig. 2a geltenden Klossschen Gleichung erhält man leicht die Schlupfabhängigkeit der inneren mechanischen Leistung.

$$P_m = (1-s)\,P_\delta \quad p_m = \frac{P_m}{P_{\delta K}} = \frac{2\,(1-s)}{s/s_K + s_K/s} = \frac{2\,s_K\,s\,(1-s)}{s^2 + s_K^2} \tag{20}$$

Als unabhängige Veränderliche kann man s oder s/s_K wählen. Eine parameterfreie Darstellung wie bei der Klossschen Gleichung ist unmöglich. Durch Nullsetzen des Differentialquotienten findet man die Koordinaten der Anpassungspunkte zu

$$\partial P_m/\partial s = 0 \quad s_M = -s_K^2 \mp s_K\sqrt{1 + s_K^2} \qquad P_{mM}/P_{\delta K} = -s_K \mp \sqrt{1 + s_K^2} = s_M/s_K \tag{21}$$

Das Verhältnis der inneren mechanischen zur Luftspaltleistung in den Anpassungspunkten ist danach einfach gleich dem Schlupfverhältnis der entsprechenden Drehzahlen, wodurch Gl.13 bestätigt wird. Die Koordinaten der Extrempunkte sind entgegengesetzten Vorzeichens und durch den Kippschlupf eindeutig bestimmt. Die positiven Koordinaten bestimmen die mechanische Maximalleistung im Motorbetrieb, die negativen diejenige im Generatorbetrieb. Im Betrag sind die Koordinaten im Generatorbetrieb grösser als diejenigen im Motorbetrieb. Nimmt man den Kippschlupf als Parameter an, so erhält man die Kennlinienschar in Fig. 4. Daraus ersieht man den Einfluss des Parameters s_K. Grösserer Kippschlupf, d.h. grösserer Rotorwiderstand beschränkt die innere mechanische Leistung wesentlich. Der Kippschlupf und der innere Leistungsfaktor sind einander durch das Dreieck der inneren Impedanz zugeordnet.

$$s_K = R_i/X_i \quad \cos\varphi_i = R_i/Z_i = s_K/\sqrt{1 + s_K^2} \tag{22}$$

Als Parameter kann also jeweils der Kippschlupf oder der ihm gleichwertige innere Leistungsfaktor angenommen werden.

Zur Abkürzung der Schreibweise wurden die Symbole des Zweipoles (Fig. 2a) verwendet.

Wird der Kippschlupf als Parameter verändert, dann bewegen sich die Anpassungspunkte auf folgender Kurve: Durch Eliminierung von s_K in Gl. 21 erhält man

$$\sqrt{1-2\,s_M}\,(p_{mM}^2-1)\mp 2\,s_M\,p_{mM}=0 \qquad (23)$$

Die Bedingung $s_M \leqq 0{,}5$ ergibt eine theoretische obere Grenze für s_M. Dagegen besteht eine solche Grenze für s_K nicht. Die in Fig. 4 gestrichelt gezeichnete Kurve der Gl. 23 ist zur Abszissenachse symmetrisch und schneidet die Koordinatenachsen in festen Punkten. Die Anpassungspunkte befinden sich im Motorbetrieb im 1. Quadranten und im Generatorbetrieb im 3. Quadranten. Der Maximumpunkt bei $s_M = 0$ ist als Grenzwert aufzufassen.

Die verschiedenen Leistungen der Asynchronmaschine lassen sich auch nach dem Strom ausdrücken. Geht man wieder vom einfachen Rotor-Ersatzstromkreis aus, so gilt für den Gesamtwiderstand R

$$I_k = U_q/X_i \qquad i = I/I_k \qquad (R/X_i)^2 = {}_i{}^2-1 \qquad (24)$$

Mit dem auf den ideellen Kurschlußstrom I_k bezogenen Strom i findet man für die auf die Kippleistung $P_{\delta K}$ bezogenen Leistungen

$$p_\delta = 2\,i\sqrt{1-i^2} \qquad p_e = 2\,s_K i^2 \qquad p_m = 2\,i\,(\sqrt{1-i^2}-s_K i) \qquad (25)$$

Die Anpassungswerte bestimmen sich zu

$$\partial p_\delta/\partial i = 0 \qquad i_K{}^2 = 1/2 \qquad I_K = \mp I_k/\sqrt{2} \qquad p_{\delta M} = \mp 1 \qquad (26)$$

$$\partial p_m/\partial i = 0 \qquad i_M{}^2 = (1\mp\cos\varphi_i)/2 \qquad p_{mM} = \mp 2\,i_M{}^2/\sin\varphi_i \qquad (27)$$

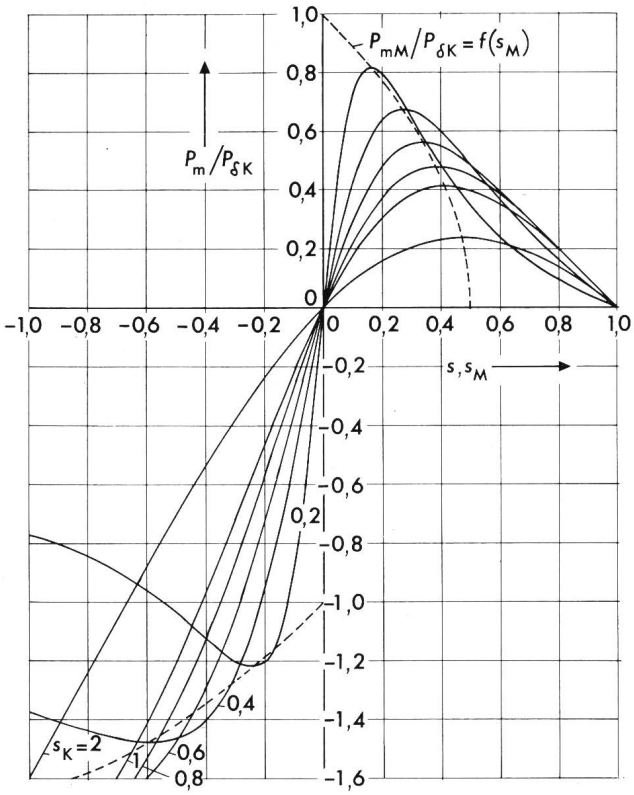

Fig. 4 Kennlinienschar der auf die Kippleistung $P_{\delta K}$ bezogenen inneren mechanischen Leistung P_m nach dem Schlupf s

Kippschlupf s_K als Parameter. P_{mM} und s_M bezeichnen die Koordinaten des Anpassungspunktes

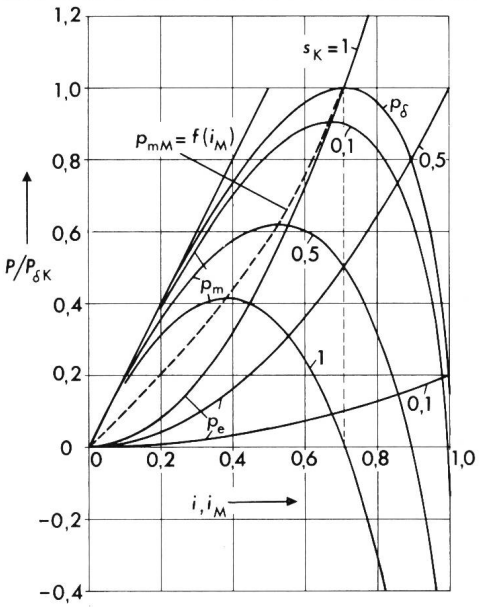

Fig. 5 Kennlinien der verschiedenen auf die Kippleistung $P_{\delta K}$ bezogenen Leistungen P in Abhängigkeit des bezogenen Stromes i

s_K Kippschlupf als Parameter

p_δ, p_m, p_e bezogene Werte der Luftspalt-, der inneren mechanischen und der Rotorverlustleistung

p_{mM}, i_M Koordinaten des Anpassungspunktes von p_m

In der hier verwendeten Anpassungsart nach dem Strom erscheint der äussere Leistungsfaktor nicht, da $X_a = 0$ ist. Fig. 5 zeigt die Leistungskurven in Funktion des bezogenen Stromes mit s_K als Parameter. Die Gleichung des Anpassungspunktes der inneren mechanischen Leistung bei veränderlichem Kippschlupf ergibt sich durch Eliminierung des Parameters in Gl. 27.

$$p_{mM} = i_M/\sqrt{1-i_M{}^2} \qquad (28)$$

Die entsprechende Kurve ist in Fig. 5 gestrichelt gezeichnet. Mit dem Anpassungsverfahren lassen sich auch die Anpassungsleistungen aus Gl. 1 und 10 bis 12 sofort schreiben.

$$R = R_\delta = \mp X_i \qquad P_{\delta K} = R_\delta\,I_K{}^2 = \mp X_i\,I^2{}_k/2$$
$$P_{eM} = R_i\,I^2{}_k \qquad (29)$$

$$R_a = \mp Z_i \qquad P_{mM} = \mp Z_i\,I_M{}^2 = (R_i \mp Z_i)\,I^2{}_k/2 \qquad (30)$$

Die Anpassungsleistungen nach dem Aussenwiderstand in Gl. 10 bis 12, nach dem Schlupf in Gl. 17, 21, sowie nach dem Strom in Gl. 26 bis 30 stimmen alle überein, weil sie denselben Anpassungspunkten gehören. Es gibt eigentlich nur eine Anpassung für jede Leistung, da im Ersatzstromkreis der Asynchronmaschine $X_a = 0$ ist. Damit soll gezeigt werden, dass die Anpassung nach verschiedenen Veränderlichen definiert und praktisch angewandt werden kann.

Zum Schluss sei hervorgehoben, wie einfach und anschaulich man wichtige Ergebnisse über Leistungsverhältnisse von Asynchronmaschinen erhalten hat, ohne jeden Fall getrennt zu behandeln und dadurch die wesentliche Einheit der verschiedenen Fälle zu übersehen. Für die Ermittlung der sonst durch Kreisdiagramme oder getrennte analytische Untersuchungen gefundenen Kippwerte genügt es, wenige einfache Anpassungsregeln anzuwenden. Diese Regeln ermöglichen die Voraussage und die einfache Berechnung der Maximalleistungen so-

wohl im Motor-, als auch im Generatorbetrieb. Es ist zu wünschen, dass man diese einheitliche Behandlung auch in Lehrbüchern einführt und vor allem dem Anpassungssatz mehr Raum widmet.

Literatur

[1] *K. Küpfmüller:* Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 7. Auflage. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag, 1962.
[2] *H. Hofmann:* Das elektromagnetische Feld. Theorie und grundlegende Anwendungen. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1974.
[3] *W. Lehmann* und *R. Geisweid:* Die Elektrotechnik und die elektrischen Antriebe. Lehr- und Nachschlagebuch fär Studierende und Ingenieure. 6. Auflage. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1962.
[4] *J. Fischer:* Elektrodynamik. Ein Lehrbuch. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1976.
[5] *G. Oberdorfer:* Lehrbuch der Elektrotechnik. Bd. I/II. 5. Auflage. München, Verlag R. Oldenbourg, 1948/1949.
[6] *R. Richter:* Elektrische Maschinen. Band 2: Synchronmaschinen und Einankerumformer. 2. Auflage. Basel/Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1953.
[7] *R. Richter:* Elektrische Maschinen. Band 4: Die Induktionsmaschinen. 2. Auflage. Basel/Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1954.
[8] *T. Bödefeld* und *H. Sequenz:* Elektrische Maschinen. Eine Einführung in die Grundlagen. 6. Auflage. Wien, Springer-Verlag, 1962.
[9] *W. Schuisky:* Induktionsmaschinen. Wien, Springer-Verlag, 1957.
[10] *W. Nürnberg:* Die Asynchronmaschine. Ihre Theorie und Berechnung unter besonderer Berücksichtigung der Keilstab- und Doppelkäfigläufer. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag, 1963.
[11] *H. Jordan* und *M. Weis:* Asynchronmaschinen. Uni-text. Braunschweig, Vieweg-Verlag, 1969.
[12] *G. Aichholzer:* Elektromagnetische Energiewandler. Wien, Springer-Verlag, 1975.
[13] *F. Moeller* und *P. Vaske:* Elektrische Maschinen und Umformer. 10. Auflage. Stuttgart, Teubner-Verlag, 1966.
[14] *E. V. Rziha:* Starkstromtechnik. Bd. I/II. 8. Auflage. Berlin, Verlag Ernst & Sohn, 1955/1959.
[15] *M. Kloss:* Drehmoment und Schlüpfung des Drehstrommotors. Arch. Elektrotechn. 5(1916)3, S. 59...87.

Adresse des Autors

Ass. Prof. Dr.-Ing. *I. Cetin*, Istanbul Teknik Universitesi El. Fak.
Gümüssuyu-Istanbul, Türkei.

Jost Bürgi 1552–1632

Jost Bürgi, dessen Name in verschiedenen abgewandelten Formen zu finden ist (Burgi, Burrgk, Byrgins, Borgen), wurde am 28. Februar 1552 in Lichtensteig im Toggenburg geboren. Über seine Jugend weiss man nur, dass er Uhrmacher lernte.

1579 trat er als Hofuhrmacher in den Dienst des Hessischen Landgrafen Wilhelm IV. in Kassel. Dieser, ein gelehrter Mann, besass seit 1567 eine eigene Sternwarte. Bürgi führte in seiner Kasseler Zeit den Sekundenzeiger für Uhren ein. Von 1584 an war er zudem mit astronomischen Beobachtungen, später auch mit Sonnenbeobachtungen betraut. Als 1586 ein Besucher dem Landgrafen über ein von Tycho Brahe erstelltes «Planetarium» berichtete, wurde Bürgi beauftragt, ebenfalls ein solches zu bauen. Die Kunde von seinem Kunstwerk gelangte bis an den Hof nach Prag. 1592 bat Kaiser Rudolf II. den Landgrafen, ihm den Bürgischen Himmelsglobus zu zeigen. Wilhelm IV. konnte ihm diesen Wunsch nicht versagen und entschloss sich sogar, dem Kaiser das Werk zu schenken. Bürgi reiste damit nach Prag. Kaiser Rudolf fand grossen Gefallen nicht nur am Geschenk, sondern auch am Überbringer. Zum Leidwesen des Kaisers kehrte Bürgi aber nach Kassel zurück, wo er sich eingebürgert hatte und besorgte weiterhin die Sternwarte. Dabei half ihm sein Schwager und gelehriger Schüler Benjamin Bramer, der auch in seinem Haushalt lebte. Bürgi, der mit Kopf und Händen gleichermassen geschickt war, entwickelte in dieser Zeit verschiedene mathematische Instrumente, so einen Dreifuss-, einen Proportionalitäts- (oder Reduktions-) und einen Triangulationszirkel (auch der Bürgische Sextant genannt).

Zentralbibliothek Zürich

1603 folgte Bürgi dann doch einem Ruf als Kammeruhrmacher an den Prager Hof. Dort wirkte Johannes Kepler, der 1601 als Nachfolger des verstorbenen Tycho Brahe zum Hofastronomen ernannt worden war.

Bürgi, zunehmend mit reiner Mathematik beschäftigt, begann um 1605 sein wichtigstes Lebenswerk: er berechnete Logarithmen. Es ist möglich, dass der Anstoss zu dieser Arbeit von einem Freund Nepers ausging. Bürgi führte aber seine Berechnungen völlig selbständig durch. In jahrelanger Arbeit erstellte er seine 9stellige «arithmetische und geometrische Progress-Tabule», die 1620 in Prag gedruckt wurden. Das aus Bescheidenheit nur mit den Initialen J.B. gezeichnete Werk blieb lange Zeit verschollen. 1847 wurde es in der königlichen Bibliothek in München entdeckt, und die dazu gehörende Anleitung fand sich 9 Jahre später in einer Danziger Bibliothek. Sie stammte aus dem Nachlass Benjamin Bramers.

Obwohl Bürgi sich auch in Prag eingebürgert hatte, bewogen ihn wohl die Wirren des 30jährigen Krieges, nach Kassel zurückzukehren. Dort starb er am 31. Januar 1632.

Lichtensteig hat seinen grossen Sohn 1963 durch die Errichtung eines Denkmals geehrt. Seine Verdienste wurden aber schon durch seinen ersten Brotherrn, den Landgrafen Wilhelm IV., ferner durch Kepler und später durch Johannes III. Bernoulli gewürdigt. In Kassel existiert noch heute eine Sammlung von Uhren und Himmelsgloben Jost Bürgis. *H. Wüger*