

# Berechnung von Drehmomenten und Kräften in nichtlinearen elektromechanischen Elementen mit Hilfe der virtuellen Verrückung

Autor(en): Štěpina, J.

Objektyp: Article

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **71 (1980)**

Heft 23

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-905322>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Berechnung von Drehmomenten und Kräften in nichtlinearen elektromechanischen Elementen mit Hilfe der virtuellen Verrückung

Von J. Štěpina

531.232:621 313.13

Anhand einer allgemeinen Diskussion der Methode der virtuellen Verrückung wird gezeigt, dass man die Drehmomente und Kräfte in gewissen nichtlinearen elektromechanischen Elementen gleich wie bei linearen Systemen berechnen kann.

A la suite d'une discussion générale de la méthode du déplacement virtuel, on montre que les couples et les forces dans certains éléments électromécaniques non linéaires peuvent être calculés comme dans le cas de systèmes linéaires.

## 1. Einleitung

Die durch die Einführung von automatischen Rechnern gegebene Möglichkeit, elektrische Maschinen und andere geometrisch komplizierte elektromechanische Einrichtungen als Systeme von vielen Einzelementen zu betrachten, erweckt auch ein neues Interesse für die Methoden der Berechnung von Drehmomenten und Kräften. Bei den internationalen Konferenzen in Wien (1976) und Brüssel (1978) wurde das bekannte, auf der energetischen Bilanz bei der virtuellen Verrückung aufgebaute Verfahren neu diskutiert [1; 2]. Es stellte sich dabei heraus, dass sogar erfahrene Fachleute bei der Anwendung dieser Methode in Schwierigkeiten geraten können, wenn sie sich nicht auf übliche einfache Fälle beschränken. Dabei handelte es sich nur um lineare Systeme, bei welchen man das Drehmoment (oder die Kraft) als partielle Ableitung der Energie  $W_f$  des magnetischen Feldes nach der Winkellage  $\varrho$  des beweglichen Teiles im System erhält. Man schreibt oft

$$M = \partial W_f / \partial \varrho \quad (i = \text{konst.}) \quad (1)$$

oder

$$M = \partial W_f / \partial \varrho \quad (\psi = \text{konst.}) \quad (2)$$

und man findet auch Behauptungen, dass es grundsätzlich falsch sei, diese Gleichungen ohne die Anmerkungen « $i = \text{konst.}$ » oder « $\psi = \text{konst.}$ » zu schreiben ( $i = \text{Strom}$ ,  $\psi = \text{Flussverkeftung}$ ).

Im Anhang der vorliegenden Arbeit wird ausführlich gezeigt, dass diese Anmerkungen der Grundlage der Berechnungsmethode nicht entsprechen und Einschränkungen darstellen, welche nicht einmal bei der Anwendung der Methode bei nichtlinearen Systemen gerechtfertigt sind. Sie drücken nur auf eine nicht ganz klare Weise aus, welche von den beiden

Größen  $i$ ,  $\psi$  als zweite unabhängige Veränderliche (neben  $\varrho$ ) für die Energiegleichung gewählt wird. Ihre Konstanz ist durch die partielle Ableitung nach  $\varrho$  allein gegeben; physikalisch existiert diese Bedingung nicht [3].

Die wichtigste Frage, welche hier beantwortet werden soll, betrifft die nichtlinearen Systeme. Es wird gezeigt, dass man die nichtlinearen Eisenteile in vielen Fällen nur bei der Berechnung der Feldverteilung, aber nicht in der Formel für das Drehmoment berücksichtigen muss.

## 2. Virtuelle Verrückung

Die Methode der virtuellen Verrückung beruht auf der energetischen Bilanz bei einer kleinen geometrischen Änderung in dem zu untersuchenden System, welche dem gesuchten Drehmoment (oder Kraft) entsprechen würde, wenn sich das System bewegen könnte. Die Frage, ob sich das System tatsächlich bewegen kann oder nicht, ist völlig bedeutungslos. Das Drehmoment ergibt sich aus der Differenz der bei der virtuellen Verrückung aus der elektrischen Quelle  $Q$  des Systems bezogenen elementaren Energie  $dW_q$  und der Zunahme der Feldenergie  $dW_f$  nach Fig. 1 und der Gleichung

$$Md\varrho = dW_q - dW_f \quad (3)$$

Man hat jedoch unendlich viele Möglichkeiten, die energetische Bilanz nach Gl. (3) aufzustellen. Dies hängt damit zusammen, dass sie sich nicht nur auf das zu untersuchende elektromechanische Element, sondern auch auf die elektrische Energiequelle  $Q$  bezieht (Fig. 1), deren Eigenschaften, welche sehr unterschiedlich sein können, keinen Einfluss auf die gesuchte Drehmomentformel des elektromechanischen Elementes haben. Im Anhang wird dementsprechend gezeigt, dass man anhand der virtuellen Verrückung die Drehmomentformel eines elektromechanischen Elementes ohne Kenntnis der Eigenschaften der Stromquelle herleiten kann. Für die richtige Anwendung der Methode ist jedoch auch das Verständnis für die physikalischen Zusammenhänge notwendig, welche man am besten an Beispielen demonstrieren kann.

In Fig. 2 ist ein Elektromagnet mit drehbeweglichem Anker  $A$  dargestellt. Der weichmagnetische Kreis kann sich in dem gepunkteten Bereich  $S$  sättigen. Anhand der in Fig. 3 dargestellten Kennlinien des Drehmagnets, welche den Zusammenhang von  $\psi$ ,  $i$  und  $\varrho$  angeben, kann man das Drehmoment bestimmen, wenn die Ankerlage  $\varrho$  und eine der beiden anderen Größen ( $\psi$ ,  $i$ ) bekannt sind (siehe Anhang). Bei der Anwendung des Elektromagnets in einem elektromechanischen System kann man dann die vorher bestimmte Drehmomentformel in die Gleichungen des Systems direkt einführen, ohne dass

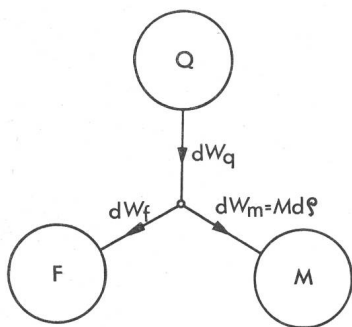


Fig. 1 Energetische Bilanz bei virtueller Verrückung

- $dW_q$  Elementare Energie des elektrischen Teiles  $Q$
- $dW_f$  Vom Feld  $F$  aufgenommene elementare Energie
- $dW_m$  Elementare mechanische Arbeit
- $M$  Drehmoment
- $\varrho$  Lage des drehbeweglichen Teiles

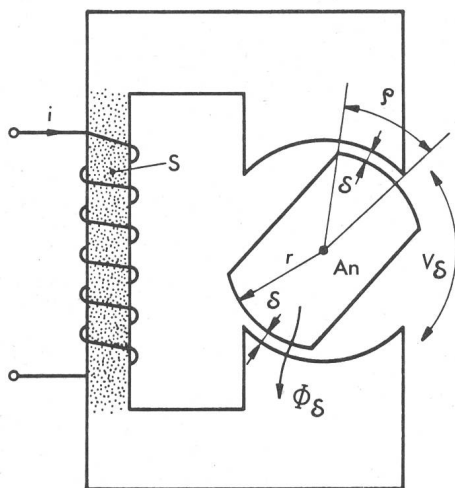


Fig. 2 Elektromagnet mit drehbarem Anker

- An Anker mit Radius  $r$
- S Gesättigter Teil des magnetischen Kreises
- $i$  Augenblickswert des Erregerstromes
- $\rho$  Ankerlage
- $V_\delta$  Magnetische Spannung zwischen den Polen
- $\Phi_\delta$  Luftspaltfluss

man irgendeine energetische Bilanz für das ganze System aufstellt und den zeitlichen Verlauf der beteiligten Spannungen und Ströme dabei verfolgt. Diese günstige Möglichkeit hängt damit zusammen, dass im Geltungsbereich des Durchflutungsgesetzes (Vernachlässigung des dielektrischen Verschiebungsflusses in der ersten Maxwell'schen Gleichung bei langsamen Vorgängen) den Augenblickswerten der zeitlich veränderlichen Ströme dieselben Kräfte wie gleich grossen Gleichströmen zugeordnet sind.

Es kommt jedoch in der Literatur vor, dass man die allgemein zulässige nützliche Trennung der Methode der virtuellen Verrückung von der Beschreibung des ganzen Systems, in welchem das elektromechanische Element eingesetzt ist, nicht ausnutzt und für das ganze System mit zeitlich veränderlichen Strömen eine Leistungsbilanz bei mechanischer Bewegung aufstellt. Dabei ist man bestrebt, die elektromechanischen Vorgänge dem tatsächlichen Betrieb des Systems gleichzusetzen. Abgesehen von einfachen Sonderfällen (z.B. Kreisfeldmaschinen beim Dauerbetrieb) führt jedoch dieses, auf der

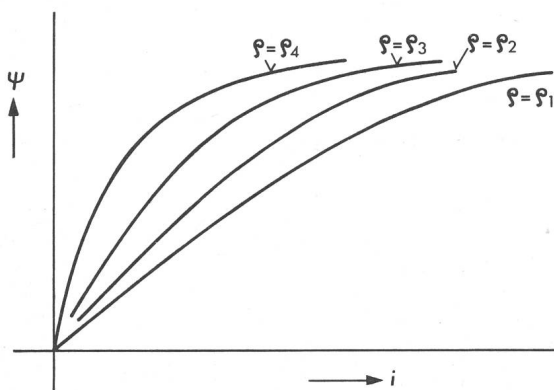


Fig. 3 Kennlinien eines nichtlinearen elektromechanischen Elementes

- $\psi$  Flussverkettung
- $i$  Erregerstrom
- $\rho$  Ankerlage (Überlappungswinkel in Figur 2)

Leistungsbilanz des ganzen Systems aufgebaute und der Methode der virtuellen Verrückung entfremdete Verfahren zu wenig übersichtlichen Gleichungssystemen und kann nicht empfohlen werden.

### 3. Nichtlineare elektromechanische Elemente

Im Abschnitt 2 und Anhang wurde gezeigt, dass man sich bei der Anwendung der virtuellen Verrückung vorteilhafterweise nur auf elektromechanische Elemente selbst beschränken kann. Es wird dadurch erreicht, dass die nichtmechanischen Elemente des Systems (z.B. ohmsche Widerstände) nur im Gleichungssystem für die Ströme vorkommen, aber die Herleitung der Drehmomentformel (oder Kennlinien) nicht belasten. Es soll nun überlegt werden, ob, wie es bisher der Fall war, nur die Klemmen des Elektromagneten in Fig. 2 als Grenze zwischen diesem Element und dem elektrischen Teil des Systems in Frage kommen.

Der magnetische Widerstand des magnetischen Kreises in Fig. 2 besteht vor allem aus dem magnetischen Widerstand der beiden Luftspalte  $\delta$  und dem nichtlinearen Widerstand des linken hochgesättigten Jochteiles S.

Die wenig gesättigten Pole und der bewegliche Anker An bilden daher praktisch ein lineares elektromechanisches Element, dessen Drehmoment nur von der magnetischen Spannung  $V_\delta$  zwischen den Polen abhängt. Im Bereich der Überlappung  $\rho$  des Ständers und Läufers steht dem Fluss  $\Phi_\delta$  (Fig. 2) der magnetische Widerstand ( $l$  = axiale Ankerlänge)

$$R_m = \frac{2 \delta}{\mu_0 l r \rho} \quad (4)$$

im Wege, und es gilt nach Gl. (24) für die Energie des Luftspaltfeldes

$$W_t(V, \rho) = \frac{1}{2} \Phi_\delta V_\delta = \frac{1}{2} \frac{V_\delta^2}{R_m} = \frac{\mu_0 l r V_\delta^2 \rho}{4 \delta} \quad (5)$$

und für das Drehmoment nach Gln. (22) und (23)

$$M = \frac{\partial W_t(V_\delta, \rho)}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 l r V_\delta^2}{4 \delta} \quad (6)$$

Die Beschränkung auf Pole und Luftspalt erleichtert die Berechnung des Drehmomentes erheblich; sie bedeutet jedoch keinesfalls eine Vernachlässigung des nichtlinearen magnetischen Kreises. Die magnetische Spannung  $V_\delta$  hängt nämlich von dem magnetischen Widerstand des gesättigten Teiles ab. Der Vorteil besteht darin, dass man die Kennlinien des nichtlinearen magnetischen Kreises nur für die Berechnung der magnetischen Spannungen im System aber nicht für die Berechnung der Momente verwenden muss. Es handelt sich nun um ein lineares elektromechanisches System, das von einer nichtlinearen Quelle der magnetischen Spannung gespeist wird.

Die eben besprochene Trennung des nichtlinearen Teiles von der Drehmomentberechnung findet man auch mit Hilfe der Kennlinie in Fig. 4, wenn man der Einfachheit halber den Streufluss der Spule und den Randfluss an den Polkanten in Fig. 2 vernachlässigt. Weil es sich in Fig. 2 um eine Reihenschaltung von zwei magnetischen Widerständen handelt, besteht die einem bestimmten Fluss  $\Phi_\delta$  entsprechende magnetische Spannung  $V$  aus dem Teil  $V_{Fe}$  des Eisens und dem der Luft  $V_\delta$  (Fig. 4). Wenn sich der Läufer um einen kleinen Winkel  $\Delta \rho$  dreht, verkleinert sich nur die linear von  $\Phi_\delta$  abhängige magnetische Spannung  $V_\delta$  und so muss die Fläche  $\Delta A$ ,

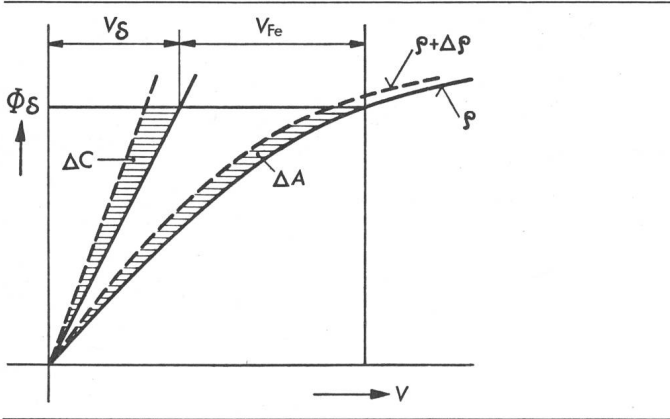


Fig. 4 Änderung der Kennlinie im linearen Anteil

- $\Phi_{\delta}$  Luftspaltfluss
- $V$  Magnetische Spannung der Erregerspule
- $V_{\delta}$  Magnetische Spannung zwischen den Polen
- $V_{Fe}$  Magnetische Spannung am gesättigten Teil
- $\Delta \rho$  Endlich kleine Änderung der Ankerlage

welche die Änderung der ganzen Kennlinie darstellt, der Fläche  $\Delta C$  des linearen Teiles gleich sein.

Für den in Fig. 2 und 4 dargestellten Fall und die Möglichkeit der Trennung des nichtlinearen Teiles von der Drehmomentberechnung ist grundlegend, dass die geometrischen Abmessungen des nichtlinearen gesättigten Eisenteiles von der Drehbewegung des Läufers unabhängig sind. Grundsätzlich anders wirkt sich die Sättigung der Polschuhe im Bereich der Überlappung  $\varrho$  des Ständers und Läufers aus (Fig. 5). Der gesättigte Eisenteil entsteht nur durch die Konzentration des Flusses  $\Phi_{\delta}$  an der Stelle des Überganges von einem Teil des magnetischen Kreises zum anderen und ist daher nicht genau abgegrenzt. Eindeutig ist nur die qualitative Aussage, dass sich der Querschnitt des gesättigten Teiles mit dem Überlappungswinkel  $\varrho$  annähernd gleich wie der Luftweg im Luftspalt selbst vergrößert. Nimmt man der Einfachheit halber an, dass sich die Länge des gesättigten Teiles bei der Läuferbewegung nicht vergrößert, ändert sich die Kennlinie  $\Phi_{\delta} = f(V)$  nach Fig. 6. Der Verlauf der Flusszunahme  $\Delta \Phi_{\delta}(V)$  ist in jedem Punkt proportional der ursprünglichen Kennlinie  $\Phi_{\delta}(V)$  und ist daher auch nichtlinear. Die dem Drehmoment proportionale Fläche  $\Delta B$  ist grösser als bei der linearen Kennlinie (gestrichelt

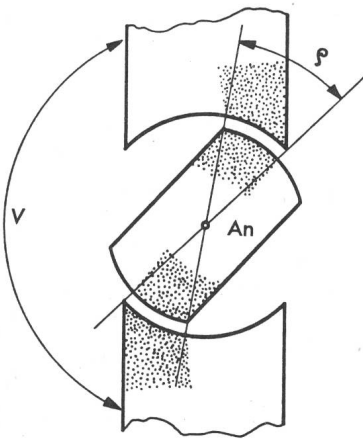


Fig. 5 Sättigung der Polkanten

- $\varrho$  Überlappungswinkel (Ankerlage)
- $V$  Magnetische Spannung der Flussquelle

unten in Fig. 6), welche bei einer bestimmten Erregung  $V$  derselben Zunahme  $\Delta \Phi_{\delta}$  des Flusses entspricht. Es darf jedoch nicht zu der Annahme verleiten, dass gesättigte Kanten das Drehmoment vergrößern. Ohne Sättigung wären die in Fig. 6 dargestellten Kennlinien  $\Phi_{\delta}(V)$  und  $\Delta \Phi_{\delta}(V)$  wesentlich steiler und die Flusswerte dementsprechend grösser. Es ist nur eine gewisse Vergrößerung des Drehmomentes gegenüber der auf den Formeln der linearen Theorie aufgebauten Rechnung, in welcher jedoch die magnetischen Flüsse des gesättigten magnetischen Kreises eingesetzt werden. Eine praktische Ausnutzung dieses Effektes findet man in [4].

#### 4. Zusammenfassung

Ohne Einschränkungen bezüglich der Konstanz bzw. des zeitlichen Verlaufes der Ströme oder Flussverkehtungen wurden die Formeln (14) und (18) hergeleitet, nach welchen man die Drehmomente in nichtlinearen elektromechanischen Elementen berechnen kann; für lineare Systeme gelten die bekannten Gln. (21) und (22). Die paarweise hergeleiteten Formeln unterscheiden sich durch die Wahl der zweiten unabhängigen Veränderlichen  $i$  oder  $\psi$  und führen zu gleichen Ergebnissen.

Man kann die Drehmomente bei nichtlinearen Elementen gleich wie bei linearen Systemen berechnen, wenn sich die geometrischen Abmessungen des nichtlinearen gesättigten Eisenteiles bei der virtuellen Verrückung nicht ändern und der nichtlineare Teil des magnetischen Kreises nur die Grösse der magnetischen Spannung an dem veränderlichen linearen Teil (Luftspalt) des Flussweges beeinflusst.

#### Anhang: Herleitung der Drehmomentformel

Der in Fig. 2 dargestellte Elektromagnet ist ein charakteristisches Beispiel eines nichtlinearen elektromechanischen Elementes. Seine Eigenschaften sind ausreichend beschrieben durch die Kennlinien in Fig. 3, welche entweder als

$$\psi = \psi(i, \varrho) \quad \text{oder} \quad i = i(\psi, \varrho) \quad (7, 8)$$

gedeutet werden können. Für die Energie, welche in dem magnetischen Kreis gespeichert ist und der schraffierten Fläche  $A$  in Fig. 7 entspricht, kann man schreiben

$$W_t = \int_0^{\psi} i(\psi, \varrho) d\psi = \text{Fläche } A \quad (9)$$

oder nach der partiellen Integration

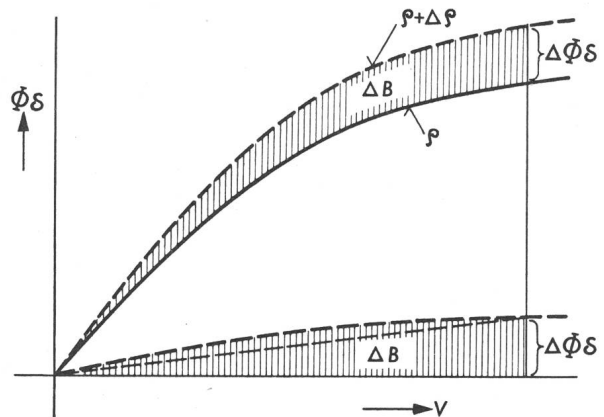


Fig. 6 Änderung der Kennlinie bei gesättigten Polkanten

- $\Phi_{\delta}$  Luftspaltfluss
- $\varrho$  Überlappungswinkel (Ankerlage)
- $V$  Magnetische Spannung der Flussquelle

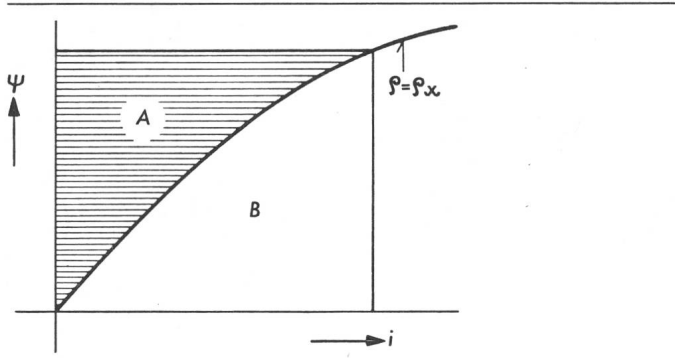


Fig. 7 Energie des magnetischen Feldes als Fläche A über der Kennlinie

$\psi$  Flussverketzung  
 $i$  Erregerstrom  
 $\varrho_x$  Ankerlage (Index  $x$  bedeutet «eine bestimmte, aber sonst beliebige»)

$$W_t = i\psi - \int_0^i \psi(i, \varrho) di = \text{Fläche } (A + B) - \text{Fläche } B \quad (10)$$

Bei einer elementaren Änderung der Ankerlage um  $d\varrho$  (virtuelle Verrückung) vergrößert sich die durch Gl. (9) gegebene Feldenergie  $W_t$  als Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen um

$$dW_t = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \int_0^\psi i(\psi, \varrho) d\psi \right] d\psi + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^\psi i(\psi, \varrho) d\psi \right] d\varrho = i(\psi, \varrho) d\psi + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^\psi i(\psi, \varrho) d\psi \right] d\varrho \quad (11)$$

Bei dieser Änderung der Läuferlage  $d\varrho$  liefert die Stromquelle  $Q$  (Fig. 1) die elementare elektrische Energie ( $t = \text{Zeit}$ )

$$dW_q = i(\psi, \varrho) \frac{d\psi}{dt} dt = i(\psi, \varrho) d\psi \quad (12)$$

und die mechanische Arbeit des Drehmomentes ergibt sich dann als Differenz der beiden Energien (Gl. 3)

$$Md\varrho = - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^\psi i(\psi, \varrho) d\psi \right] d\varrho \quad (13)$$

Das gefundene Drehmoment

$$M = - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^\psi i(\psi, \varrho) d\psi \right] \quad (14)$$

entspricht dem Grenzwert des Verhältnisses  $\Delta A/\Delta\varrho$  für  $\Delta\varrho \rightarrow 0$ , wobei  $\Delta A$  die schraffierte Abnahme der Fläche  $A$  in Fig. 8 ist.

An ein analoges Ergebnis gelangt man, wenn man den Strom als zweite unabhängige Veränderliche behält und ausgehend von Gl. (10) schreibt

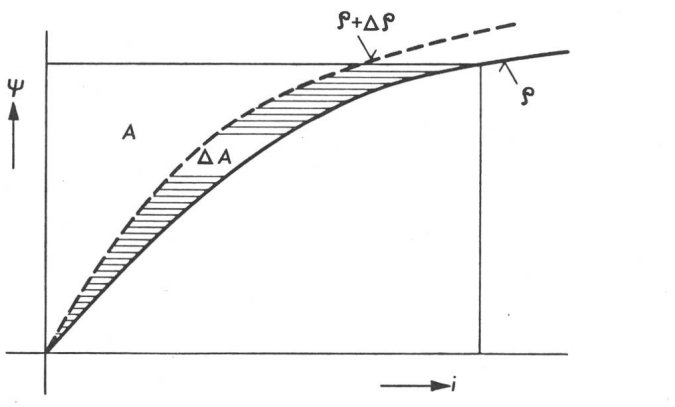


Fig. 8 Abnahme der Feldenergie

$\Delta A$  Abnahme der Fläche  $A$  bei Änderung der Ankerlage  
 $\Delta\varrho$  Endlich kleine Änderung der Ankerlage  $\varrho$

$$dW_t = i d\psi(i, \varrho) + \psi(i, \varrho) di - \left\{ \frac{\partial}{\partial i} \left[ \int_0^i \psi(i, \varrho) di \right] di + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^i \psi(i, \varrho) di \right] d\varrho \right\} = i d\psi(i, \varrho) - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^i \psi(i, \varrho) di \right] d\varrho \quad (15)$$

Für die gelieferte Energie der Quelle gilt (ausgedrückt durch  $i$  und  $\varrho$ )

$$dW_q = i d\psi = i d\psi(i, \varrho) \quad (16)$$

und aus der Differenz ergibt sich die elementare Arbeit des Drehmomentes

$$Md\varrho = dW_q - dW_t = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^i \psi(i, \varrho) di \right] d\varrho \quad (17)$$

und das Drehmoment selbst in der Form

$$M = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^i \psi(i, \varrho) di \right] \quad (18)$$

Das Drehmoment ist gegeben durch den Grenzwert des Verhältnisses  $\Delta B/\Delta\varrho$  für  $\Delta\varrho \rightarrow 0$ , wobei  $\Delta B$  die schraffierte Zunahme der Fläche  $B$  in Fig. 9 ist. Die Fläche  $\Delta B$  ist grösser als  $\Delta A$  in Fig. 8 um das doppelt schraffierte Dreieck  $\Delta C$  in Fig. 9, welches jedoch für den Übergang zum Grenzwert ( $\Delta \rightarrow 0$ ) als klein von zweiter Ordnung keine Bedeutung hat.

Wenn es sich um lineare Systeme handelt, gilt

$$\psi = iL(\varrho) \quad \text{bzw.} \quad i = \psi L^{-1}(\varrho) \quad (19, 20)$$

Aus Gln. (14) und (20) folgt

$$M = - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^\psi \psi L^{-1}(\varrho) d\psi \right] = - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ L^{-1}(\varrho) \frac{1}{2} \psi^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L^2(\varrho)} \frac{\partial L(\varrho)}{\partial \varrho} = \frac{1}{2} \frac{\partial L(\varrho)}{\partial \varrho} i^2 = \frac{\partial W_t(i, \varrho)}{\partial \varrho} \quad (21)$$

Nach Gln. (18) und (19) gilt ganz analog

$$M = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \int_0^i iL(\varrho) di \right] = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \frac{1}{2} L(\varrho) i^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial L(\varrho)}{\partial \varrho} i^2 = \frac{\partial W_t(i, \varrho)}{\partial \varrho} \quad (22)$$

Auch bei der Herleitung von Gln. (21) und (22) wurde keine Konstanz der beteiligten Größen vorausgesetzt. Entscheidend ist nur, welche von den Größen  $i$  und  $\varrho$  als die zweite unabhängig Veränderliche bei dem Differenzieren genommen wird. Der zeitliche Verlauf kann nachträglich eingeführt werden. Als Ströme  $i$  oder Flussverkettungen  $\psi$  dürfen jedoch keine fiktiven Größen eingeführt werden, welche Koordinatentransformation mit  $\varrho$  enthalten. Die Gln. (21) und (22) können direkt in Matrizenform für eine beliebige Anzahl von Spulen mit Gegeninduktivitäten verallgemeinert werden.

In Gln. (14) und (18) kommt das Produkt  $\psi \cdot i$  vor. Wenn der Fluss des geometrisch veränderlichen Teiles mit allen Windungen  $w$  der Spule gleich verkettet ist, kann man schreiben

$$\psi \cdot i = w\Phi i = \Phi V \quad (23)$$

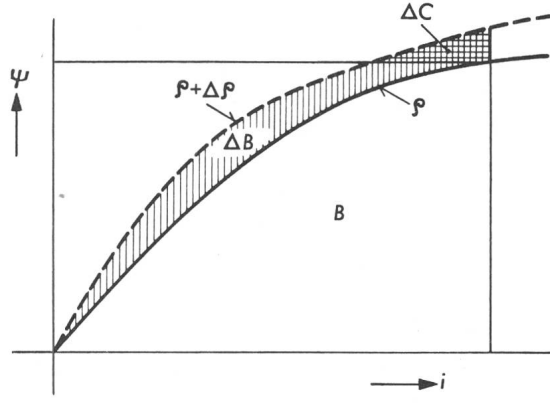


Fig. 9 Zunahme der Fläche B unter der Kennlinie

$\Delta\varrho$  Endlich kleine Änderung der Ankerlage

wobei  $V$  die magnetische Spannung der Spule bedeutet. Weil man dabei eigentlich nur die Spule mit  $w$  Windungen auf eine einzige Windung umrechnet, kann man in allen Gleichungen und Bildern die Flussverkettung  $\psi$  durch den Fluss  $\Phi$  und den Strom  $i$  durch die magnetische Spannung  $V$  gleichzeitig ersetzen. Z. B. ist dann die Energie des magnetischen Feldes in linearen Elementen

$$W_f = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} \Phi V \quad (24)$$

Diese Schreibweise ist zweckmässig, wenn man einzelne Teile des magnetischen Kreises getrennt von der Quelle der magnetischen Erregung betrachtet.

#### Literatur

- [1] *K. Oberrettl*: Calculation of forces from magnetic energy by virtual displacement. Proceedings of the International Conference on Electrical Machines, Vienna, 1976; Report D19.
- [2] *P. Hammond*: Calculation of torque in electrical machines by Lagrangian methods. Proceedings of the International Conference on Electrical Machines, Brussels, 1978; Report G3/3.
- [3] *A. E. Fitzgerald, C. Kingsley and A. Kusko*: Electric Machinery. Third edition. New York, McGraw-Hill, 1971.
- [4] *J. Jarret*: Dynamo-electric machines. British Patent No. 940233, 1963.

#### Adresse des Autors

O. Prof. Dr.-Ing. *Jaroslav Štěpina* Dr. Sc., Universität Kaiserslautern, D-6750 Kaiserslautern.