

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association suisse des électriciens, de l'Association des entreprises électriques suisses

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen

**Band:** 90 (1999)

**Heft:** 3

**Artikel:** Entwurf robuster Regler mit der H-Methode

**Autor:** Geering, Hans P. / Roduner, Christian A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-901912>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Entwurf robuster Regler mit der $H_\infty$ -Methode

In diesem Aufsatz wird eine neuere, bewährte Methode für den Entwurf von Reglern vorgestellt, welche zu robusten Regelsystemen führt. Die  $H_\infty$ -Methode arbeitet mit Frequenzkennlinien (Amplitudengängen bei einschleifigen Regelkreisen, Singularwertverläufen bei Mehrgrössensystemen). Mit den beim Entwurf zu wählenden Frequenzkennlinien wird das Regelsystem so geformt, dass die spezifizierten Eigenschaften des Regelsystems (wie Bandbreite, Regelungsgüte im Passband, Resonanzüberhöhungen der Empfindlichkeit und der komplementären Empfindlichkeit sowie Robustheit gegen Modellierungsfehler im Sperrband) resultieren. Algorithmisch ist die  $H_\infty$ -Methode besonders einfach, indem lediglich zwei algebraische Matrix-Riccati-Gleichungen (z.B. mit Matlab) zu lösen sind.

## Einleitung

Wir betrachten ein klassisches Regelsystem mit dem im Bild 1 dargestellten Signalflussbild.

Die Regelstrecke hat die Übertragungsfunktion  $G_s(s)$  und das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= C_s x_s(t) + D_s u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Die Spezifikationen für das robuste Regelsystem werden durch Anforderungen an die Bandbreite  $\omega_c$  und an die Amplitudengänge der Empfindlichkeit  $S(s)$  und der komplementären Empfindlichkeit  $T(s)$  ausgedrückt:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_s(s)K(s)} \quad T(s) = \frac{G_s(s)K(s)}{1 + G_s(s)K(s)} \quad (2)$$

Dabei bezeichnen wir als Bandbreite  $\omega_c$  die Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung  $L(s) = G_s(s) \cdot K(s)$  oder der Empfindlichkeit;  $|L(j\omega_c) = 1|$  oder  $|S(j\omega_c)| = 1$ .

## Die $H_\infty$ -Methode

### Übersicht

Beim Entwurf eines robusten Reglers mit der  $H_\infty$ -Methode ergänzen wir das Signalflussbild des Regelsystems (Bild 1) entsprechend einem frei wählbaren «Gewichtungsschema». Dabei erhält das erweiterte Regelsystem einen neuen fiktiven Eingangsvektor  $w$  und einen neuen fiktiven Ausgangsvektor  $z$ .

Das Gewichtungsschema wird so gewählt, dass die interessierenden Grössen, zum Beispiel die Empfindlichkeit  $S(s)$  und die komplementäre Empfindlichkeit  $T(s)$ , multipliziert mit frei wählbaren Gewichtungen  $W_e(s)$  in der Übertragungsmatrix  $T_{zw}(s)$  auftreten.

Die Frequenzkennlinien der Gewichtungen werden so gewählt, dass die Spezifikationen für das Regelsystem mit dem als Lösung resultierenden  $H_\infty$ -Regler erfüllt werden.

Die nachfolgenden Abschnitte erläutern die  $H_\infty$ -Methode am Beispiel des sehr populären  $S/KS/T$ -Gewichtungsschemas.

### Systemerweiterung, Gewichtungsschema

Das Gewichtungsschema des im Bild 2 gezeigten erweiterten Regelsystems wird  $S/KS/T$ -Gewichtungsschema genannt, weil in der Übertragungsmatrix  $T_{zw}(s)$  die mit  $W_e(s)$ ,  $W_u(s)$  und  $W_y(s)$  gewichteten Grössen  $S(s)$ ,  $K(s)S(s)$  bzw.  $T(s)$  auftreten:

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} W_e(s)S(s) \\ W_u(s)KS(s) \\ W_y(s)T(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

### Wahl der Gewichtungen

Der Algorithmus der  $H_\infty$ -Methode versucht, das Problem zu lösen, die  $H_\infty$ -Norm der Übertragungsmatrix  $T_{zw}(s)$  unter den frei wählbaren, positiven Wert  $\gamma$  zu drücken:

$$\|T_{zw}(S)\|_\infty \leq \gamma \quad (4)$$

Falls dieses Problem eine Lösung hat, gelten für die Amplitudengänge der drei Komponenten der Matrix  $T_{zw}(j\omega)$  die folgenden Ungleichungen:

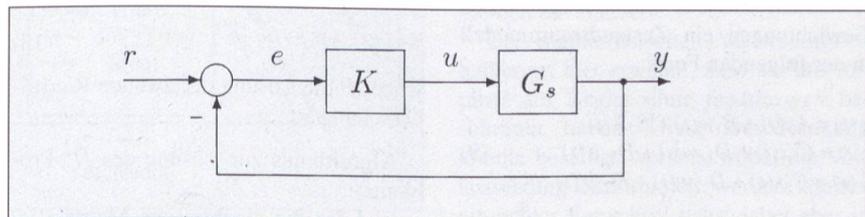


Bild 1 Signalflussbild des Regelsystems

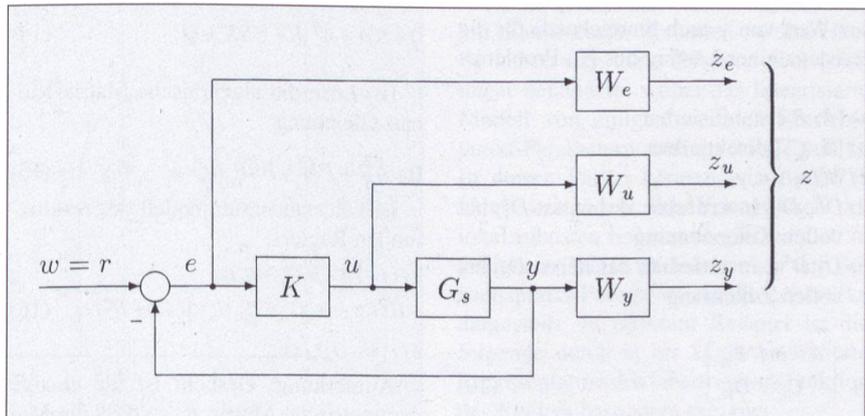


Bild 2 Standard-S/KS/T-Gewichtungsschema

$$\begin{aligned} |W_e(j\omega)S(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \\ |W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \\ |W_y(j\omega)T(j\omega)| &\leq \gamma \text{ f\"ur alle } \omega \end{aligned} \quad (5)$$

Als Standardwert verwenden wir  $\gamma = 1$ . Als Gewichtungen wählen wir aufgrund der Spezifikationen für das Regelsystem

$$\begin{aligned} W_e(s) &= \frac{1}{\hat{S}(s)}, \quad W_u(s) = \frac{1}{\hat{R}(s)} \\ \text{und } W_y(s) &= \frac{1}{\hat{T}(s)} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die Amplitudengänge

$$|\hat{S}(j\omega)|, |\hat{R}(j\omega)| \text{ und } |\hat{T}(j\omega)| \quad (7)$$

bei allen Frequenzen  $\omega=0 \dots \infty$  obere Schranken für die entsprechenden Grössen des resultierenden Regelsystems darstellen:

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &\leq |\hat{S}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \\ |K(j\omega)S(j\omega)| &\leq |\hat{K}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \\ |T(j\omega)| &\leq |\hat{T}(j\omega)| \text{ f\"ur alle } \omega \end{aligned} \quad (8)$$

Durch geeignete Wahl dieser drei Schranken können wir erreichen, dass alle einleitend erwähnten Anforderungen an das Regelsystem erfüllt werden.

**Lösen des abstrakten  $H_\infty$ -Problems**

Aus Bild 2 abstrahieren wir das allgemeine Grob-Signalflossbild des erweiterten Regelsystems des  $H_\infty$ -Problems gemäss Bild 3. Der messbare Ausgang  $\tilde{y}$  der erweiterten Strecke entspricht in unserem Fall der Regelabweichung  $e$ , ihr beeinflussbarer Eingang  $\tilde{u}$  der Stellgrösse  $u$ .

Für die erweiterte Regelstrecke ermitteln wir aufgrund des in der Einleitung erwähnten Modells und der gewählten Gewichtungen ein Zustandsraummodell in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2\tilde{u}(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}\tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Die folgenden Voraussetzungen sind notwendig (und für einen genügend grossen Wert von  $\gamma$  auch hinreichend) für die Existenz einer Lösung des  $H_\infty$ -Problems:

- a)  $[A, B_2]$  stabilisierbar
- b)  $[A, C_2]$  detektierbar
- c)  $\sigma(D_{11}) < \gamma$
- d)  $D_{12}^T D_{12}$  invertierbar, das heisst  $D_{12}$  hat vollen Kolonnenrang
- e)  $D_{21} D_{21}^T$  invertierbar, das heisst  $D_{21}$  hat vollen Zeilenrang

$$f) \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (10)$$

hat vollen Kolonnenrang für alle  $\omega$ .

$$g) \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (11)$$

hat vollen Zeilenrang für alle  $\omega$ .

Dabei sind a) und b) Eigenschaften der Regelstrecke, und c) bis g) können durch geeignete Wahl der Struktur des Gewichtungsschemas und der Gewichtungen stets erfüllt werden.

Um den Algorithmus der  $H_\infty$ -Methode in kompakter Weise anschreiben zu können, führen wir die folgenden Substitutionen ein:

$$\begin{aligned} B &= [B_1 \ B_2] \\ D_* &= [D_{11} \ D_{12}] \\ \bar{R} &= \begin{bmatrix} D_{11}^T D_{11} - \gamma^2 I & D_{11}^T D_{12} \\ D_{12}^T D_{11} & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix} \\ \bar{S} &= B \bar{R}^{-1} B^T \\ \bar{A} &= A - B \bar{R}^{-1} D_{11}^T C_1 \\ \bar{Q} &= C_1^T C_1 - C_1^T D_{11} \bar{R}^{-1} D_{11}^T C_1 \\ G &= \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \bar{R}^{-1} (B^T K + D_{11}^T C_1) \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $K$  die Lösung der ersten Riccati-Gleichung ist

$$\begin{aligned} \hat{R} &= I - \frac{1}{\gamma^2} D_{11}^T D_{11} \\ \bar{R} &= D_{21} \hat{R}^{-1} D_{21}^T \\ \bar{C} &= C_2 - D_{21} G_1 + \frac{1}{\gamma^2} D_{21} \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 \\ \bar{S} &= \bar{C}^T \bar{R}^{-1} \bar{C} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2} G_2^T D_{12}^T D_{12} G_2 - \frac{1}{\gamma^4} G_2^T D_{12}^T D_{11} \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 \\ \bar{A} &= A - B_1 G_1 + \frac{1}{\gamma^2} B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T D_{12} G_2 - B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T \bar{R}^{-1} \bar{C} \\ \bar{Q} &= B_1 \hat{R}^{-1} B_1^T - B_1 \hat{R}^{-1} D_{11}^T \bar{R}^{-1} D_{21} \hat{R}^{-1} B_1^T \\ H &= [P \bar{C}^T + B_1 \hat{R}^{-1} D_{21}^T] \bar{R}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

wobei  $P$  die Lösung der zweiten Riccati-Gleichung ist.

Algorithmus zur Lösung des  $H_\infty$ -Problems:

(i) Löse die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = K\bar{A} + \bar{A}^T K - K\bar{S}K + \bar{Q} \quad (14)$$

(ii) Löse die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = \bar{A}P + P\bar{A}^T - P\bar{S}P + \bar{Q} \quad (15)$$

(iii) Zustandsraummodell des resultierenden Reglers:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= [A - B_1 G_1 - B_2 G_2 \\ &\quad - H(C_2 - D_{21} G_1 - D_{22} G_2)] \xi(t) + H \tilde{y}(t) \\ \tilde{u}(t) &= -G_2 \xi(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Anmerkung: Gesucht ist die einzige symmetrische Matrix  $K$ , so dass die Matrix  $\bar{A} - \bar{S}K$  eine Stabilitatmatrix ist, bzw.

$P$ , so dass die Matrix  $\bar{A} - P\bar{S}$  eine Stabilitatmatrix ist. (Matlab liefert automatisch die richtigen Lösungen.) Die Matrizen  $K$  und  $P$  sind positiv-semidefinit, falls das  $H_\infty$ -Problem eine Lösung hat.

**Ordnungsreduktion und Balancierung**

Aufgrund der Systemerweiterungen für den Entwurf des  $H_\infty$ -Reglers resultieren im Regler im allgemeinen einige Modi, die für das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Reglers praktisch kaum relevant sind. Die Ordnung des Reglers kann dann entsprechend reduziert werden. Dies kann mit dem Algorithmus von Moore erfolgen [1, Kap. 2.8], [2, Kap. 6.4]. Die Ordnung wird schrittweise so lange reduziert, als keine «spürbare» Verschlechterung des Regelsystems eintritt (Empfindlichkeit, komplementäre Empfindlichkeit, Nyquist-Kurve, Sprungantwort).

Bei der Balancierung geht es darum, ein Zustandsraummodell des Reglers zu erhalten, das numerisch möglichst gut konditioniert ist. Der obengenannte Algorithmus von Moore liefert dies als Nebenprodukt. Alternativ kann die resultierende Übertragungsfunktion des Reglers mit einem Zustandsraummodell realisiert werden, das aufgrund einer besonderen, physikalisch sinnvollen Struktur inhérent numerisch problemlos ist [5].

**Umsetzung auf digitale Regelung**

Im allgemeinen werden wir den Regler mit einem Digitalrechner realisieren. Für die Umsetzung des erhaltenen zeitkontinuierlichen Reglers in einen entsprechenden zeitdiskreten eignet sich die Methode der bilinearen Transformation [1, Kap. 2.9.3] am besten.

**Anwendungsbeispiel**

Die Regelstrecke besteht aus der Serie-schaltung eines Tiefpasses 1. Ordnung und einer Totzeit:

$$G_s(s) = \frac{e^{-sT}}{1 + s\tau} \text{ mit } T = 0,28s, \tau = 0,19s \quad (17)$$

Forderungen für den Reglerentwurf:

- a) Durchtrittsfrequenz der Empfindlichkeit:  $\omega_c \approx 2$  rad/s. (Bei dieser Kreisfrequenz hat die Totzeit eine Phase von  $-\omega_c T = -\pi/6$ .)
- b) Stationärer Nachlauffehler der Sprungantwort  $\leq 1\%$  ( $\Rightarrow S(0) \leq 0,01$ )
- c) Robustheit

**Adresse der Autoren**

Prof. Dr. Hans P. Geering, Dr. Christian A. Roduner, Institut für Mess- und Regeltechnik, ETHZ, 8092 Zürich  
E-Mail geering@imrt.mavt.ethz.ch

Wir wählen das Standard *S/KS/T*-Gewichtungsschema gemäss Bild 2 mit den Gewichtungen:  $W_e$  als Tiefpass 1. Ordnung mit dem statischen Übertragungsfaktor  $W_{e0}$  und der Durchtrittsfrequenz  $\omega_0$ ,  $W_u$  klein und konstant, um die obige Voraussetzung d) strukturell bereits zu erfüllen, und  $W_y$  im wesentlichen als PD-Element mit dem statischen Übertragungsfaktor  $W_{y0}$  und der Durchtrittsfrequenz  $\omega_1$ .

$$W_e(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \text{ mit } W_{e0} = 100,$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{6T} \text{ rad/s}$$

$$W_u(s) \equiv 10^{-4}$$

$$W_y(s) = \frac{s + W_{y0}}{\epsilon s + 1} \text{ mit } W_{y0} = \frac{2}{3}, \omega_1 = 10\omega_0,$$

$$\epsilon = 10^{-4} \text{ s/rad}$$

Da wir für den Reglerentwurf ein Streckenmodell endlicher Ordnung benötigen, approximieren wir  $G_s$  mittels eines Padé-Allpass-Elements der Ordnung  $k$  [2]. Die letztere bestimmen wir so, dass die Kreisfrequenz mit einem Phasen-Approximationsfehler von etwa  $\pi/6$  bei  $3\omega_1$  liegt:

$$(18) \quad k \frac{2}{T} \geq 3\omega_1 \Rightarrow k = \lceil 1.5\omega_1 T \rceil = 8 \quad (19)$$

Für die erweiterte Regelstrecke 11. Ordnung resultiert aus dem  $H_\infty$ -Algorithmus

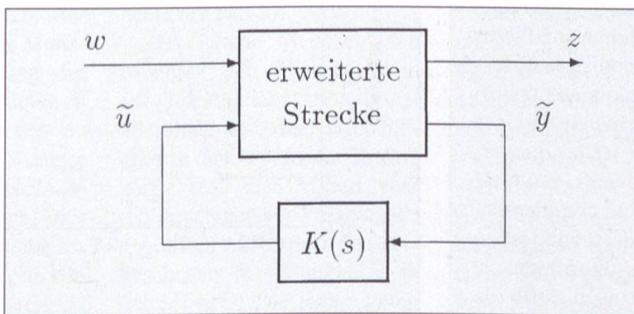


Bild 3 Signalflussbild des  $H_\infty$ -Regelsystems

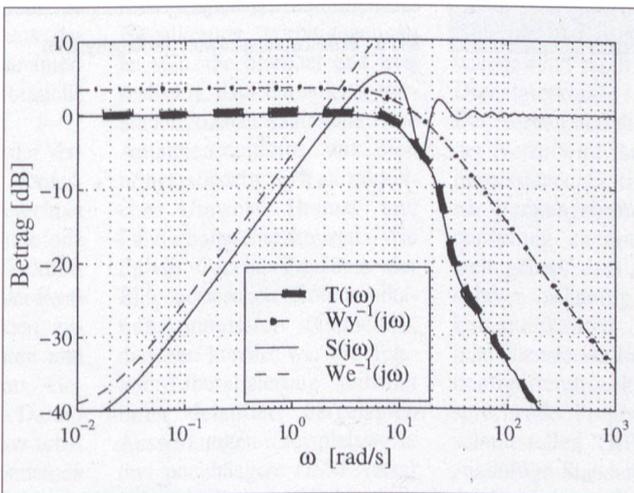


Bild 4 Frequenzkennlinien des Regelsystems

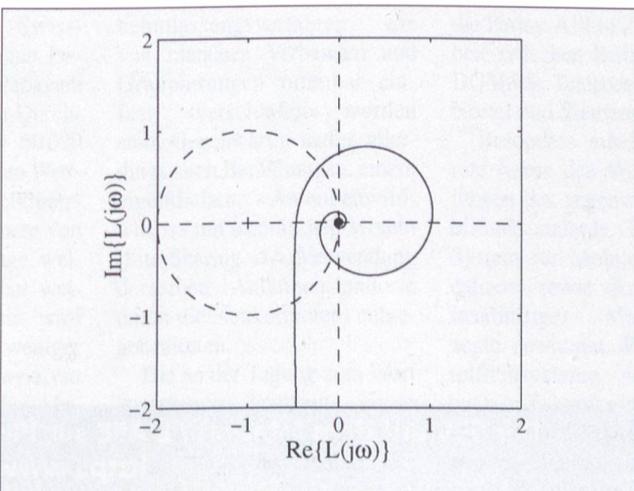


Bild 5 Nyquistkurve des Regelsystems

mus ein robuster Regler 11. Ordnung. Es zeigt sich, dass die Ordnung dieses Reglers mit dem Algorithmus von Moore praktisch ungestraft auf 3 reduziert werden kann. Der reduzierte Regler hat das Zustandsraummodell

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0,253 & 3,590 & 2,395 \\ -3,262 & 0,832 & 20,952 \\ -1,328 & -11,607 & -5,007 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} -0,829 \\ 1,219 \\ -1,8480 \end{bmatrix} e(t) \quad (20)$$

$$u(t) = [-0,808 \quad -0,390 \quad -6,711] \xi(t) + 0,376 e(t)$$

Die Eigenschaften des zeitkontinuierlichen Regelsystems werden mit den folgenden drei Bildern visualisiert: Bild 4 zeigt die Amplitudengänge der Empfindlichkeit und der komplementären Empfindlichkeit sowie deren Entwurfsschranken. In Bild 5 ist die Nyquistkurve  $L(j\omega) = G_s(j\omega) \cdot K(j\omega)$  des aufgeschnittenen Regelkreises und in Bild 6 die Einheitssprungantwort des Regelsystems dargestellt.

### Schlussbemerkungen

In diesem Aufsatz haben wir die  $H_\infty$ -Methode zum Entwurf eines robusten Reglers für einen einschleifigen Regelkreis diskutiert. Die Methode verallgemeinert sich in trivialer Weise auf den Mehrgrößenfall: Anstelle der Amplitudengänge treten die Singularwertverläufe [1, Kap. 2.3]; aber die im Abschnitt «Die  $H_\infty$ -Methode» angegebenen Gleichungen bleiben unverändert.

Der mathematischen Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass wir uns implizit auf Regler ohne *feedthrough* beschränkt haben. Diese Beschränkung könnte beseitigt werden, wobei die Voraussetzung c) eliminiert werden könnte; ein echter Fortschritt wäre dabei aber in der Praxis nicht zu verzeichnen.

In der Praxis haben wir es natürlich mit nichtlinearen Systemen zu tun. Häufig lassen sich diese Systeme aber lokal linear behandeln, wobei das linearisierte Modell von einigen wenigen Betriebspunkt-Parametern abhängt (hier  $T$  und  $\tau$ ). In diesen Fällen können wir die LPV-Idee<sup>1</sup> verwenden: Die Kenngrößen der lokal robusten linearen Regler werden in geeigneter Weise als Funktionen der Betriebspunkt-Parameter der Regelstrecke dargestellt. In unserem Beispiel ist die folgende durch  $k_1$  bis  $k_6$  parametrisierte Repräsentation der Übertragungsfunktion des Reglers besonders geeignet:

<sup>1</sup> LPV als Abkürzung von «linear parameter varying»

$$K(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + k_3 s \frac{k_4 s + 1}{k_5^2 s^2 + 2k_5 k_6 s + 1}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,687 & k_2 &= 2,50 & k_3 &= 0,0351 \\ k_4 &= -0,0351 & k_5 &= 0,0629 & k_6 &= 0,123 \end{aligned} \quad (21)$$

In diesem Sinne ist in [5] das etwas anspruchsvollere Problem der Kraftstoffregelung eines Benzinmotors mit Dreiwegekatalysator für den gesamten Betriebsbereich behandelt worden.

## Literatur

- [1] H.P. Geering: Robuste Regelung, Vorlesungsskript<sup>2</sup>, IMRT Press, Institut für Mess- und Regeltechnik, ETH, Zürich, 1997.
- [2] C.A. Roduner:  $H_\infty$ -Regelung linearer Systeme mit Totzeiten, Diss. ETHZ Nr. 12337, Zürich, 1997; Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 708, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [3] U. Christen: Engineering Aspects of  $H_\infty$  Control, Diss. ETHZ Nr. 11433, Zürich, 1996.
- [4] U. Christen, H.P. Geering: Inverting and Non-inverting  $H_\infty$  Controllers. Systems and Control Letters 30(1997), pp. 31–38.

[5] C.A. Roduner, C.H. Onder, H.P. Geering: Automated Design of an Air/Fuel Controller for an SI Engine Considering the Three-Way Catalytic Converter in the  $H_\infty$  Approach, Proceedings of the 5<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems, S5-1.PDF, pp. 1–7, Paphos, Zypern, July 1997.

<sup>2</sup> <http://www.imrt.mavt.ethz.ch/~geering/ROBREG/RobRegToc.html>

### Conception de régulateurs robustes avec la méthode $H_\infty$

Cet article présente une méthode permettant la conception de régulateurs destinés à des systèmes particulièrement robustes. La méthode  $H_\infty$  travaille avec des caractéristiques de fréquence (caractéristiques des amplitudes pour circuits régulateurs à boucle simple, gradients de valeurs singulières pour systèmes à grandeurs multiples). En choisissant, lors de la conception, les caractéristiques de fréquence appropriées, le système de régulation prend forme de façon à générer les propriétés spécifiées du système (telles que largeur de bande, qualité de régulation dans la bande, acuité de résonance de la sensibilité et de la sensibilité complémentaire ainsi que la robustesse aux erreurs de modélisation dans la bande d'inhibition). Sur le plan des algorithmes, la méthode  $H_\infty$  est extrêmement simple puisqu'il suffit de résoudre deux équations algébriques de matrice Riccati (p. ex. avec Matlab).

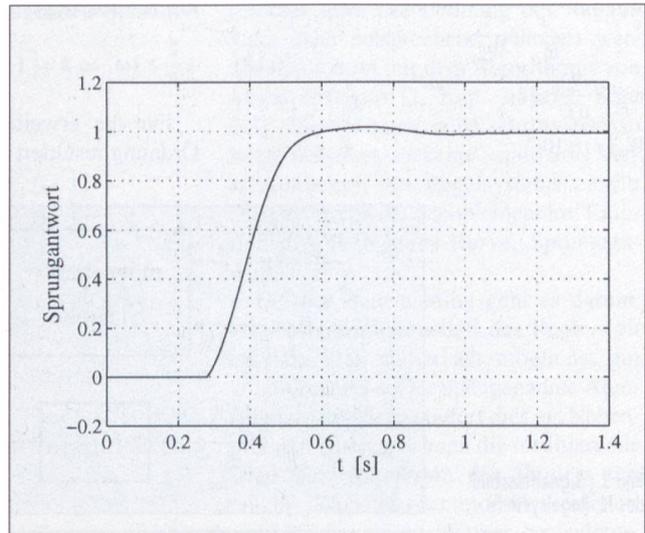


Bild 6 Einheitssprungantwort des Regelsystems