

# Numerische Berechnungen geführter Wellenausbreitung

Autor(en): **Hafner, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **76 (1985)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-904536>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Numerische Berechnung geführter Wellenausbreitung

Ch. Hafner

*Die Multiple-Multipol-(MMP-)Methode, deren breite Anwendung in einem früheren Artikel [1] bereits vorgestellt wurde, hat sich in letzter Zeit als besonders geeignet zur Berechnung der Wellenausbreitung auf zylindrischen Strukturen erwiesen. In diesem Beitrag wird sie mit anderen heute gebräuchlichen Verfahren verglichen. Zudem werden die gemeinsamen Grundlagen all dieser Verfahren skizziert und die Entwicklung der MMP-Methode kurz dargestellt.*

*La méthode des multipôles multiples (MMP), dont l'application étendue a déjà été exposée [1], s'est avérée particulièrement appropriée, ces derniers temps, au calcul de la propagation des ondes le long des structures cylindriques. Dans le présent article, elle est comparée à d'autres méthodes usuelles. En outre, les bases communes de toutes ces méthodes sont esquissées et le développement de la méthode MMP est brièvement expliqué.*

## 1. Allgemeine Bemerkungen über Computer-Feldberechnungen

Der Ingenieur, der zur Lösung seiner Probleme einen Computer einsetzt, findet oft, dass die vorhandenen Programme zu wenig können. Auf der andern Seite stellt der Entwickler solcher Programme fest, dass damit vieles berechnet werden kann, was technisch (noch) nicht realisierbar ist. Woher rührt diese Diskrepanz?

Der Programmentwickler bemüht sich, möglichst wenig Einschränkungen zu machen, um einen möglichst grossen Anwendungsbereich zu erhalten. Sein Ideal ist ein Universalprogramm, mit dem sich alles berechnen lässt, wenn nur ein genügend grosser Rechner vorhanden ist. Da aber ein solcher oft nicht zur Verfügung steht, ergibt sich eine Einschränkung des Anwendungsbereichs, die durch die angestrebte Universalität noch verschärft wird. Oft gilt deshalb der paradoxe Satz: je universeller ein Programm, desto eingeschränkter sein Anwendungsbereich. Trotz der ständig wachsenden Leistungsfähigkeit moderner Rechenanlagen sind vereinfachende Annahmen wesentlich für die Brauchbarkeit eines Programms.

Der Anwender seinerseits denkt meist erst dann daran, einen Computer zu benützen, wenn ihm die Probleme über den Kopf wachsen. Auch schätzt er die Stärken und Schwächen von Rechenanlagen oft falsch ein. Speichergrosse, Rechengeschwindigkeit und Rechengenauigkeit einzelner Operationen vermitteln die Illusion, dass der Computer für die genaue Berechnung komplizierter Anordnungen besonders geeignet sei. Gerade solche Probleme überfordern aber oft die grössten Rechenanlagen, da der Aufwand mit zunehmender Komplexität des Problems und mit der gewünsch-

ten Rechengenauigkeit enorm stark zunimmt. Andererseits wird die Tatsache, dass der Computer praktisch nicht realisierte Anordnungen berechnen und deshalb bei kreativen Prozessen sehr hilfreich sein kann, gerne übersehen.

Gegenwärtig existiert eine grosse Zahl von Programmen zur Feldberechnung, die in einige wenige Gruppen eingeteilt werden können. Eine Gegenüberstellung ist, der Übersicht wegen, sicher erwünscht. Es muss dabei betont werden, dass die Qualität von Computerprogrammen weniger von den Grundideen als von der numerischen Behandlung abhängt, weshalb hier nur grobe Aussagen gemacht werden können.

## 2. Einteilung und Vergleich von Methoden der Feldberechnung

Eine grosse Gruppe von Programmen beinhaltet im wesentlichen eine Automatisierung der Tätigkeit eines Technikers, der in Tabellen nachschlägt, in Kurvenscharen Arbeitspunkte bestimmt usw. Diese heuristischen Programme basieren auf Messungen und daraus abgeleiteten Formeln. Sie sind praxisorientiert und billig. Sie können jedoch nicht ausserhalb eines gewissen Erfahrungsbereichs verwendet werden, da ihnen das theoretische Fundament fehlt.

Theoretisch begründete Methoden lassen sich weiter unterteilen. Ausgangspunkt für alle elektromagnetischen Vorgänge und damit für alle theoretischen Rechnungen sind die Maxwell'schen Gleichungen. Diese enthalten jedoch keine Aussagen über die Geometrie und die Materialeigenschaften einer gegebenen Anordnung. Die mathematische Formulierung dieser Daten führt zusammen mit allfälligen Umformungen der Maxwell'schen

### Adresse des Autors

Dr. Ch. Hafner, Gruppe für elektromagnetische Felder, Institut für Elektronik, ETH Zentrum, 8092 Zürich.

Gleichungen auf ein Modell, in dem gewisse Feldgrößen *innerhalb* bestimmter Gebiete den Feldgleichungen (FG) und auf den *Rändern* dieser Gebiete bestimmten Randbedingungen (RB) unterworfen sind. Es ist nicht nötig, dass alle interessierenden Größen in diesem Modell zum vorneherein explizit vorhanden sind. Oft wird z.B. mit Potentialen gerechnet, aus denen nachträglich die elektrischen und magnetischen Feldstärken bestimmt werden. Da die FG und die RB analytisch oder numerisch weiterbehandelt werden können, ergibt sich folgende Einteilung:

**Analytische Methoden:** Sowohl die FG als auch die RB werden analytisch weiterbehandelt. Da eine vollständig analytische Lösung in den seltensten Fällen gelingt, werden auch jene Methoden als analytisch bezeichnet, bei denen eine analytische Lösung wenigstens angestrebt wird, wie z.B. bei den konformen Abbildungen. Diese Methoden führen meist nicht auf Gleichungssysteme, welche numerisch gelöst werden müssen, so dass der Speicherplatzbedarf relativ klein ist. Statt dessen sind oft aufwendige numerische Integrationen durchzuführen. Da der Anwendungsbereich stark eingeschränkt ist, sind die analytischen Methoden in der Praxis von geringem Interesse. Ihr Vorteil besteht in der hohen Rechengenauigkeit; sie werden deshalb gerne zur Kontrolle anderer Programme herangezogen.

**Semianalytische Methoden:** Die FG werden analytisch, die RB jedoch, so gut wie möglich, numerisch erfüllt. Dazu werden die Feldgrößen durch Funktionenreihen angenähert. Die in diesen Reihen enthaltenen Parameter werden numerisch so bestimmt, dass die RB mit einer gewissen Genauigkeit erfüllt werden. Beispiele sind das Bildladungsverfahren und die Teilflächenmethode der Elektrostatik, die Point-Matching-Technik und die MMP-Methode [2]. Diese Verfahren haben folgende Eigenschaften: Die Matrizen sind relativ klein und dicht, die Rechengenauigkeit ist recht hoch, nur der Rand wird diskretisiert, der Fehler wird in der Nähe des Randes maximal, die Feldgrößen sind durch Reihen analytisch gegeben. Da diese Methoden nur bei eher einfachen FG brauchbar sind, ist der Anwendungsbereich etwas eingeschränkt. Vorteile ergeben sich vor allem dann, wenn eine relativ hohe Rechengenauigkeit gewünscht wird, die Ränder eher einfach sind, Fernfeldrechnungen angestrebt wer-

den, offene Gebiete vorhanden sind und, vor allem, wenn aus den Feldgrößen andere Größen abgeleitet (oder integriert) werden müssen. Sind nichtlineare Materialien vorhanden, so versagen diese Methoden.

**Seminumerische Methoden:** Hier ist das Vorgehen zu den semianalytischen Methoden komplementär. Die Feldgrößen werden in eine Reihe von Funktionen entwickelt, welche die RB erfüllen, und die darin enthaltenen Parameter werden numerisch so bestimmt, dass die FG möglichst genau gelten. Da die RB meist sehr einfach sind, ergibt sich eine enge Verwandtschaft mit den numerischen Methoden, und eine spezielle Diskussion erübrigt sich. Ein Beispiel ist die Momentenmethode [3] in ihrer ursprünglichsten Form. Praktisch werden aber damit meist Feldgrößen bestimmt, welche auf die Ränder beschränkt sind. (Oberflächenströme, Oberflächenladungen usw.) Dadurch wird die Momentenmethode zu einer Verallgemeinerung der Teilflächenmethode, d.h. zu einer semianalytischen Methode.

**Numerische Methoden:** Sowohl die FG als auch die RB werden numerisch behandelt. Die wichtigsten Vertreter sind hier das Finite-Differenzen-Verfahren, bei dem die FG und die RB diskretisiert werden, und das Finite-Elemente-Verfahren, bei dem man das Feldgebiet in Elemente unterteilt, in denen die Feldgrößen durch einfache Funktionen approximiert werden. Diese Methoden haben einen grossen Anwendungsbereich; so können auch Probleme mit nichtlinearen Materialien (Hysterese!) berechnet werden. Den Vorteilen stehen folgende Nachteile gegenüber: Es treten sehr grosse, dünn besetzte Matrizen auf, die Netzgeneration wird sehr aufwendig und muss vom Computer unterstützt werden, die Konvergenz kann schlecht sein, die FG können sich als unbrauchbar erweisen und müssen dann analytisch umgeformt werden, offene Gebiete erfordern spezielle Methoden.

Da in der Elektrodynamik, insbesondere bei Wellenleitern, nichtlineare Materialien selten verwendet werden, ist der Hauptvorteil der numerischen Methoden nicht wesentlich. Die meisten heute bekannten Programme zur Berechnung geführter Wellen basieren auf denselben einschränkenden Annahmen, die im folgenden Abschnitt diskutiert werden. Es gibt kein Verfahren, das die übrigen eindeutig übertrifft, sondern eine deutliche Tendenz

zur Vermischung und Kombination unterschiedlicher Methoden.

### 3. Maxwell'sche Gleichungen, Einschränkungen

Ausgangspunkt für die Berechnung elektromagnetischer Felder sind meist die Maxwell'schen Gleichungen für *ruhende* Medien:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t) \quad (1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1d)$$

Das sind zwei vektorielle und zwei skalare Differentialgleichungen für die fünf vektoriellen Feldgrößen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  und die skalare Feldgrösse  $\varrho$ , welche vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und der Zeit  $t$  abhängen. Unter Verwendung eines bestimmten Koordinatensystems erhält man acht Differentialgleichungen für 16 (skalare) Feldkomponenten, welche von vier Koordinaten abhängen. Damit ist eine riesige Datenmenge zu behandeln, welche selbst die Möglichkeit der grössten Rechenanlage übersteigt.

Die Maxwell-Gleichungen gelten universell. Ein konkretes Problem wird erst durch die Materialgleichungen, d.h. Abhängigkeiten zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  (Dielektrizität),  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  (Permeabilität) sowie  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{j}$  (Leitfähigkeit) charakterisiert. Glücklicherweise sind sehr viele technisch gebräuchliche Materialien in guter Näherung *homogen*, *linear* und *isotrop*. Es gilt also  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , wobei die Materialgrößen  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  skalar und konstant innerhalb dieser Materialien sind. In fast allen Programmen zur Berechnung geführter Wellen wird deshalb vorausgesetzt,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  seien bereichsweise konstant und skalar.  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , und  $\mathbf{j}$  können so leicht aus den Maxwell'schen Gleichungen eliminiert werden. Für das Gebiet  $G_K$  mit  $\varepsilon_K$ ,  $\mu_K$ ,  $\sigma_K$  gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \mu_K \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left( \sigma_K + \varepsilon_K \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) / \epsilon_k \quad (2c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2d)$$

Die Entkopplung dieser Differentialgleichungen führt auf zwei vektorielle Wellengleichungen:

$$\left( \Delta - \mu_k \sigma_k \frac{\partial}{\partial t} - \mu_k \epsilon_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{grad} \rho(\mathbf{r}, t) / \epsilon_k \quad (3a)$$

$$\left( \Delta - \mu_k \sigma_k \frac{\partial}{\partial t} - \mu_k \epsilon_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3b)$$

Die Gleichung für das  $\mathbf{E}$ -Feld ist inhomogen. Ihre allgemeine Lösung entsteht durch Überlagerung einer speziellen Lösung dieser Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, welche identisch ist mit der Differentialgleichung für  $\mathbf{H}$ . Die Inhomogenität  $\operatorname{grad} \rho(\mathbf{r}, t) / \epsilon_k$  enthält die Raumladungsdichte  $\rho$ , d. h. die eigentliche Quelle des elektromagnetischen Felds. Interessiert man sich nicht für die Anregung, sondern für die Ausbreitung von Wellen, so sucht man nur nach den homogenen Lösungen, d. h. man setzt  $\rho = 0$ , bzw. man nimmt an, die Anregung der untersuchten Wellen sei ausserhalb des betrachteten Feldgebiets. Die Anregung ist jedoch noch insofern von Interesse, als sie die Zeitabhängigkeit der Felder bestimmt. Die Fourieranalyse erlaubt die Zerlegung einer beliebigen Zeitfunktion in sinusförmige Funktionen. Bequemerweise werden komplexe Amplituden eingeführt:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \right\}, \quad (4)$$

wobei  $\mathbf{X}$  einen beliebigen Feldvektor und  $\underline{\mathbf{X}}$  die zugehörige komplexe Amplitude bezeichnet.

Aus den vierdimensionalen Wellengleichungen erhält man damit die folgenden dreidimensionalen Helmholtz-Gleichungen:

$$(\Delta + \underline{k}^2) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5a)$$

$$(\Delta + \underline{k}^2) \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5b)$$

wobei:

$$\underline{k}^2 = i\omega \mu_k \sigma_k + \omega^2 \mu_k \epsilon_k \quad (6)$$

#### Zylindrische Probleme

Bei zylindrischen Problemen verwendet man Zylinderkoordinaten

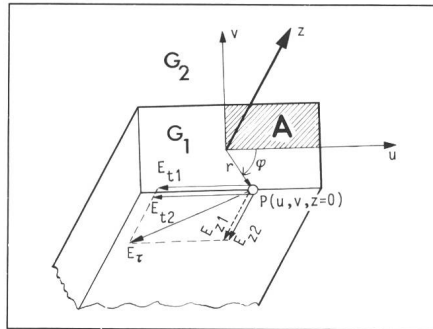


Fig. 1 Rechteckiger dielektrischer Wellenleiter

$G_1$	Gebiet mit $\epsilon_1, \mu_0, \sigma = 0$
$G_2$	Gebiet mit $\epsilon_2, \mu_0, \sigma = 0$
A	für Feldlinienbilder verwendeter Ausschnitt
$z$	Zylinderachse
$u, v$	beliebige, evtl. krummlinige Koordinaten der Transversalebene $z = 0$
$r, \varphi$	Polarkoordinaten
$\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$	$\mathbf{E}$ - bzw. $\mathbf{H}$ -Vektor tangential zur Begrenzungsfläche
$E_t, H_t$	Komponenten von $\mathbf{E}_t$ und $\mathbf{H}_t$ in Transversalebene bzw. in $z$ -Richtung

In P wird verlangt, dass  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $E_{z1} = E_{z2}$ ,  $H_{t1} = H_{t2}$  und  $H_{z1} = H_{z2}$  ist.

$(u, v, z)$  mit der  $z$ -Koordinate in Richtung der Zylinderachse und den beiden übrigen Koordinaten senkrecht dazu (Fig. 1). Die  $z$ -Abhängigkeit lässt sich separieren:

$$\mathbf{X}(u, v, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{\mathbf{X}}(u, v) e^{i(\underline{\gamma}z - \omega t)} \right\} \quad (7)$$

Dabei ist  $\underline{\gamma} = \beta + i\alpha$  die bekannte Fortpflanzungskonstante,  $\beta$  die Phasenkonstante und  $\alpha$  die Dämpfungskonstante.

Es muss betont werden, dass die Voraussetzungen zylindrischer Geometrie und sinusförmiger Zeitabhängigkeit für die Definition der Fortpflanzungskonstanten  $\underline{\gamma}$  wesentlich sind. Neben der offensichtlichen Reduktion der dreidimensionalen auf zweidimensionale Helmholtz-Gleichungen ergibt sich eine viel weitergehende Vereinfachung: Es genügt, zwei skalare, zweidimensionale Helmholtz-Gleichungen für die beiden Longitudinalkomponenten  $E_z, H_z$  zu erfüllen:

$$(\Delta_{uv} + \underline{\kappa}^2) \underline{E}_z(u, v) = 0 \quad (8a)$$

$$(\Delta_{uv} + \underline{\kappa}^2) \underline{H}_z(u, v) = 0 \quad (8b)$$

Dabei ist  $\Delta_{uv}$  der transversale Laplace-Operator und

$$\underline{\kappa}^2 = \underline{k}^2 - \underline{\gamma}^2 \quad (9)$$

Die Querkomponenten  $\underline{E}_u, \underline{E}_v, \underline{H}_u, \underline{H}_v$  lassen sich aus  $\underline{E}_z, \underline{H}_z$  ableiten. Dies ist der übliche Weg zur Berechnung zylindrischer Wellenfelder.

Durch Störungsrechnung und den sogenannten Coupled-Mode-Formalismus können einzelne der hier gemachten Annahmen wieder fallengelassen werden. Umgekehrt werden häufig noch folgende zusätzlichen Voraussetzungen gemacht:

- Ist überall die Leitfähigkeit  $\sigma_k$  entweder sehr gross oder sehr klein, so ermöglicht die Idealisierung  $\sigma \rightarrow \infty$  (ideale Leiter) oder  $\sigma = 0$  (ideale Dielektrika/Magnetika) eine reelle Rechnung mit  $\alpha = 0, \gamma = \beta$  (verlustfreie Wellenausbreitung).

- In der Optik wird häufig  $\mu_k = \mu_0$  für alle Gebiete  $G_k$  gesetzt, was allerdings keine wesentliche Vereinfachung ergibt.

Neben der Zylindersymmetrie werden folgende geometrischen Symmetrien ausgenutzt:

- Planare Probleme ermöglichen eine eindimensionale Rechnung unter Verwendung kartesischer Koordinaten,

- Rotationssymmetrie ermöglicht eine eindimensionale Rechnung unter Verwendung von Polarkoordinaten,
- Symmetrieachsen, zyklische Symmetrien usw. ergeben zum Teil eine erhebliche Reduktion des Rechenaufwands [4].

- Bei verschiedenen Wellenleitern treten TM- und TE-Wellen mit  $H_z = 0$  bzw.  $E_z = 0$  auf. Für diese bleibt nur eine Helmholtz-Gleichung zu lösen.

## 4. Die Multiple-Multipol-Methode

Die Entwicklung der MMP-Methode zeigt sehr deutlich, dass für den Erfolg eines numerischen Verfahrens nicht die Grundidee, sondern die Behandlung einer grossen Zahl von Nebenproblemen ausschlaggebend ist. Ausgangspunkt war die sogenannte Point-Matching-Technik, ein semianalytisches Verfahren, welches schon sehr früh Verwendung fand. Teilweise unbefriedigende numerische Ergebnisse führten dazu, dass andere Methoden vorgezogen wurden [5]. Eine konsequente Verbesserung führte jedoch auf die viel flexiblere MMP-Methode, welche durchaus eine interessante Alternative zu den bekanntesten numerischen Verfahren ist.

Es würde zu weit führen, hier diese Methode ausführlich darzustellen. Zur Illustration wird das einfache Beispiel

eines verlustfreien rechteckigen dielektrischen Drahtes (Fig. 1) betrachtet, welches auch schon mit Hilfe der Point-Matching-Technik untersucht wurde [6]:

Die Logitudinalkomponenten  $E_z$ ,  $H_z$  werden im Innern (Gebiet  $G_1$ ) durch eine Reihe von Besselfunktionen  $J_k$  und ausserhalb des Drahtes ( $G_2$ ) durch eine Reihe von modifizierten Hankelfunktionen  $K_k$  angenähert:

$$E_{z1}(r, \varphi) = A_0 J_0(\kappa_1 r) + \sum_{k=1}^N A_k J_k(\kappa_1 r) \cos k\varphi + B_k J_k(\kappa_1 r) \sin k\varphi \quad (10a)$$

$$H_{z1}(r, \varphi) = C_0 J_0(\kappa_1 r) + \sum_{k=1}^N C_k J_k(\kappa_1 r) \cos k\varphi + D_k J_k(\kappa_1 r) \sin k\varphi \quad (10b)$$

$$E_{z2}(r, \varphi) = a_0 K_0(|\kappa_2| r) + \sum_{k=1}^N a_k K_k(|\kappa_2| r) \cos k\varphi + b_k K_k(|\kappa_2| r) \sin k\varphi \quad (10c)$$

$$H_{z2}(r, \varphi) = c_0 K_0(|\kappa_2| r) + \sum_{k=1}^N c_k K_k(|\kappa_2| r) \cos k\varphi + d_k K_k(|\kappa_2| r) \sin k\varphi \quad (10d)$$

mit

$$\kappa_1 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - \beta^2} \quad (11a)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - \beta^2} \quad (11b)$$

$\kappa_1$  ist reell,  $\kappa_2$  imaginär. Wegen  $\sigma = 0$  wird  $\underline{\gamma} = \beta$  und  $\alpha = 0$ . Ausserdem ist  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Sind die Koeffizienten  $A_k$ ,  $B_k$  usw. reell, so werden damit die Longitudinalkomponenten reell; sie erfüllen die FG, d.h. die zweidimensionalen Helmholtz-Gleichungen.  $r$ ,  $\varphi$  sind Variable eines Polarkoordinatensystems mit Ursprung im Zentrum des Rechtecks.

Die in diesem Ansatz enthaltenen  $8N+4$  Parameter werden so bestimmt, dass die RB in  $2N+1$  Punkten auf dem Rand, den sogenannten Matching-Punkten, erfüllt werden. Als RB gelten hier die Stetigkeitsbedingungen für die vier Tangentialkomponenten von  $\underline{E}$  und  $\underline{H}$ . Damit ergeben sich  $8N+4$  homogene Gleichungen mit  $8N+4$  Unbekannten. Aus der Bedingung, dass die Determinante dieses Gleichungssystems verschwinden muss, erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $\underline{\gamma}$  bzw.  $\beta$ .

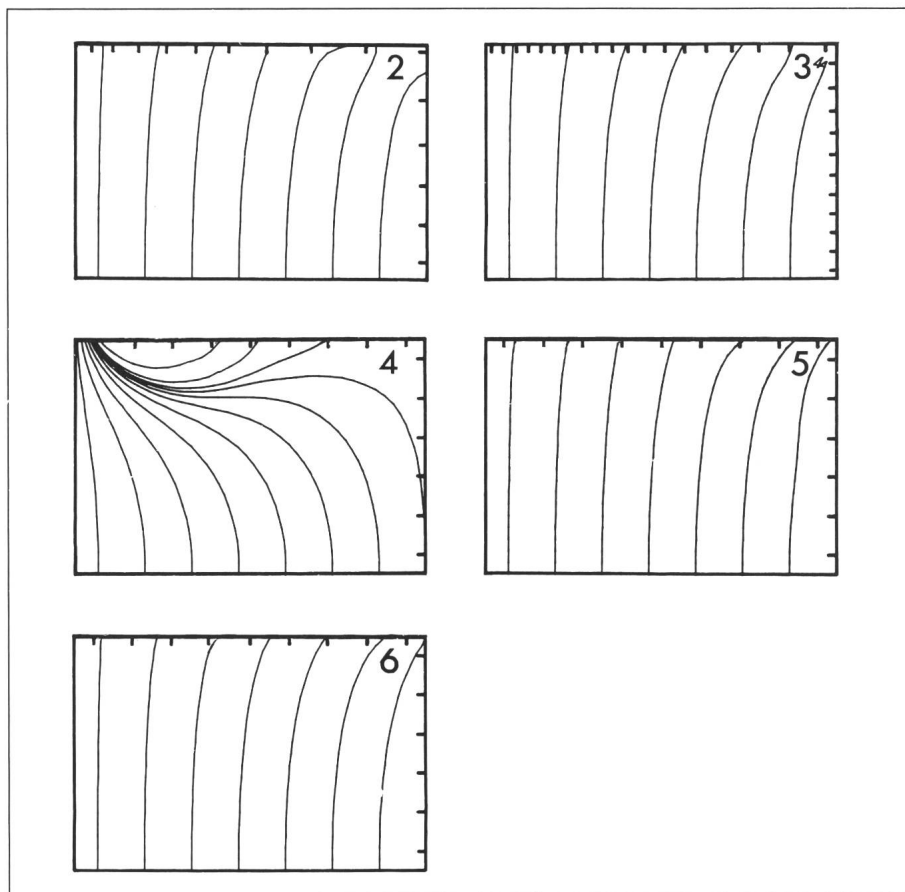


Fig. 2...6 Elektrische Feldlinien im ersten Quadranten eines rechteckigen dielektrischen Wellenleiters mit  $\varepsilon_r = 4$  im Innern

Die Matching-Punkte sind durch Striche senkrecht zum Rand markiert.

Fig. 2 Berechnung mit 15 Matching-Punkten pro Quadrant, Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen. Rechenzeit auf der CDC-Anlage der ETH: 83 s inkl. Berechnung der hier nicht gezeigten Feldgrössen.

Fig. 3 Wie Figur 2, jedoch 30 Matching-Punkte pro Quadrant. Rechenzeit 599 s.

Fig. 4 Wie Figur 2, jedoch mit konstantem Abstand zwischen benachbarten Matching-Punkten. Rechenzeit 75 s.

Fig. 5 Wie Figur 4, jedoch Anzahl Unbekannte = Hälfte der Anzahl Gleichungen. Rechenzeit 38 s.

Fig. 6 Wie Figur 4, jedoch mit sechs statt vier Stetigkeitsbedingungen pro Matching-Punkt. Anzahl Unbekannte = ein Drittel der Anzahl Gleichungen. Rechenzeit 47 s.

Verteilt man die Matching-Punkte so, dass die Winkeldifferenz zweier benachbarter Punkte in bezug auf das Zentrum des Rechtecks immer gleich bleibt, so erhält man Resultate, welche in der Nähe der Ecken unbefriedigend sind. Die Figur 2 zeigt die so berechneten Feldlinien des elektrischen Feldes in einer Transversalebene im Innern des Wellenleiters für den  $HE_{11}$ -Modus. Die Konvergenz ist ziemlich schlecht: durch Verdoppelung der Anzahl  $N$  erhält man Figur 3. Derartige Feldlinienbilder ergeben eine rasche übersichtliche Vergleichsmöglichkeit. Zwar existieren bisher keine exakten Rechnungen; aus der Erfahrung weiss man jedoch, welche Feldlinienbilder plausibel sind und welche nicht. Der

Versuch, die Matching-Punkte so zu verteilen, dass die Abstände zwischen benachbarten Punkten gleich sind, schlägt, wie Figur 4 zeigt, völlig fehl.

Bei der MMP-Methode wurden sowohl der numerische als auch der analytische Teil dieses Verfahrens wesentlich verbessert und verallgemeinert. Einen Ausweg für die beobachteten numerischen Probleme bildet der Übergang zu überbestimmten Gleichungssystemen. Man erreicht dies entweder durch Einführen zusätzlicher Matching-Punkte oder durch Reduktion der Parameteranzahl  $N$  im Ansatz. Dies führt zunächst auf weitere Probleme. Insbesondere muss eine andere Bestimmungsgleichung für  $\underline{\gamma}$  gesucht werden. Es existieren verschiede-

ne Varianten wie z. B. die Methode der kleinsten Fehlerquadrate und die Anwendung von Variationsintegralen. Diese sollen hier jedoch nicht diskutiert werden. Schliesslich erhält man Figur 5 mit denselben Matching-Punkten wie Figur 4, jedoch mit nur halb so vielen Parametern. Eine Verkleinerung des Aufwandes ergibt hier also sogar eine enorme Verbesserung der Resultate. Berücksichtigt man ausserdem noch die Stetigkeitsbedingungen für die Normalkomponenten von  $\underline{D}$  und  $\underline{B}$ , so erhält man nochmals eine Verbesserung (Fig. 6).

Neben dem numerischen Teil muss auch der analytische Teil, d. h. der Reihenansatz, einer gründlichen Prüfung unterzogen werden. Er erweist sich dabei als viel zu starr, um zur Lösung von geometrisch komplizierteren Proble-

men brauchbar zu sein. Der Übergang zu mehreren, verschiedenen Koordinatensystemen führt auf den sogenannten Mehrfachen-Multipol-Ansatz, von dem die Methode ihren Namen bezieht.

Wichtig ist zu bemerken, dass der Rechenaufwand mit dem modifizierten Verfahren für Figur 6 um einen Faktor zwölf niedriger liegt als für Figur 3 und dabei eine höhere Genauigkeit erreicht wurde. Um dieselbe Genauigkeit mit dem üblichen Point-Matching-Verfahren zu erreichen, wäre mit etwa hundertfachem Aufwand zu rechnen. Dies ist nicht einer grundsätzlich neuen Idee, sondern einer grossen Anzahl von kleineren Verbesserungen zu verdanken. Da die Entwicklung des Verfahrens noch keineswegs abgeschlossen ist – der dazu

bisher geleistete Aufwand ist verglichen mit den bekannten Finite-Elemente- und Finite-Differenzen-Programmen verschwindend klein –, kann eine weitere Steigerung der Effizienz erwartet werden.

#### Literatur

- [1] C. Hafner u.a.: Ein Programmpaket zur Berechnung elektromagnetischer Felder. Bull. SEV/VSE 75(1984)7, S. 381...383.
- [2] C. Hafner and R. Ballisti: The multiple multipole method (MMP) Compel 2(1983)1, p. 1...7.
- [3] R.F. Harrington: Field computation by moment methods. New York, Macmillan/London, Collier-Macmillan, 1968.
- [4] C. Hafner, R. Ballisti und P. Leuchtmann: Gruppentheoretische Ausnützung von Symmetrien. Teil 1 und 2. Scientia Electrica 27(1981)3, S. 75...100, und Nr. 4, S. 107...138.
- [5] J.R. James and I.N.L. Gallett: Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods. Radio and Electronic Engineer 42(1972)3, p. 103...113.
- [6] J.E. Goell: A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides. Bell System Technical Journal 48(1969)7, p. 2133...2160.