Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

Band: 69 (1978)

Heft: 8

Artikel: Raumladungsfenster in Koordinatentransformation

Autor: Prinz, H. / Singer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-914867

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Raumladungsfelder in Koordinatentransformation

Von H. Prinz und H. Singer

537.212;

In der Feldberechnung wird fast immer von der Annahme ausgegangen, dass das zu untersuchende Feldsystem raumladungsfrei sei, so dass von der *Laplaceschen* Potentialgleichung ausgegangen werden kann. Unter dieser Voraussetzung lassen sich jedoch nur Felder von Elektroden untersuchen, die über ihre gesamte Kontur hinweg vorentladungsfrei sind und deren Anfangsspannung demzufolge noch nicht überschritten worden ist. Diese Annahme ist in der Praxis oftmals nicht erfüllt, vor allem wenn es sich darum handelt, den Einfluss einer ladungsabsprühenden Elektrode auf den Potential- und Feldstärkeverlauf kennenzulernen, um daraus dann erforderlichenfalls die Durch- oder Überschlagspannung der vorgegebenen Elektrodenanordnung berechnen zu können. Ein solches Vorgehen würde demzufolge erlauben, die Durchschlagspannung einer Stabfunkenstrecke zu bestimmen, ohne, wie bisher, das Experiment mit dem dazu notwendigen Aufwand in Anspruch nehmen zu müssen.

1. Rechengang

Ausgangspunkt für die Berechnung solcher raumladungsbeschwerter Feldsysteme bildet die *Poissonsche* Potentialgleichung, die sich als

$$\Delta\Phi_{\mathrm{P}} = -\frac{\varrho(u^1, u^2, u^3)}{\varepsilon}$$

darstellt mit Φ_{P} als dem *Poisson*-Potential, mit ε als der Dielektrizitätskonstanten und mit ϱ als der Raumladungsdichte über die drei Koordinatenrichtungen u^1, u^2 und u^3. Die Schwierigkeit, diese Gleichung für den allgemeinen dreidimensionalen Fall zu lösen, ist von zweierlei Natur: Zum einen weiss man über die wahre Raumladungsverteilung von Feldsystemen bisher nur sehr wenig, weil es erfahrungsgemäss äusserst problematisch ist, diese Verteilung zu messen, ohne sie durch den Messvorgang zu ändern, und zum anderen ergeben sich im Falle eines analytischen Rechenganges mathematische Probleme, wenn von numerischen Lösungen abgesehen wird. Für die folgenden Betrachtungen möge deshalb von dem einfachsten Fall einer gleichmässig verteilten Raumladung über den gesamten Feldraum ausgegangen werden.

Für die Lösung empfiehlt sich ein Rechengang nach *Moon/Spencer* [1][1]), der davon ausgeht, dass der allgemeine Ansatz für das Laplace-Potential Φ_{L}, der für das vorgegebene Feldsystem aus einer vorausgegangenen Koordinatentransformation bereits bekannt sein muss, gleichermassen für das Poisson-Potential Φ_{P} in der Form

$$\Phi_{\mathrm{P}} = \Phi_{\mathrm{L}} + \Phi_1(u^1) + \Phi_2(u^2)$$

ansetzbar ist, wobei die beiden monoabhängigen Ergänzungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 so bestimmt werden müssen, dass die Poissonsche Gleichung für die aufzufindende Partikulärlösung des vorgegebenen Feldsystems erfüllt ist. Dabei darf nicht übersehen werden, dass jeweils zwei Ergänzungsfunktionen erforderlich sind, wenn das Feldproblem, das sich sonst in transformierten Koordinaten ohne Raumladung als eindimensionales Problem darstellt, zu einem zweidimensionalen wird, sobald im Feldraum Raumladungen vorhanden sind.

Die aufgefundene Partikulärlösung des Poisson-Potentials muss dann den folgenden vier Randbedingungen genügen: Zum ersten und zweiten den beiden Konturbedingungen, dass längs der beiden Elektrodenoberflächen das Potential U bzw. 0 sein muss, zum dritten im Sonderfall $\varrho = 0$ der Laplace-Lösung und schliesslich zum vierten der Poissonschen Differentialgleichung, die der Ausgangspunkt der Berechnung war.

Zum besseren Verständnis dieses Rechenvorganges sollen drei konkrete Feldprobleme vorgestellt werden, und zwar zwei translatorische Systeme in Form des Ellipsenkabels und der Hyperbelschneide und ein rotatorisches System in Form einer Hyperboloidspitze.

2. Das Ellipsenkabel

Nach Fig. 1 sei ein Ellipsenkabel als Sonderfall eines geerdeten Bandes der Breite $2a$ ($\eta_{\mathrm{I}} = 0$) innerhalb eines elliptischen Zylinders ($\eta_{\mathrm{II}} = 1$) vorgegeben, dem die Halbachsen α_{II} und β_{II} zugeordnet seien.

Mit den beiden ellipsenzylindrischen Koordinaten (η, ψ) folgt aus dem Laplace-Ansatz die Poissonsche Differentialgleichung der Form

$$\Delta\Phi_{\mathrm{P}} = \frac{1}{a^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\left(\frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{P}}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{P}}}{\partial\psi^2}\right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon},$$

die durch den Lösungsansatz

$$\Phi_{\mathrm{P}} = \Phi_{\mathrm{L}} + \Phi_1(\eta) + \Phi_2(\psi)$$

erfüllt sein soll. Eingesetzt ergeben sich hieraus die beiden monoabhängigen Ergänzungsfunktionen zu

$$\Phi_1(\eta) = -\frac{\varrho a^2}{8\varepsilon}\cosh 2\eta$$

$$\Phi_2(\psi) = -\frac{\varrho a^2}{8\varepsilon}\cos 2\psi,$$

was leicht nachprüfbar ist. Unter Berücksichtigung des bereits vorher ermittelten Lösungsansatzes für das Laplace-Potential ist das Poisson-Potential somit darstellbar als

$$\Phi_{\mathrm{P}} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(A_{\mathrm{n}}\cosh \mathrm{n}\eta + B_{\mathrm{n}}\sinh \mathrm{n}\eta)\cdot\cos \mathrm{n}\psi - \\ - \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon}(\cosh 2\eta + \cos 2\psi) + C + D\eta + E\psi$$

mit den Reihenkoeffizienten A_{n} und B_{n} und den Integrationskonstanten C, D und E. Da im Raumladungsanteil nur Glieder

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

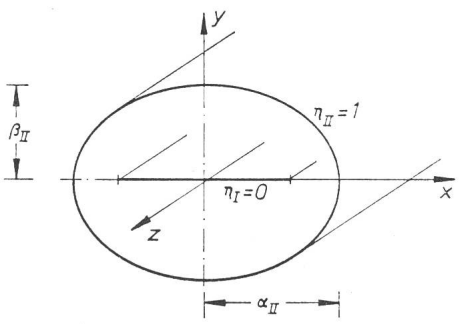

Fig. 1 Ellipsenkabel mit den Begrenzungsflächen $\eta_{\mathrm{I}} = 0$ und $\eta_{\mathrm{II}} = 1$

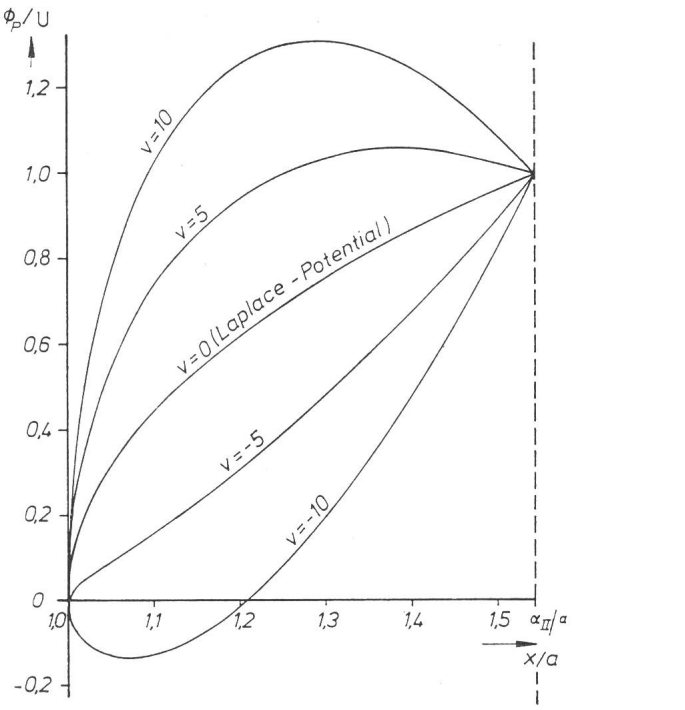

Fig. 2 **Potentialverteilung in einem Ellipsenkabel entlang der x-Achse zwischen den Flächen $\eta_I = 0$ ($x/a = 1$) und $\eta_{II} = 1$ ($x/a = 1{,}54$) für verschiedene Grössen einer gleichmässigen Raumladungsverteilung (Parameter v)**

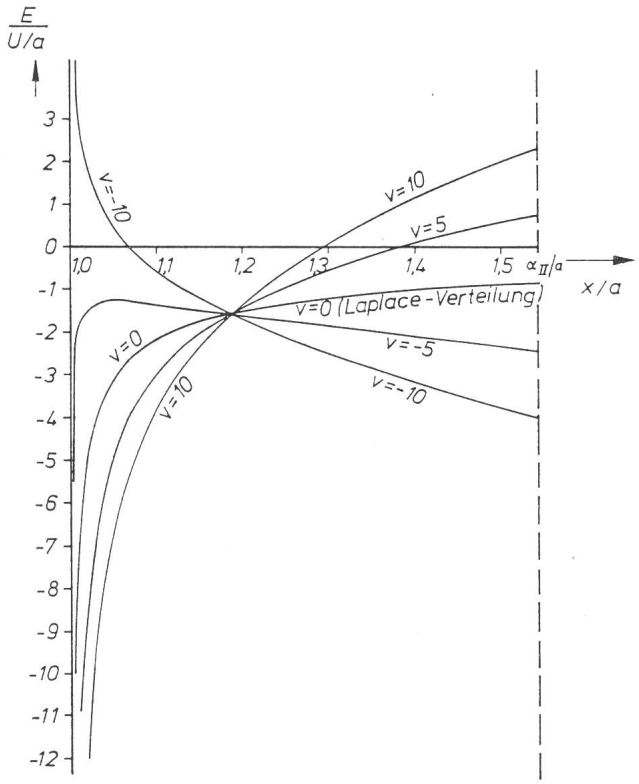

Fig. 3 **Feldverlauf in einem Ellipsenkabel entlang der x-Achse zwischen den Flächen $\eta_I = 0$ ($x/a = 1$) und $\eta_{II} = 1$ ($x/a = 1{,}54$) für verschiedene Grössen einer gleichmässigen Raumladungsbelegung (Parameter)**

mit $n = 2$ vorkommen, können auch im Summenansatz von Φ_L nur Glieder mit $n = 2$ auftreten, womit sich das Poisson-Potential einfacher zu

$$\Phi_P = (A_2 \cosh 2\eta + B_2 \sin 2\psi) \cdot \cos 2\psi - \\ - \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon} (\cosh 2\eta + \cos 2\psi) + C + D\eta + E\psi$$

ergibt. Aus den beiden Grenzbedingungen

$$\Phi_P = 0 \text{ für } \eta = \eta_I = 0$$
$$\Phi_P = U \text{ für } \eta = \eta_{II},$$

die unabhängig von ψ gelten, sowie unter Beachtung eines funktionsgerechten Koeffizientenvergleiches folgt

$$A_2 = \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon}$$
$$B_2 = \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon} \frac{1 - \cosh 2\eta_{II}}{\sinh 2\eta_{II}}$$
$$C = A_2$$
$$D = \frac{U}{\eta_{II}} + \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon} \frac{\cosh 2\eta_{II} - 1}{\eta_{II}}$$
$$E = 0,$$

so dass die vollständige Lösung

$$\Phi_P = U \frac{\eta}{\eta_{II}} - \frac{\varrho a^2}{4\varepsilon} \left\{ \frac{\sinh\eta \cdot \sinh(\eta_{II} - \eta)}{\cosh \eta_{II}} \cos 2\psi + \right. \\ \left. + \sinh^2\eta - \frac{\eta}{\eta_{II}} \sinh^2 \eta_{II} \right\}$$

wird, die in einer getrennten Kontrollrechnung den vorher erwähnten vier Grenzbedingungen genügt. Der erste Term berücksichtigt den Laplace-Anteil ohne Raumladungen, der zweite den Raumladungsanteil.

Für eine numerische Auswertung des Poisson-Potentials empfiehlt sich eine Darstellung in normierter Form als

$$\Phi_P/U = \varphi_L + v \cdot \varphi_\varrho$$

mit $\varphi_L = \eta/\eta_{II}$

als normiertem Laplace-Potential und

$$\varphi_\varrho = \frac{\sinh 2\eta_{II}(\cosh 2\eta - 1) - \sinh 2\eta(\cosh 2\eta_{II} - 1)}{8 \sinh 2\eta_{II}} \cdot \\ \cdot \cos 2\psi + \frac{1 - \cosh 2\eta}{8} - \frac{\eta}{8\eta_{II}} (1 - \cosh 2\eta_{II}),$$

wobei $v = \dfrac{\varrho a^2/\varepsilon}{U}$

als dimensionslose Grösse eingeht. Aus Fig. 2 mit $\Phi_P/U = f(x/a)$ längs der grossen Ellipsenhalbachse ist erkennbar, dass sich mit wachsender positiver Raumladung das Potentialmaximum immer weiter in den Feldraum hineinschiebt; bei negativer Raumladung ist es das Potentialminimum.

Aus der Potentialverteilung folgt über die Gradientenformel des ellipsenzylindrischen Koordinatensystems die Feldstärkeverteilung, die sich normiert durch die Beziehung

$$\frac{E_P}{U/a} = e_L + v \cdot e_\varrho$$

mit $e_L = -\dfrac{1}{\eta_{II} \sinh \eta}$

und $e_\varrho = -$

$$- \frac{1}{\sinh \eta} \left[\frac{\sinh 2\eta \cdot \sinh 2\eta_{II} - \cosh 2\eta (\cosh 2\eta_{II} - 1)}{4 \sinh 2\eta_{II}} - \right. \\ \left. - \frac{\sinh 2\eta}{4} - \frac{1 - \cosh 2\eta_{II}}{8\eta_{II}} \right]$$

und der dimensionslosen Grösse v darstellen lässt. In Fig. 3 ist der daraus berechnete Feldstärkeverlauf längs x/a mit v als dimensionslosem Parameter aufgetragen. Dabei ist bemerkenswert, dass sich alle Feldstärkekurven in einem Bereich von $v = +10$ bis $v = -10$ in einem einzigen Punkt schneiden, was besagt, dass die Feldstärke in diesem Punkt gleich gross ist, unabhängig von der Grösse der in den Feldraum eingebrachten Raumladung.

3. Die Hyperbelschneide

Im zweiten Beispiel eines translatorischen Feldsystems sei eine Hyperbelschneide (ψ_{II}) gegen eine geerdete Ebene ($\psi_I = \pi/2$) vorgegeben. Für die vollständige Lösung der Potentialverteilung wird nunmehr

$$\Phi_P = U \frac{\pi/2 - \psi}{\pi/2 - \psi_{II}} + \frac{\varrho a^2}{8\varepsilon} \left\{ \cosh 2\eta \left[(1 + \cos 2\psi_{II}) \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\psi_{II}} - (1 + \cos 2\psi) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\psi_{II}(1 + \cos 2\psi) + \pi/2 (\cos 2\psi_{II} - \cos 2\psi) - \psi (1 + \cos 2\psi_{II})}{\pi/2 - \psi_{II}} \right\}$$

wobei der erste Term wiederum den Laplace-Anteil und der zweite Term den Raumladungsanteil darstellen. Über die Gradientenformel lässt sich hieraus wiederum die Feldstärkeverteilung finden.

4. Die Hyperboloidspitze

Nunmehr soll als Beispiel eines rotatorischen Feldsystems eine Hyperboloidspitze ($\vartheta_I = 30^0$) gegen eine geerdete Ebene ($\vartheta_{II} = \pi/2$) untersucht werden (Fig. 4). Die Poissonsche Differentialgleichung lautet in diesem Fall

$$\Delta\Phi_P = \frac{1}{a^2(\sinh^2\eta + \sin^2\vartheta)} \left(\frac{\partial^2\Phi_P}{\partial\eta^2} + \coth\eta \frac{\partial\Phi_P}{\partial\eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2\Phi_P}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{\partial\Phi_P}{\partial\vartheta} \right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon},$$

woraus sich die beiden monoabhängigen Ergänzungsfunktionen zu

$$\Phi_1(\eta) = -\frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} (\cosh^2\eta - 4 \ln \sinh\eta)$$

$$\Phi_2(\vartheta) = -\frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} (\cos^2\vartheta - 4 \ln \sin\vartheta)$$

bestimmen lassen. Der weitere Rechengang hat ergeben, dass es mit diesen beiden Funktionen zwar möglich ist, die ersten beiden Grenzbedingungen zu erfüllen, nicht aber die vierte, da in dem Reihenansatz der Laplace-Lösung die beiden ln-Terme nicht vorkommen. Deshalb wurde versucht, im weiteren Rechengang auf diese beiden Terme zu verzichten und mit gekürzten Ergänzungsfunktionen

$$\Phi_1'(\eta) = -\frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} \cosh^2\eta$$

$$\Phi_2'(\vartheta) = -\frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} \cos^2\vartheta$$

weiter zu rechnen. Obwohl nach dem Einsetzen in die entsprechende Differentialgleichung für jede gekürzte Ergänzungsfunktion ein Restanteil der Form $4\varrho a^2/6\varepsilon$ verblieben ist, hat sich in ihrer Summenbildung der Rest 0 ergeben, da der Restanteil einmal positiv und einmal negativ war.

Als Gesamtlösung bietet sich dann wiederum der Ansatz

$$\Phi_P = \Phi_L + \Phi_1'(\eta) + \Phi_2'(\vartheta)$$

an, so dass nach Einsetzen des bereits bekannten Laplace-Potentials

$$\Phi_P = \left[A_2 P_2(\cos\vartheta) + B_2 Q_2(\cos\vartheta) \right] \cdot P_2(\cosh\eta) -$$
$$- \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} (\cosh^2\eta + \cos^2\vartheta) + C \cdot \ln\tan\frac{\vartheta}{2} + D$$

wird mit P_2 und Q_2 als *Legendre*-Funktionen 1. und 2. Art. Durch Einsetzen der Grenzbedingungen

$$\vartheta = \vartheta_I \qquad \Phi_P = U$$
$$\vartheta = \vartheta_{II} = \pi/2 \qquad \Phi_P = 0$$

und einem Koeffizientenvergleich wird

$$A_2 = \frac{4}{3} \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon}$$

$$B_2 = \frac{2 \cdot \cos^2\vartheta_I}{Q_2(\cos\vartheta_I)} - \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon}$$

$$C = \frac{U + \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} \cdot \cos^2\vartheta_I}{\ln\tan\vartheta_I/2}$$

$$D = \frac{1}{3} \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon}$$

und somit die vollständige Lösung

$$\Phi_P = U \frac{\ln\tan\vartheta/2}{\ln\tan\vartheta_I/2} +$$
$$+ \frac{\varrho a^2}{6\varepsilon} \left\{ \left[-\frac{4}{3} P_2(\cos\vartheta) + \frac{2\cos^2\vartheta_I}{Q_2(\cos\vartheta_I)} \cdot Q_2(\cos\vartheta) \right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot P_2(\cosh\eta) + \cos^2\vartheta_I \cdot \frac{\ln\tan\vartheta/2}{\ln\tan\vartheta_I/2} + \frac{1}{3} - (\cosh^2\eta + \cos^2\vartheta) \right\}$$

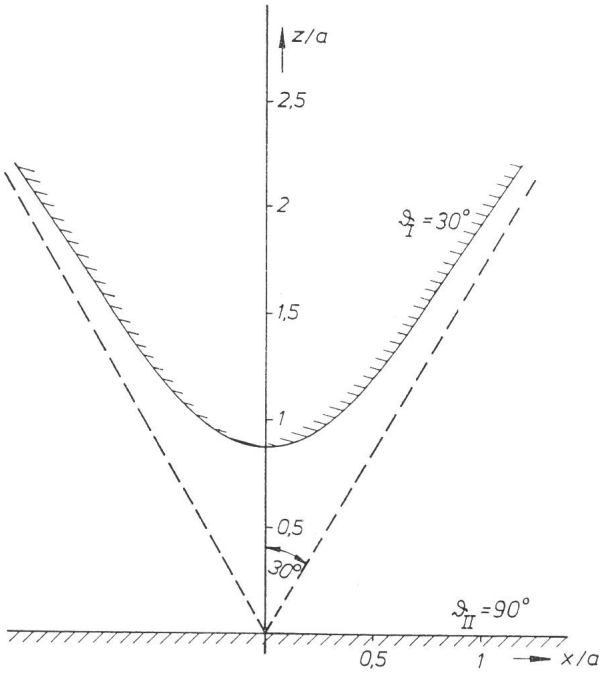

Fig. 4 **Anordnung Rotationshyperboloid ($\vartheta_I = 30^0$) gegen Ebene ($\vartheta_{II} = 90^0$)**

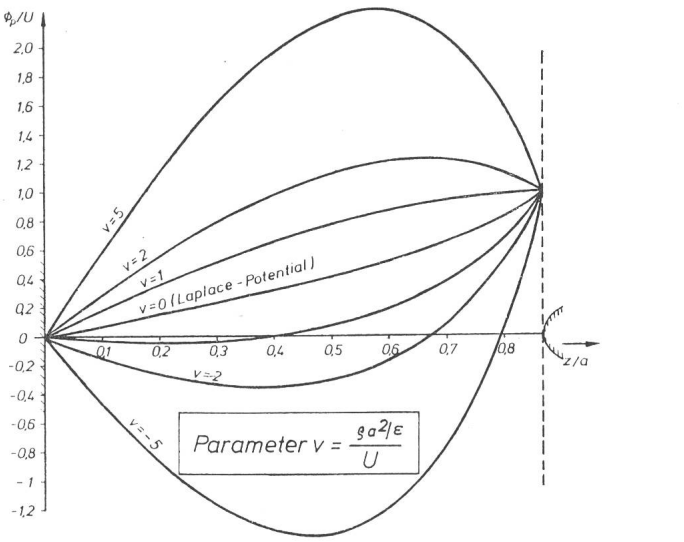

Fig. 5 Potentialverlauf auf der Rotationsachse der Anordnung Rotationshyperboloid ($\vartheta_I = 30^0$) gegen Ebene ($\vartheta_{II} = 90^0$) für verschiedene Grössen einer gleichmässigen Raumladungsverteilung (Parameter v)

mit dem Laplace-Anteil als dem ersten Term und dem Raumladungsanteil als dem zweiten Term, wie auch im Falle der beiden translatorischen Feldsysteme.

In normierter Darstellung wird

$$\Phi_P/U = \varphi_L + v \cdot \varphi_\varrho$$

$$\text{mit } \varphi_L = \frac{\ln \tan \vartheta/2}{\ln \tan \vartheta_I/2},$$

$$\varphi_\varrho = \left[-\frac{2}{9} P_2(\cos\vartheta) + \frac{1}{3}\cos^2\vartheta_I \cdot \frac{Q_2(\cos\vartheta)}{Q_2(\cos\vartheta_I)}\right] \cdot$$

$$\cdot P_2(\cosh\eta) + \frac{1}{6}\left[\cos^2\vartheta_I \cdot \frac{\ln\tan\vartheta/2}{\ln\tan\vartheta_I/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} - (\cosh^2\eta + \cos^2\vartheta)\right]$$

$$\text{sowie } v = \frac{\varrho a^2/\varepsilon}{U},$$

woraus sich längs der Potentialachse ($\eta = 0$) ein Potentialverlauf nach Fig. 5 errechnen lässt. Auch in diesem Falle zeigt sich der Effekt des Hineinschiebens des Potentialmaximums bzw. Potentialminimums in den Feldraum mit wachsender Raumladungsdichte.

Für den dazugehörigen normierten Feldstärkeverlauf wird ebenso

$$\frac{E_P}{U/a} = e_L + v \cdot e_\varrho$$

$$\text{mit } e_L = -\frac{1}{\sin^2\vartheta \cdot \ln\tan\vartheta_I/2},$$

$$e_\varrho = \frac{2}{9}\,\frac{\cos\vartheta \cdot P_2(\cos\vartheta) - P_1(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} -$$

$$-\frac{2}{3}\,\frac{\cos^2\vartheta_I}{Q_2(\cos\vartheta_I)} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot Q_2(\cos\vartheta) - Q_1(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} -$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{\cos^2\vartheta_I}{\sin^2\vartheta \ln\tan\vartheta_I/2} - \frac{1}{3}\cos\vartheta$$

sowie $v = \varrho a^2/\varepsilon U$ wie vorher, mit den daraus errechenbaren Werten nach Fig. 6. Auch im rotatorischen Beispiel zeigt sich das Schneiden der einzelnen Feldstärkekurven in einem Punkt.

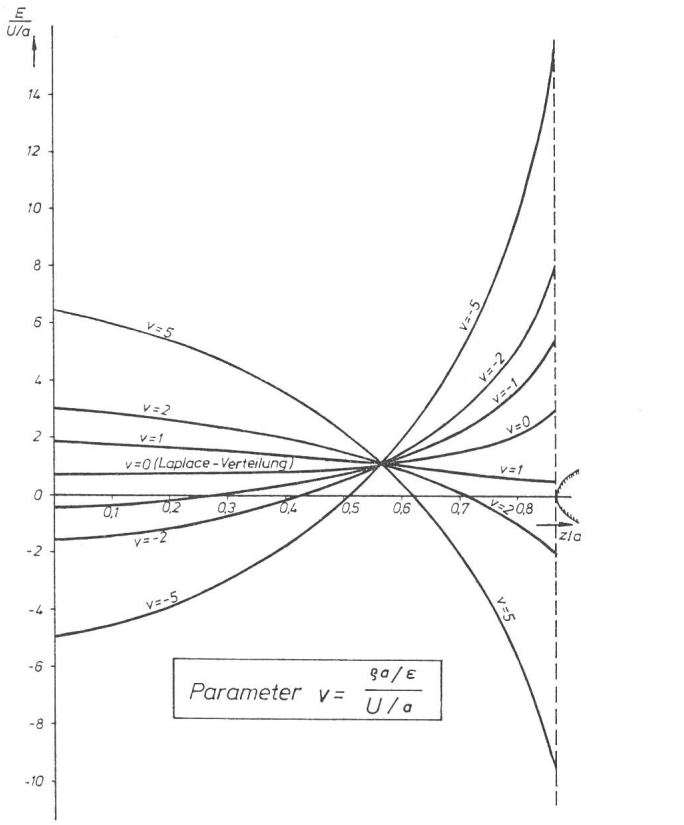

Fig. 6 Feldverlauf auf der Rotationsachse der Anordnung Rotationshyperboloid ($\vartheta_I = 30^0$) gegen Ebene ($\vartheta_{II} = 90^0$) für verschiedene Grössen einer gleichmässigen Raumladungsverteilung (Parameter v)

5. Ausblick

Obwohl in den vorgestellten drei Beispielen von einer konstanten Raumladungsdichte ausgegangen wurde, so hat sich doch erwiesen, dass die mathematischen Methoden einer Koordinatentransformation auch bei Vorhandensein von Raumladung einen interessanten Einblick in die Potential- und Feldstärkeverteilung vermitteln. Es wäre deshalb wünschenswert, noch andere Feldsysteme in dieser Form zu untersuchen, vor allem bei räumlich sich ändernder Raumladungsdichte.

Besonders interessant wäre in dieser Hinsicht die Hyperboloidspitze, die im Rahmen der Les-Renardières-Gruppe eingehender experimentell untersucht worden ist [2]. Sofern sich dabei keine geschlossenen Lösungen ergeben sollten, könnte an eine numerische Berechnung gedacht werden. In diesem Falle würden die abgeleiteten Beziehungen eine gute Hilfe sein, die dann zu erstellenden Programme zu überprüfen.

Literatur

[1] *P. Moon* and *D. E. Spencer:* Field theory for engineers. Princeton/N.J., a.o. Van Nostrand, 1961.

[2] Recherches aux Renardières sur l'amorçage de grands intervalles d'air. Electra (1972)23, p. 53...157.

Adressen der Autoren

Prof. Dr.-Ing., Dr.sc.techn. h.c. *Hans Prinz* †, TU München, und
Prof. Dr. *H. Singer*, Hochschule der Bundeswehr, Fachbereich Elektrotechnik, Holstenhofweg 85, D-2000 Hamburg 70.