

# Fraktale : eine neue Sprache der Wissenschaft : fraktale Datenkompression, Teil 1

Autor(en): **Gipser, Thilo**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **81 (1990)**

Heft 9

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-903114>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Fraktale – eine neue Sprache der Wissenschaft

## Fraktale Datenkompression, Teil 1

Thilo Gipser

**Die sogenannte fraktale Datenkompression verspricht für Bilddaten sensationelle Kompressionsfaktoren von 10000 : 1 und mehr. In zwei Beiträgen soll dieses neue Verfahren mit seinen Eigenschaften, Möglichkeiten und Realisierungschancen näher beleuchtet werden. In einem ersten Teil werden Wesen und Eigenschaften von Fraktalen näher erläutert und ein Einblick in die revolutionären Auswirkungen der Fraktaltheorie auf nahezu alle Bereiche der Wissenschaft vermittelt. In einem zweiten Teil wird die fraktale Datenkompression selbst und deren Bedeutung und Möglichkeiten vorgestellt.**

**Pour les données-vidéo, la compression dite fractale des données promet de sensationnels facteurs de compression de 10 000 : 1 et plus. Deux articles vont décrire cette nouvelle méthode, ses propriétés, ses possibilités et ses chances de réalisation. La première partie explique la nature et les propriétés des fractales et prodigue une vue des effets révolutionnaires de la théorie fractale dans pratiquement tous les domaines scientifiques. La deuxième partie présente la compression des données, fractale son importance et ses possibilités.**

Adresse des Autors

Thilo Gipser, Dipl. El.-Ing. ETH, Institut für Kommunikationstechnik, ETH-Zentrum, 8092 Zürich

«Es ist gefährlich weiterzulesen! Die fraktale Geometrie wird Ihre Sicht der Dinge grundlegend verändern. Sie werden riskieren, Ihre kindliche Auffassung von Wolken, Wäldern, Galaxien, Blättern, Federn, Blumen, Felsen, Gebirgen, Teppichen und vielen anderen Dingen zu verlieren. Niemals werden Sie zu den Ihnen vertrauten Interpretationen dieser Dinge zurückkehren können!» Mit diesen Sätzen charakterisiert Michael F. Barnsley, Mathematiker am Georgia Institute of Technology in Atlanta, USA, und Begründer der fraktalen Datenkompression, die Brisanz der Fraktaltheorie, welche einen völlig neuen, umfassenden und faszinierenden Einblick in unsere Natur ermöglicht. Wir leben in einer Welt voll von Fraktalen, ohne uns dieser Tatsache überhaupt bewusst zu sein. Wie wenig wir bisher die einfachsten Grundgesetze der Natur begriffen haben, verdeutlicht eindrücklich die folgende Fragestellung.

### Wie lang ist die Küste von England?

Diese scheinbar triviale Frage stellte 1967 ein relativ unbekannter Mathematiker in der amerikanischen Wissenschaftszeitschrift *Science*. Sein Name: Benoît B. Mandelbrot, 1924 in Warschau geboren, Studium in Paris und heute IBM-Fellow am Thomas J. Watson Research Center in Yorktown, USA. «Wie lang ist die Küste von England?» ist zugegebenermassen ein reichlich seltsamer Titel für eine wissenschaftliche Arbeit. Gewiss kann eine solche Frage nicht auf Anhieb beantwortet werden, aber dann schlägt man doch einfach im Lexikon nach – oder?

Man nehme eine Landkarte von Grossbritannien zur Hand und messe selbst die Küste von England aus. Der so erhaltene Wert ist aber sicherlich

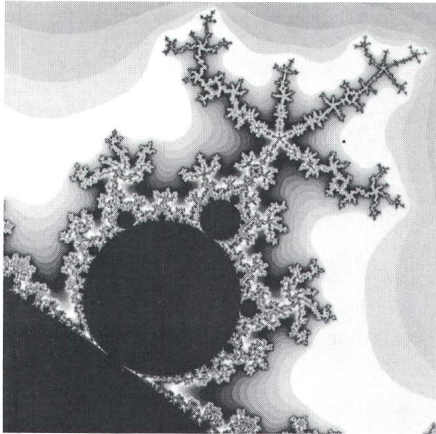
viel zu klein, weil durch den verhältnismässig grossen Massstab der Landkarte alle grösseren und kleineren Buchten und Halbinseln im tatsächlichen Verlauf der Küste unterschlagen wurden. Um diesem Übel abzuwehren, behändige man eine detailliertere Landkarte von geringerem Massstab und messe die Küstenlänge erneut. Die nun erhaltene Länge ist zwar sicher grösser als die alte, aber im Vergleich zur tatsächlichen Länge immer noch viel zu klein, da viele «Halb-Halbinseln», Buchten von Buchten usw. noch nicht berücksichtigt werden konnten. Nach wiederholtem Verringern des Massstabes und Ausmessen der englischen Küste erhält man jeweils einen erneuten Längenzuwachs, die Küstenlänge wird damit abhängig vom verwendeten Massstab und (in letzter Konsequenz) unendlich gross!

Mandelbrot war durch einen Artikel des Engländers Lewis F. Richardson auf die Beobachtung gestossen, dass die Angaben über die britische Küstenlänge erstaunlich differierten. Das Gleiche ergab sich auch bei der Länge der Grenze zwischen Portugal und Spanien: Die Spanier gaben 987 Kilometer an, die Portugiesen 1214 Kilometer. Die Küstenlinie einer Insel hat also die bizarre Eigenschaft, eine unendliche Länge zu besitzen und trotzdem eine endliche Fläche (nämlich die Inselfläche) einzuschliessen. Derart seltsame, scheinbar unklassifizierbare Strukturen wurden von Mathematikern jahrzehntelang ignoriert oder gar als unwissenschaftlich abqualifiziert. Mandelbrot dagegen erfasste die Bedeutung dieser Gebilde und bezeichnete sie als *Fraktale*<sup>1</sup>. Heute revolutioniert seine Fraktaltheorie [1] in stark zunehmendem Masse weite Teile der Wissenschaft.

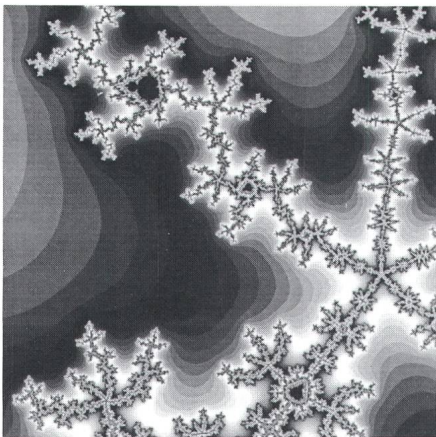
<sup>1</sup> von lat. *fractum*, Partizip des Verbs *frangere* brechen, bersten

## Definition und Eigenschaften von Fraktalen

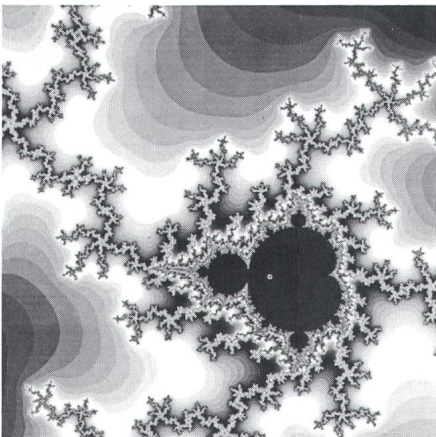
Was sind nun eigentlich Fraktale, und worin bestehen ihre aussergewöhnlichen Eigenschaften? Fraktale sind Objekte, welche bei jeder Vergrößerung neue Details zeigen. Im Gegensatz zu den herkömmlichen und



1



2

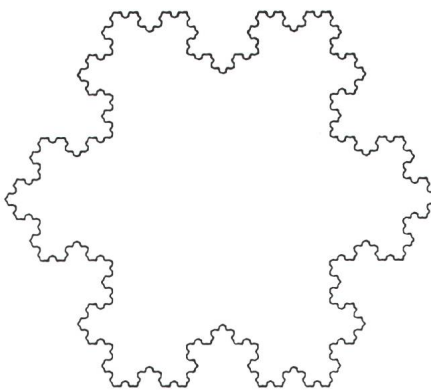


3

### Bild 1 Vergrößerungen eines Monsters

Mit jeder Vergrößerung eines Ausschnitts des vorherigen Bildes werden neue, fremdartig schöne Details enthüllt.

vor allem geometrischen Gebilden, die bei einer Vergrößerung keine neuen Einzelheiten offenbaren, erscheinen bei fraktalen Objekten mit jeder Vergrößerung neuartige, vorher nicht erkennbare Strukturen, die dem Ausgangsgebilde ähneln. So ergibt die Vergrößerung eines beliebigen Ausschnittes einer Geraden als Beispiel eines nichtfraktalen Gebildes keine neuen Strukturen preis, das vergrösserte Bild ist wieder eine Gerade; die Vergrößerung einer fraktalen Kurve dagegen zeigt immer neue Bögen oder Ecken, welche vorher nicht ersichtlich waren (Bild 1). Rauheit und Zersplitterung bleiben dabei mit zunehmender Verfeinerung der Besichtigung im wesentlichen unverändert (Skaleninvarianz). Theoretisch ist dieses Phänomen ein unendlicher Kaskadenprozess; praktisch jedoch gibt es einen äusseren Abschnitt (Cutoff), der die Grösse der Figur bestimmt, sowie



**Bild 2 Kochsche Schneeflockenkurve**

Die unendlich lange Kurve vermag eine nur endliche Fläche zu umschliessen.

einen inneren, der spätestens dann auftritt, wenn man bei realen Gebilden die Grösse eines Atoms erreicht.

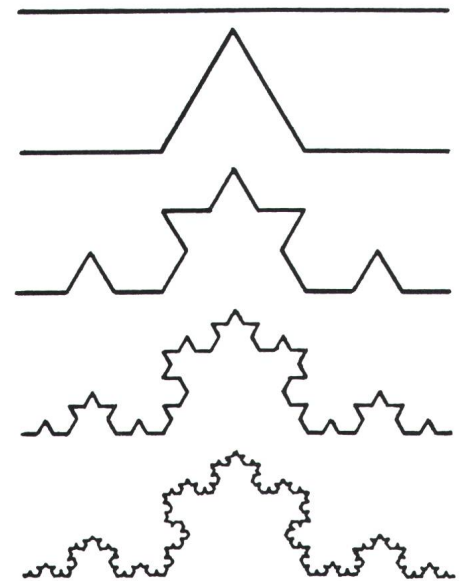
Die bei verschiedenen Vergrößerungen eines Fraktals zutage tretenden Formen sind jedoch einander alle ähnlich, sie gleichen in ihrem grundlegenden Muster auch stark dem ursprünglichen, unvergrösserten Fraktal. Diese Eigenschaft heisst Selbstähnlichkeit<sup>2</sup>; die Struktur eines jeden Teilstücks enthält den Schlüssel zur Gesamtstruktur. Fraktale entstehen weiter aus einem endlichen oder unendlichen Rekursionsprozess und besitzen eine fraktale Dimension (siehe später).

<sup>2</sup>engl. *self-similarity*

## Beispiele mathematischer Fraktale

Obwohl den Mathematikern schon seit geraumer Zeit bekannt, verlebten Fraktale über lange Zeit ein verstaubtes Schattendasein in den Schubladen der Mathematiker. Ihre ausserordentlich seltsamen Eigenschaften erschienen den meisten Mathematikern suspekt, worauf derartige Strukturen als *Monster* und *pathologisch* (krankhaft) abqualifiziert wurden. Die bekanntesten dieser Monster seien im folgenden vorgestellt.

Eines der berühmtesten Monster wurde um 1904 von Helge von Koch ausgetüfelt. Es wird *Kochsche Insel* oder *Kochsche Schneeflockenkurve* genannt (Bild 2). Bei der Erzeugung dieses Fraktals (Bild 3) nimmt seine bisherige Länge mit jedem Schritt um den Faktor  $\frac{4}{3}$  zu; ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit einer Kan-



**Bild 3 Erzeugung der Kochschen Schneeflocke**

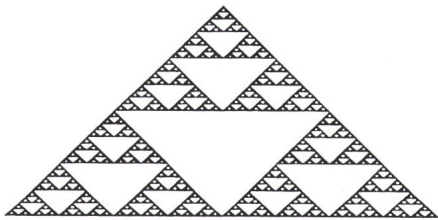
Ein Fraktal entsteht grundsätzlich aus wiederholten Verformungsprozessen. Hier ersetzt der sogenannte Generator in der 2. Zeile fortlaufend einen Initiator (z.B. den Initiator der 1. Zeile).

tenlänge von 1 m erreicht man bereits im 57. Schritt die Länge des Äquators (rund 40000 km)! Damit wird die Küstenlänge der Kochschen Insel unendlich lang, umschliesst jedoch nur eine endliche Fläche.

Ein weiteres, sehr bekanntes Monster ist das sogenannte Sierpiński-Dreieck (Bild 4), welches 1916 vom

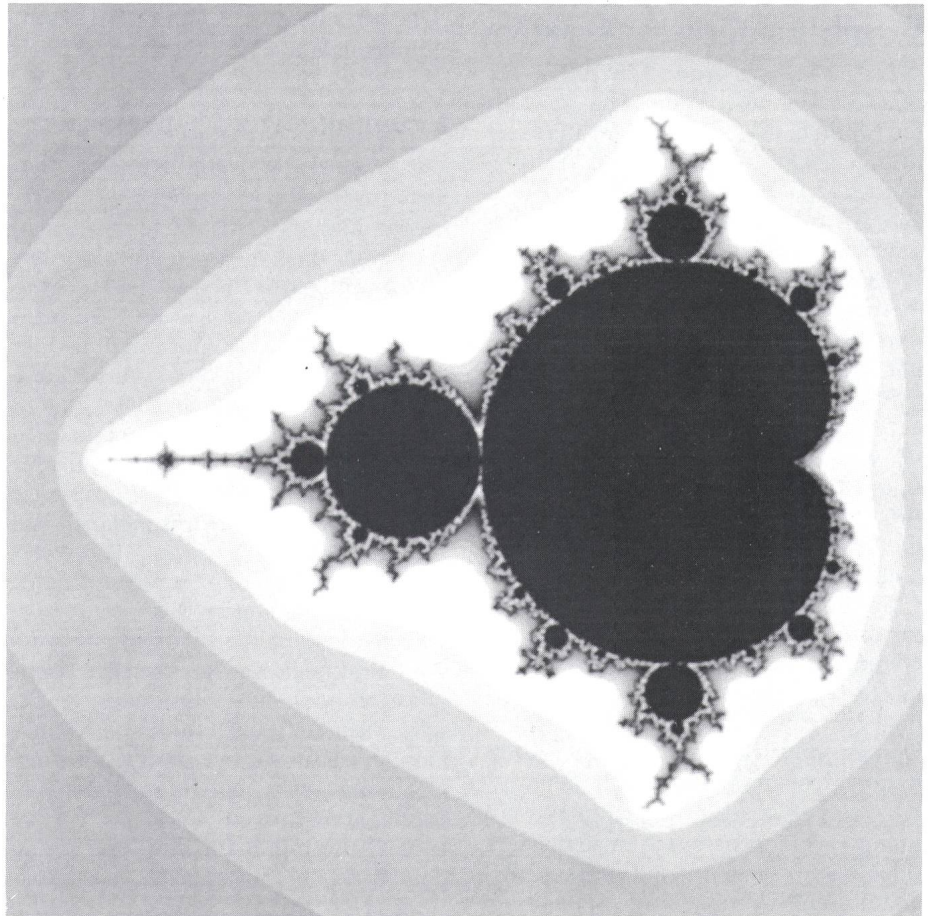
polnischen Mathematiker Waclaw Sierpiński (1882–1969) vorgestellt wurde. Jedes einzelne Dreieck ist aus drei kleineren Dreiecken aufgebaut. Das Fraktal besitzt die Eigenschaft, dass seine Gesamtfläche gleich Null, der Gesamtumfang der Löcher hingegen unendlich ist.

Das berühmteste und schönste mathematische Fraktal stellt jedoch zweifelsohne die Mandelbrot-Menge (Bild 5) dar (im deutschsprachigen Raum wegen ihres Aussehens auch Apfelmännchen genannt). Sie wurde 1980 von Benoît B. Mandelbrot entdeckt und liegt im Zentrum der komplexen Zahlenebene. Wendet man eine bestimmte mathematische Funktion (siehe später) iterativ auf alle Punkte der komplexen Zahlenebene an, so fliehen die Zahlen ausserhalb der Menge ins Unendliche (Divergenz), während die Zahlen innerhalb der Menge in derselben umherwandern (Konvergenz). Dieses Innere der Figur wird auch als *Ordnung* bezeichnet, während man den äusseren Bereich *Chaos* nennt. In der Grenzfläche zwischen Ordnung



**Bild 4 Sierpiński-Dreieck**

Unendlich viele Dreiecke liegen alle in einem einzigen Dreieck.



**Bild 5 Apfelmännchen**

Das Fraktal der Fraktale liegt im Zentrum der komplexen Zahlenebene. Es umfasst alle Punkte, bei denen eine bestimmte Iterationsgrösse endlich bleibt.

erwähnt (Bild 6). Hier ist jeder Würfel aus 20 kleineren Würfeln aufgebaut, deren Kantenlänge genau ein Drittel derjenigen des ursprünglichen Würfels

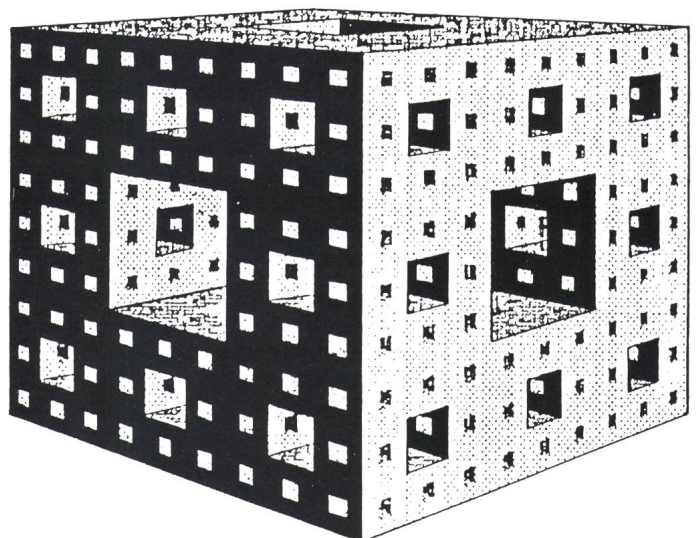
beträgt. Der Mengersche Schwamm ist ein sehr berühmtes Fraktal mit einem Volumen gleich Null und einer unendlich grossen Oberfläche.

und Chaos liegen Fraktale; hier markieren immer detailliertere Strukturen von seltener Vielfalt und fremdartiger Schönheit den Beginn der Instabilität [2]. Vergrössert man Ausschnitte aus dem Rand der Mandelbrot-Menge, so sieht man immer neue Formen, entdeckt neue Apfelmännchen, welche der Ausgangsfigur jedoch nie ganz gleichen (Bild 1). Jedes quadratische Gebiet, welches einen Teil des Randes umfasst, enthält unendlich viele dieser Apfelmännchen-Miniaturen!

Selbstverständlich sind die mathematischen Fraktale nicht nur auf zwei Dimensionen beschränkt; als Beispiel eines dreidimensionalen Fraktals sei der nach seinem Entdecker Karl Menger benannte *Mengersche Schwamm*

**Bild 6 Mengerscher Schwamm**

Das dreidimensionale Monster besitzt bei einem Volumen gleich Null eine unendlich grosse Oberfläche.



## Beispiele natürlicher Fraktale

Die Existenz von Fraktalen beschränkt sich aber keineswegs nur auf die Mathematik, vielmehr sind Fraktale allgegenwärtig, sie sind ein grundlegendes Muster der Natur. Diese Tatsache ist für das Scheitern einer Beschreibung letzterer mit Hilfe von Werkzeugen aus der klassischen Geometrie verantwortlich. Mandelbrot umschreibt dies wie folgt: «Die Natur hat der klassischen Geometrie ein Schnippchen geschlagen. Denn Wolken sind eben keine Kugeln, Berge keine Kegel, Inseln keine Kreise und Baumstämme keine Zylinder. Der Blitz verläuft auf keiner Geraden und die Oberfläche eines Planeten ist auch nicht glatt.»

So muss eine Beschreibung der Natur mit Hilfsmitteln der klassischen Geometrie implizit zum Scheitern verurteilt sein. Eine Geometrie der Natur dagegen muss aus Objekten aufgebaut werden, die sich nur wenig oder überhaupt nicht manierlich verhalten, aus Kurven von grosser Länge, die nur ein kleines Flächenstück einschliessen, oder aus ausgedehnten Flächen, welche nur ein kleines Volumen ausfüllen (z.B. wie bei der menschlichen Lunge): eben aus Fraktalen.

Der fraktale Charakter der Natur ist nicht nur aus den bereits besprochenen Küstenlinien ersichtlich (mit jeder Vergrösserung erscheinen wieder neue Knicke im Küstenverlauf). Geographische Gebilde wie zum Beispiel Gebirgslandschaften, Erd- oder Planetenoberflächen weisen ebenfalls einen ausgeprägt fraktalen Charakter auf. Das Zufallsmuster von Wolken, Oberflächen von Steinen, Felsen und Pflanzen (Blätteroberflächen, Baumrinden usw.) sind fraktal aufgebaut. Typisch fraktale Strukturen zeigen sich bei diffusionsbegrenztem Wachstum, in der Verästelung von Bäumen (ein kleiner Birkenast sieht mit seinen Verzweigungen im Prinzip genauso aus wie ein ganzer Baum), im Aufbau von Korallenriffen, in den zufälligen Verzweigungen von Blutgefässen oder Luftwegen in der Lunge. Eine fraktale Struktur erscheint bei der Brownschen Bewegung oder dem Gaussschen Rauschen in der Elektrotechnik. Fraktaler Wachstumscharakter ist bei vielen elektrischen Entladungsmustern, z.B. bei Blitzentladungen, zu beobachten.

Man nimmt übrigens an, dass der Rekursionsprozess bei natürlichen Fraktalen prinzipiell endlich ist, d.h. der fraktale Charakter findet späte-

stens beim Erreichen atomarer Dimensionen ein Ende.

## Erzeugung von Fraktalen

Betrachtet man die komplizierten Strukturen von Fraktalen in der Mathematik und Natur, so müsste man vermuten, dass die Konstruktion derart komplizierter Formen die Notwendigkeit komplexer Regeln bedingen würde. Genau das Gegenteil ist der Fall. Die Erzeugung regulärer Fraktale erfolgt mittels einfacher Regeln in einem (un-)endlichen Rekursionsprozess. Durch unbegrenzte oder in der Praxis bis zur Auflösungsgrenze wiederholte Verformungsprozesse können so Strukturen äusserster Reichhaltigkeit und ausserordentlicher Schönheit generiert werden.

Der rekursive Konstruktionsprozess von Fraktalen ist geometrisch sehr schön in der Erzeugung der Kochschen Schneeflocke (Bild 3) oder mathematisch im Aufbau der Definitionsgleichung des Apfelmännchens zu beobachten.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Mandelbrot-Menge ist die Iterationsvorschrift

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + d, \quad (1)$$

wobei  $z_n$ ,  $z_{n+1}$  und  $d$  komplexe Zahlen darstellen. Setzt man nun  $d = z_0$ , wobei  $z_0$  irgendein komplexer Anfangswert der Iteration bedeutet, so leitet sich aus der Gleichung (1) die Definition des Apfelmännchens ab:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + z_0. \quad (2)$$

Dabei bedeutet  $z_0$  einen beliebigen Punkt in der komplexen Zahlenebene. Wird dieser innerhalb der sogenannten, Mandelbrot-Menge gewählt, so konvergiert der Wert  $z_{n+1}$  bei Abarbeitung des Rekursionsprozesses gegen einen festen Wert. Liegt er dagegen ausserhalb des Apfelmännchens, so wächst der Funktionswert  $z_{n+1}$  mit zunehmendem  $n$  (= Anzahl Iterationen) über alle Schranken. Setzt man alle Punkte der komplexen Zahlenebene in obige Gleichung (2) ein, so erhält man das Apfelmännchen als Menge aller Punkte, bei welchen die Werte  $z_{n+1}$  endlich bleiben (Bild 5).

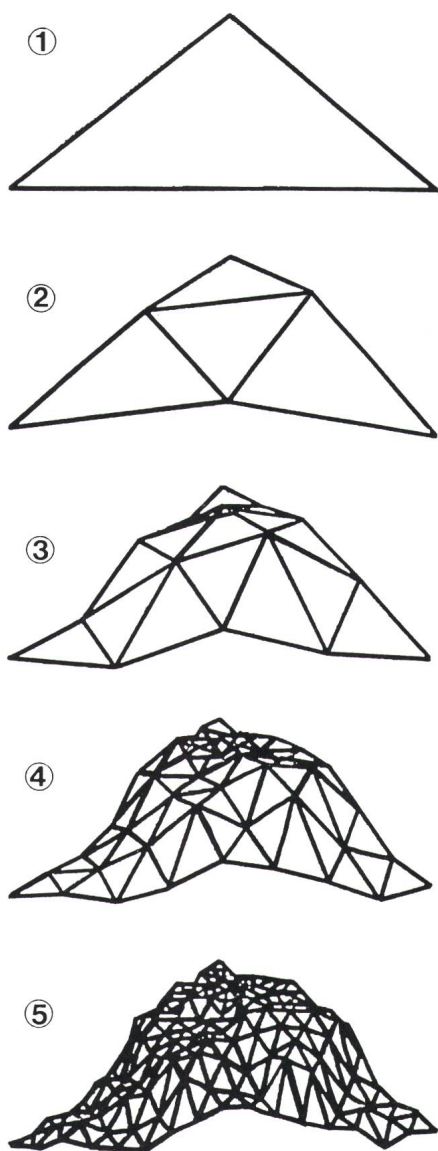
Somit kann ein äusserst vielfältig strukturiertes Objekt (Bild 1) durch eine erstaunlich einfache Formel vollständig beschrieben werden. Die Brisanz der Fraktaltheorie wird damit klar ersichtlich: Auf den ersten Blick

kompliziert aufgebaute Strukturen oder chaotisch anmutende Vorgänge, die mit der klassischen Geometrie nicht oder nur unter unverhältnismässig grossem Aufwand in den Griff zu bekommen sind, können mit Hilfe der Fraktaltheorie auf einfachste Weise beschrieben werden. Die Problematik liegt damit in der Lösung des inversen Problems, d.h. der Bestimmung einer fraktalen Beschreibung einer gegebenen Struktur oder eines bekannten Vorgangs. Der Lösung dieses inversen Problems kommt auch in der fraktalen Datenkompression eine zentrale Bedeutung zu.

Doch zurück zur Erzeugung von Fraktalen. Wenn die Fraktaltheorie eine treffende Geometrie der Natur darstellen soll, so müssten sich nicht nur mathematische, sondern auch komplexe natürliche Formen mittels einfacher Regeln realisieren lassen. Als Beispiel dazu wird im folgenden eine Rekursionsvorschrift zur Erzeugung fraktaler Gebirge aufgezeigt, die, unter Verwendung möglichst einfacher Regeln, zu fraktalen Gebirgszügen mit maximaler Ähnlichkeit bezüglich realer Gebirgsketten führt.

Der Bergstock weise der Einfachheit halber einen dreieckigen Umriss auf. Dieses Dreieck wird nun, indem man die Seitenmitten bestimmt und miteinander verbindet, in drei kleinere Dreiecke unterteilt. Jedes neuentstandene Dreieck wird auf die gleiche Art weiter aufgespalten – so lange, bis die Grenzen der Auflösung oder der Rechenzeit erreicht sind. Das Ergebnis ist vorerst ein relativ langweiliges Dreieckgitter – das Sierpiński-Dreieck (Bild 4). Bringt man nun jedoch vertikale Störungen in der Art an, dass sich jeder neu hinzugekommene Schnittpunkt um einen zufälligen Betrag nach oben oder unten verschiebt, so ergibt sich ein äusserst realistisches fraktales Gebirge (Bild 7). Um natürlichen Gebirgszügen möglichst nahe zu kommen, werden die eingebrachten Verschiebungen bei jedem Rekursionschnitt verkleinert. Die willkürlich gewählten vertikalen Versetzungen im sogenannten *Mittelpunktverschiebungsverfahren*<sup>3</sup> zeichnen dabei verantwortlich für die fraktale Dimension (siehe nächstes Kapitel) der entstehenden Landschaft, welche, um ein möglichst natürliches Aussehen des fraktalen Berges zu erreichen, der fraktalen Dimension echter Landstriche entsprechen sollte.

<sup>3</sup>engl. *midpoint displacement method*



**Bild 7 Fraktale Gebirge**  
Eine geometrische Vorschrift verwandelt ein Sierpiński-Dreieck in ein äusserst realistisch aussehendes fraktales Gebirge.

steme [3]. Sie stellen im wesentlichen ein Regelwerk zur Erzeugung neuer Zeichenketten aus alten dar. Im folgenden Beispiel sollen hierfür die Zahlen 0 und 1 sowie die Symbole [ und ] verwendet werden. Mit den Ersetzungsregeln

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1[0]1[0]0 & (3) \\ 1 &\rightarrow 11 \\ [ &\rightarrow [ \\ ] &\rightarrow ] \end{aligned}$$

lässt sich nun ein breites Sortiment komplizierter botanischer Formen erzeugen. Wendet man obige Regeln beispielsweise auf die nur aus der Ziffer 0 bestehende Zeichenkette an, so ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} 0 & & (4) \\ 1[0]1[0]0 \\ 11[1[0]1[0]0]11[1[0]1[0]0]1[0]1[0]0 \end{aligned}$$

Fasst man dann jede Zahl (0 oder 1) als Linie gleicher Länge und jede Klammer als Verzweigung auf und heftet schliesslich an jedes Ende der 0-Linien ein Blatt, so ergeben sich sogenannte graphtale Pflanzenstrukturen gemäss Bild 8. Auf ähnliche Art und Weise lässt sich die Kochsche Schneeflockenkurve aus wenigen Ersetzungsregeln konstruieren. Die L-Systeme stellen damit eine extrem kompakte, rekursive Codierungsmethode komplizierter fraktaler Strukturen dar. Sie werden vor allem für die Modellierung von Pflanzen aller Art wie Blumen, Büschen und Bäumen verwendet.

## Fraktale Dimension

Bereits mehrfach wurde vom Begriff der fraktalen Dimension Gebrauch gemacht. Inwiefern unterscheidet sich die Dimension eines Fraktals von der einer Geraden, einer Ebene oder eines Würfels?

Es ist nicht immer leicht, die Dimension von geometrischen Gebilden zu bestimmen. Eine Kugeloberfläche beispielsweise sollte zweidimensional sein, schliesslich ist sie eine Fläche. Andererseits besitzt sie (im Gegensatz zu einer unendlichen planaren Fläche) eine räumliche Ausdehnung, also etwas Dreidimensionales.

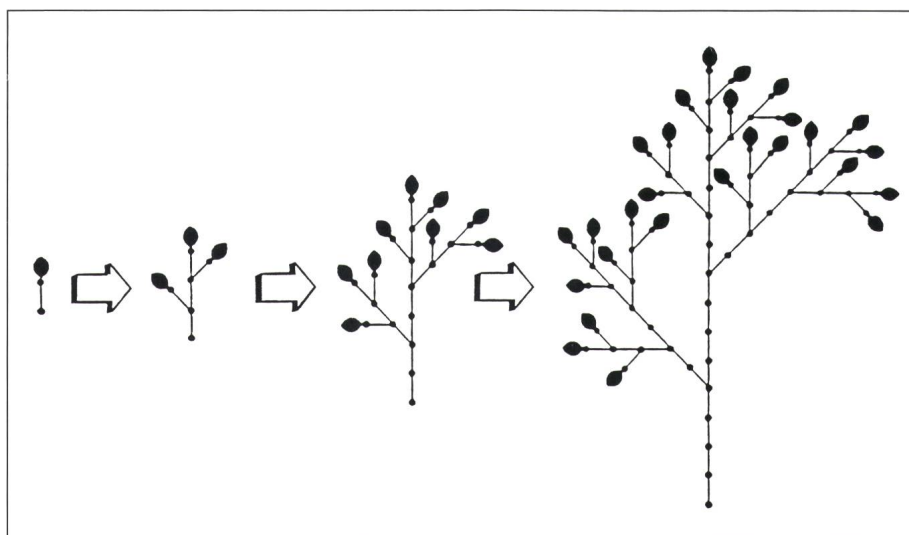
Die zentrale Eigenschaft von Fraktalen ist nun gerade ihre ungewöhnliche Dimension. Fraktale sind im allgemeinen mehr als ein-, aber doch weniger als zweidimensional (ebene Fraktale), beziehungsweise mehr als zwei-, aber weniger als dreidimensional (räumliche Fraktale)!

Die natürliche Verallgemeinerung des vertrauten Begriffs der Raumdimension führt zum fraktalen Dimensionsbegriff, welcher 1919 vom deutschen Mathematiker und Schriftsteller Felix Hausdorff definiert wurde. Hausdorff nahm dabei Bezug auf den Messvorgang, der zur Ermittlung der Grösse eines geometrischen Gebildes durchgeführt werden muss.

Kurven, Flächen und Körper besitzen die topologischen Dimensionen 1, 2 und 3. Zu deren Vermessung benötigt man ein auf ihre Dimensionen zugeschnittenes Einheitsmass: für eine Kurve eine Strecke der Länge 1, für Flächen ein Quadrat der Seitenlänge 1

Das hier beschriebene Prinzip lässt sich vielfältig variieren und wurde unter anderem zur Modellierung von Erosionsgesetzen bei Gebirgen oder zur Untersuchung von Erdbebendaten im Hinblick auf Veränderungen in Bruchzonen verwendet. Der amerikanische Physiker Richard V. Voss, ein Kollege Mandelbrots am IBM-Forschungszentrum, erzeugte auf diese Art und Weise Modelle von Planeten, Monden, Wolken und Gebirgen, die der Wirklichkeit täuschend nahe kommen.

Eine andere Methode zur Erzeugung von fraktalen Strukturen wurde 1968 vom dänischen Biologen Aristid Lindenmayer zur Beschreibung von Pflanzenformen entwickelt. Es handelt sich um die nach ihm benannten *L-Systeme*.



**Bild 8 Graphtale Pflanzen**  
Aus einfachen Ersetzungsregeln können komplizierte Pflanzenstrukturen aufgebaut werden.

und für einen Körper einen Würfel der Kantenlänge 1. Um kleine, komplexe Gebilde zu vermessen, kann man von den Einheitsmassen kleinere Masse ableiten. Hierzu werden die Seiten eines Einheitsmasses einfach in  $b$  gleiche Teile unterteilt, die neue Masseinheit hat nun die Seitenlänge

$$r = 1/b. \quad (5)$$

Um das Einheitsmass mit Masseinheiten der Seitenlänge  $r$  aufzufüllen, benötigt man für die Einheitsstrecke  $N = b$  Teile, für die Einheitsfläche  $N = b^2$  und für den Einheitswürfel  $N = b^3$  Teile.  $N$  ist somit gemäss

$$N = b^D = r^{-D} \quad (6)$$

direkt von der Dimension  $D$  abhängig, und es folgt damit aus der Formel (6) (bei gleichen Längenteilen  $r$ ) für die fraktale Dimension

$$D = \frac{\log N}{\log 1/r} \quad (7)$$

Darin bedeutet  $N$  den Faktor, um welchen die Anzahl der Segmente pro Rekursionsschritt zunimmt und  $r$  die neue Seiten- oder Kantenlänge.

Als Beispiel soll die fraktale Dimension der Kochschen Schneeflockenkurve ermittelt werden. Wie aus Bild 3 unschwer zu erkennen, nimmt die Anzahl neuer Segmente pro Rekursionsschritt um  $N = 4$  zu, während die neue Seitenlänge  $r = 1/3$  der alten beträgt. Damit ergibt sich für die Kochsche Insel eine fraktale Dimension von

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26. \quad (8)$$

Die fraktale Dimension eines Sierpinski-Dreiecks berechnet sich zu  $D = 1,59$ ; diejenige des räumlichen Mengerschen Schwamms zu  $D = 2,73$ .

Die fraktale Dimension ist damit primär ein Mass für die Rauheit eines fraktalen Gebildes. Je besser der Verlauf eines Fraktals einer Geraden entspricht, desto näher liegt seine Dimension bei  $D = 1$ ; je vollständiger eine fraktale Kurve eine Ebene ausfüllt, desto näher liegt seine Dimension beim Wert  $D = 2$ ; und je besser ein Fraktal

einen bestimmten Raum ausfüllt, umso näher liegt seine fraktale Dimension bei  $D = 3$ .

Interessant wird es aber erst bei der Ermittlung von fraktalen Dimensionen in der Natur. So beträgt diejenige von Küstenlinien  $D = 1,25$  – ob Zufall oder nicht, entspricht dieses Ergebnis ziemlich genau der fraktalen Dimension der Kochschen Insel! Unsere Lunge soll eine fraktale Dimension aufweisen, welche weit über derjenigen des Mengerschen Schwamms liegt, und in der Botanik wurde mit der Bestimmung der fraktalen Dimension von Pflanzenoberflächen gleichzeitig ein Widerspruch aufgeklärt: Werden diese Pflanzen von zehnfach kleineren Insekten als ursprünglich bevölkert, so nimmt deren Zahl nicht wie in der zweidimensionalen Ebene um das Hundertfache, sondern um das rund Sechshundertfache zu ( $D = 2,79$ ;  $10^{2,79} = 617$  statt  $10^2 = 100!$ ). Auch unser Weltall weist vermutlich fraktalen Charakter auf. Galaxien verteilen sich nämlich nicht gleichmässig im Raum, wie man früher geglaubt hatte. Vielmehr bilden mehrere Galaxien einen Galaxienhaufen, von denen mehrere wieder einen Superhaufen bilden, die sich ihrerseits wieder zu Super-Superhaufen vereinigen, usw. Nach einer kürzlich erfolgten Berechnung hat unser Universum eine fraktale Dimension zwischen  $D = 1,2$  und  $D = 1,4$ . (Punktförmige Anordnung im dreidimensionalen Raum).

## Auswirkungen und Zukunft der Fraktaltheorie

Die Auswirkungen der Fraktaltheorie sind, wie die aufgeführten Beispiele belegen, von grundsätzlicher Natur und äusserst vielseitig. Primär erlauben die neuen Beschreibungsmethoden ein besseres, umfassenderes Verständnis der Natur und einer Vielzahl von natürlichen Vorgängen. Sekundär führt die Fraktaltheorie zur Entwicklung neuartiger Techniken in vielen Bereichen der Wissenschaft.

Eng verknüpft sind die Fraktale mit einem anderen, ebenfalls sehr jungen

und hochinteressanten Wissenschaftszweig: der *Chaosforschung*. In chaotischen Systemen können kleinste Veränderungen grösste Wirkungen zur Folge haben; ein fundamentales Prinzip, das nicht nur in physikalischen, sondern offensichtlich auch in sozialen Systemen seine Gültigkeit hat (als Beispiel hierfür seien die gewaltigen Auswirkungen der vergleichsweise unbedeutenden Ernennung von Michail Gorbatschow zum neuen Kremlherrscher vor 5 Jahren angeführt). Es existieren nun bestimmte geometrische Strukturen im Chaos, sogenannte Attraktoren, welche einen fraktalen Aufbau aufweisen und eine gewisse Vorhersage chaotischer Vorgänge erlauben. Daraus erhofft man sich zum Beispiel fundamentale Erkenntnisse über das Verhalten von Turbulenzen in Flüssigkeiten oder Hinweise für die Bekämpfung und Verhinderung von Herzkammerflimmern (Sekundenherztod) [4].

Grössten Einfluss dürften Fraktale aber in Zukunft auf die Gebiete der Simulationstechniken und der Bilderzeugung gewinnen. Simulationen unter Beizug von fraktalen Beschreibungsmethoden empfehlen sich vor allem dann, wenn natürliche Systeme oder Verhaltensmuster wirklichkeitstreu nachgeahmt werden sollen. Fraktale eignen sich neben der Modellierung verschiedenster Landschaften auch zur Simulation ökologischer und sozialer Systeme. Aufgrund ihrer einfachen Erzeugungsvorschriften ist insbesondere auch im Bereich der Computergrafik ein Boom vorzusehen.

## Literatur

- [1] *B.B. Mandelbrot*: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel, Birkhäuser-Verlag, 1987.
- [2] *H.O. Peitgen* and *P.H. Richter*: The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. Berlin a.o., Springer-Verlag, 1986.
- [3] *A.K. Dewdney*: Computer-Kurzweil. Fraktale Gebirge und graphale Pflanzen: auf der Suche nach den mathematischen Grundmustern hinter den mannigfaltigen Erscheinungsformen der Natur. Spektrum der Wissenschaft – (1987)3, S. 6...11.
- [4] *J.B. Bassingthwaite* and *J.H.G.M. van Beek*: Lightning and the heart: Fractal behavior in cardiac function. Proc. IEEE 76(1988)6, p. 693...699.