

Variationsstatistische Untersuchungen an den Blättern von *Vinca minor* L.

Autor(en): **Vogler, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahrbuch der St. Gallischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft**

Band (Jahr): **48 (1907)**

PDF erstellt am: **24.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-834945>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

I.

Variationsstatistische Untersuchungen an den Blättern von *Vinca minor* L.

Ein Beitrag
zur Theorie des Flächenwachstums der Blätter.

Von Dr. **Paul Vogler.**

1. Das Ludwig'sche Gipfelgesetz.

Die tagtägliche Beobachtung lehrt, dass nie zwei Organismen derselben Art vollständig gleich sind, so wenig wie zwei Blätter eines Baumes je absolut übereinstimmen. Diese allgemein bekannte Tatsache der Variabilität aller Organismen und ihrer Teile legt der Wissenschaft eine ganze Anzahl von Fragen vor: nach den Ursachen, der Bedeutung dieser Erscheinung, nach den Gesetzen, die sie beherrschen. Zahlreich sind die Wege, auf denen man zur Beantwortung dieser Fragen zu gelangen sucht: vergleichende Morphologie, Kulturversuche, Experimental-Morphologie, stammesgeschichtliche Untersuchungen schlagen in dieses Gebiet hinein.

Nun gibt es eine Gruppe von Variabilitätserscheinungen, die einer ganz speziellen Untersuchungsmethode zugänglich sind, nämlich die, bei denen es sich um zahlenmässig fassbare Variationen handelt: variable Dimensionen, die sich messen lassen; variable Anzahl gleichwertiger Organe, die auszählbar sind; Variationen des Gewichtes, die sich durch exaktes Wägen feststellen lassen. In allen diesen Fällen ist nämlich eine statistische Untersuchung möglich. Und seit Quételet im Jahre

1871 für die Anthropometrie den Nachweis führte, dass sich sogar ein mathematischer Ausdruck für die Variation einzelner Merkmale beim Menschen gewinnen lasse, sobald man die Untersuchung auf eine genügend grosse Anzahl von Individuen ausdehne, hat sich die „Variationsstatistik“ in der Biologie zu einem ziemlich ausgedehnten Wissenszweig entwickelt, und wir kennen heute einige Gesetze der Variation, die durch diese Methode der Forschung allein gewonnen werden konnten.

Quételet war zum Schluss gelangt, dass sich die Variationen eines Merkmals symmetrisch um ein Zentrum grösster Dichte gruppieren, oder etwas weniger knapp ausgedrückt: verfolgen wir irgend ein Merkmal, etwa die Grösse der Menschen in einem Volke (in cm ausgedrückt), so werden wir finden, dass innerhalb eines gewissen Zahlenraumes auf jeden Grössenwert eine bestimmte Anzahl von Individuen entfallen. Diese Anzahl ist am grössten für einen Mittelwert; je weiter wir uns von diesem entfernen, nach oben oder unten, um so kleiner wird sie, bis sie schliesslich auf Null herabsinkt. Bildlich lässt sich dieses Verhalten durch eine Kurve darstellen, indem man auf einer Horizontalen in gleichen Abständen Senkrechte errichtet, diese mit den gefundenen Grössen bezeichnet und sodann auf den Vertikalen in konstantem Masstab die jeweilige Anzahl der zu jedem Wert gehörenden Individuen aufträgt. Die Verbindung der so erhaltenen Punkte ergibt die „Variationskurve“, die in diesem Falle einen Gipfel auf dem Mittelwert hat und nach beiden Seiten symmetrisch abfällt. Eine solche Kurve entspricht der in der Mathematik bekannten Gauss'schen Wahrscheinlichkeitskurve, die sich auch durch einen mathematischen Ausdruck darstellen lässt.

Solche eingipflige, einfache Variationskurven wurden in der Folge im Tier- und Pflanzenreiche vielfach nachgewiesen, sodass wir es hier mit einer sehr verbreiteten Gesetzmässigkeit

zu tun haben, deren Ursachen zu erforschen hauptsächlich Aufgabe des Experiments ist. Doch ist hier nicht der Ort, darauf weiter einzutreten, ebensowenig wie auf die Bedeutung derartiger Kurven für die Unterscheidung von Varietäten, für Vererbungsfragen und ähnliches, wo die Meinungen über ihren Wert zum Teil noch sehr weit auseinandergehen.

Bei der Untersuchung botanischer Objekte zeigte sich aber bald, dass der Quételet'sche Satz nicht überall Gültigkeit hat; dass vielmehr häufig sich Kurven mit mehreren Gipfeln ergeben, also mehrere Zentren grösster Dichte vorhanden sind. Diese „Nebengipfel“ verschwinden auch nicht, wenn man die Messungen oder Zählungen noch so sehr vermehrt; sie können also nicht Zufallserscheinungen sein, müssen vielmehr fest begründet sein in der innern Organisation der untersuchten Objekte.

Am klarsten sind jene Beispiele, wo es sich um die Variation der Anzahl gleichwertiger Organe, etwa der Doldenstrahlen bei Umbelliferen und Primulaceen, oder der Strahlblüten bei Kompositen handelt. Fast immer sind die Kurven mehrgipflig; und, was besonders wichtig ist, die Gipfel liegen nicht beliebig, sondern ganz bestimmte Zahlen erscheinen als bevorzugte. Namentlich Prof. Ludwig in Greiz hat neben vielen andern durch eine grosse Zahl von Arbeiten (vgl. Botan. Zentralblatt von 1895—1898) nachgewiesen, dass wir es hier mit einem ganz bestimmten Gesetz der Variation zu tun haben. Die bevorzugten Zahlen gehören einer Reihe an, die man als Fibonaccireihe bezeichnet und die folgendermassen lautet: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 usw. (jede folgende Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden). Zu diesen Hauptzahlen gehören sodann als Nebenzahlen ihre einfachen Multipla, also 2-, 3-, 4-fache; vor allem die Dupla, also 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110 usw. Hugo de Vries nannte diese Gesetzmässig-

keit in der Anordnung der Gipfel kurz das Ludwig'sche Gipfelgesetz. Ein Beispiel mag es noch erläutern: Ludwig¹⁾ hat an unserer Wucherblume die Anzahl der Strahlblüten teils selbst ausgezählt, teils durch Schüler an verschiedenen Orten auszählen lassen und zwar schliesslich bis auf 17,000 Exemplare. Dabei ergaben sich folgende Verhältnisse (die obere Zahlenreihe gibt die Anzahl der Strahlen der Köpfchen an, die untere wieviele Köpfchen unter den 17,000 ausgezählten die betreffende Anzahl von Strahlen besaßen):

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	9	13	36	65	148	427	383	455	479	525
18	19	20	21	22	23	24	25	26		
625	856	1568	3650	1790	1147	812	602	614		
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
375	377	294	196	183	187	307	346	186	64	
37	38	39	40	41	42	43				
28	16	16	14	—	3	2.				

Fig. 1 zeigt die sich ergebende Variationskurve; ihre Gipfel liegen auf den Hauptzahlen 8, 13, 21, 34 und den Nebenzahlen 10, 26, 42 der Fibonaccireihe. Eine Zusammenstellung der für viele Kompositen und Umbelliferen gefundenen Gipfelzahlen gibt Ludwig im Bot. Zentralblatt, LXIV, p. 100. Die gleiche Gesetzmässigkeit ergab sich auch für die Variation der Anzahl der Perigonblätter bei Trollius (Ludwig), der Anzahl der Honigblätter, Staubgefässe und Fruchtknoten beim Scharbockskraut, *Ranunculus ficaria* (Vogler, Vierteljahresschrift der Naturw. Gesellschaft Zürich) usw., so dass wir es also hier mit einem weite Gebiete der pflanzlichen Variation umfassenden Gesetz zu tun haben.

Es ist selbstverständlich, dass man es bei der einfachen Konstatierung des Gipfelgesetzes nicht bewenden liess, sondern

¹⁾ Botan. Zentralblatt, Band LXIV, 1895, p. 1.

dass man versuchte, die gefundene Bevorzugung bestimmter Zahlen auf ein inneres Gesetz der Entwicklung oder des Wachstums zurückzuführen. Auch da ist Ludwig wieder voran-

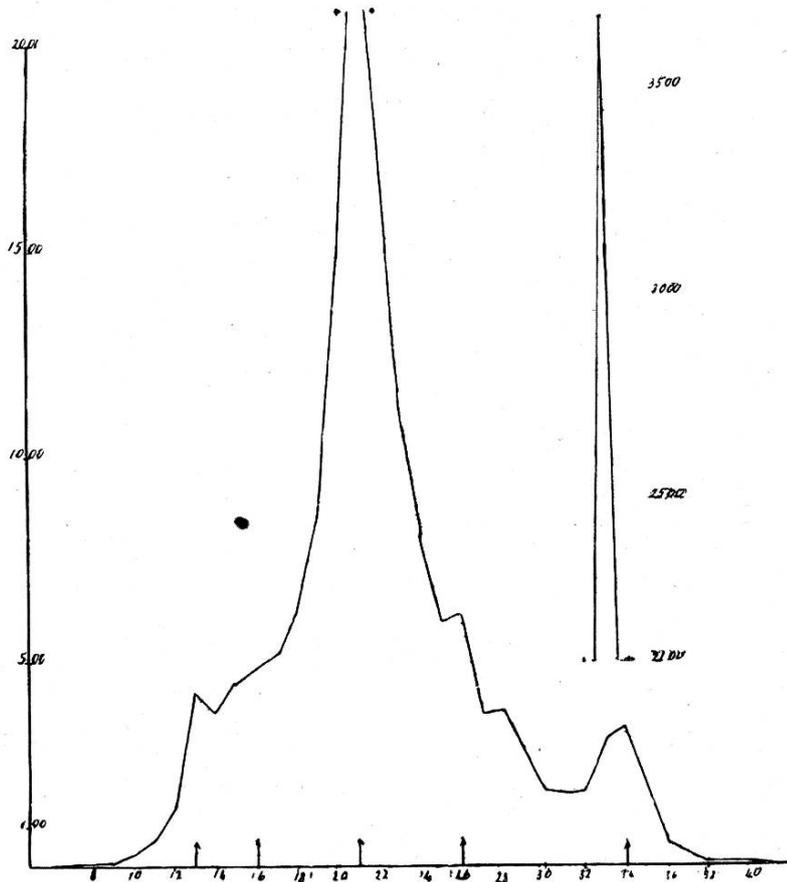


Fig. 1.

Variation der Strahlblüten von *Chrysanthemum leucanthemum* (nach Ludwig).

gegangen. Sein Erklärungsversuch lässt sich etwa folgendermassen darstellen:

Wir nehmen an, dass für jedes Organ einer Pflanze eine „Anlage“ vorhanden sei, ein niederstes Formelement („Biophor“). Kommt ein und dasselbe Organ mehrmals vor, so muss der Entfaltung desselben eine Vermehrung dieser „Biophore“ vorausgegangen sein. Die einfachste Vorstellung, die wir uns von einer Vermehrung derselben machen können, ist die einer

fortgesetzten Zweiteilung. Dabei sind verschiedene Schemata, nach denen diese Teilung erfolgt, möglich. Der einfachste Fall wäre der, dass die ursprünglich einfache Anlage in zwei gleichwertige Tochteranlagen zerfällt, die nach einer Reifeperiode sich gleichzeitig wieder auf gleiche Weise vermehren usw. Dann erhalten wir als bevorzugte Zahlen die Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32 usw.; die Zwischenwerte kommen natürlich auch vor, da nicht immer alle Anlagen zur Entfaltung gelangen. Bei Untersuchung zahlreicher Individuen, also bei einer statistischen Aufnahme der Variation, erhielten wir in diesem Falle eine Kurve mit Gipfeln auf den Zahlen der „Potenzreihe“. (Das Vorkommen dieser Reihe ist auch in der Tat in einigen Fällen nachgewiesen.)

Um zur „Fibonaccireihe“ zu gelangen, braucht man das Schema der Anlagevermehrung nur wenig zu modifizieren. Sind bei rhythmischer Zweiteilung die Teilungsprodukte ungleich, so dass nach einem bestimmten Zeitintervall nur die eine Tochteranlage für eine neue Teilung reif geworden ist, die andere aber doppelt so lang braucht, also jeweils eine Reifeperiode überspringt, so ergibt sich, bei fortgesetzter Teilung nach diesem Schema, die Reihe 1, 2, 3, 5, 8, 13 usw., also die Hauptzahlen der Fibonaccireihe. Eine schematische Darstellung zeigt das sofort. Die reife, teilungsfähige Anlage werde mit A bezeichnet, die unreife, die nach einer Zeiteinheit herangereift sein wird, mit a, dann haben wir:

Die ursprüngliche Anlage, teilungsfähig A
teilt sich in 2 Tochteranlagen, die nach 1 Zeiteinheit herangewachsen sind zu $\overbrace{A \quad a}$
nach 2 Zeiteinheiten haben wir dann $\overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a}$
nach 3 Zeiteinheiten $\overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a}$
" 4 " $\overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a} \quad \overbrace{A \quad a}$
usw.

Je nachdem, bis zu welcher Etappe die Anlagevermehrung weiter geht, ehe es zur Zerklüftung des Protoplasmas und damit zur beginnenden Organbildung kommt, wird das betreffende Organ 1, 2, 3, 5, 8 usw. mal auftreten. Die Nebenzahlen ergeben sich leicht, wenn man von 2 oder mehr primären Anlagen ausgeht oder eine nachträgliche Verdoppelung (bezw. Vervielfachung) annimmt. So gelingt es uns also, die Bevorzugung der im Wucherblumen-Beispiel auftretenden Gipfelzahlen auf eine gesetzmässig verlaufende Anlagenvermehrung zurückzuführen. (Es soll hinzugefügt werden, dass diese Anlagen nicht etwa Zellen oder unter dem Mikroskop nachweisbaren Elementarteilen derselben entsprechen, sie sind ebenso hypothetisch wie die Atome des Chemikers; auch kann über ihre Natur, ob diese körperlich oder nur dynamisch sei, nichts weiter ausgesagt werden. Aus den Tatsachen der Entwicklung und der Bevorzugung bestimmter Zahlen können wir nur zurückschliessen auf die Gesetzmässigkeit ihrer Vermehrung.)

Dieses Vermehrungsgesetz der Anlagen, das die Zahlen der Fibonaccireihe gibt, beherrscht nun, wie schon ausgeführt, im Reich der höheren Pflanzen grosse Gebiete, namentlich wo es sich um das mehrmalige Vorkommen gleichwertiger Organe handelt. Nun erhebt sich die Frage, ob es nicht auch Gültigkeit habe für das Längen- und Flächenwachstum bestimmter Organe; ob sich nicht mehrgipflige Variationskurven, die man z. B. bei Messungen von Blättern erhält, ebenfalls auf dieses Prinzip zurückführen lassen.

2. Die Anwendung des Ludwig'schen Gipfelgesetzes auf Blattflächen.

„So beträchtlich nun auch die Zahl der Arbeiten ist, in denen ein solcher Vermehrungsmodus des Fibonacci bereits erwiesen wurde, so sind doch fast durchweg in ihnen rein

florale Merkmale berücksichtigt, indem so das schwankende numerische Verhältnis der Petalen oder Korollen, oder die Variabilität im Androeceum oder Gynoeceum und dergleichen zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wurden, während andererseits bisher keine Publikationen erschienen, in denen gelegentlich von phyllometrischen Studien ein Überwiegen entsprechender Zwischenzahlen dargetan würde,“ sagt G. Ritter¹⁾ in seiner Arbeit: „Beiträge zur Physiologie des Flächenwachstums der Pflanzen“, die zum erstenmal einen solchen Nachweis zu führen sucht. Bei Messungen der Blattlängen bei der Preisselbeere (*Vaccinium Vitis idaea*), der Heidelbeere (*Vaccinium Myrtillus*) und der gemeinen Myrte (*Myrtus communis*) fand er mehrgipflige Kurven, deren Gipfel gesetzmässig verteilt erscheinen und zwar liegen sie angenähert auf den mit 10 multiplizierten Quadratwurzeln der Fibonaccizahlen. Damit ist bereits wahrscheinlich gemacht, dass auch für das Flächenwachstum der Blätter und für die Anlagen das Prinzip der Vermehrung nach der Fibonacciregel gelte.

Die Ritter'sche Publikation veranlasste mich nun, ältere Messungen von Vincablättern, die mir seinerzeit ebenfalls mehrgipflige Kurven ergeben hatten, auf diesen Punkt hin zu untersuchen. Teilweise ergab sich Übereinstimmung, teilweise aber bedeutende Abweichungen. Es ist aber, wie Ritter selbst ausführt, auch nicht anzunehmen, dass in jedem Falle die Verhältnisse so einfach liegen; denn „wir dürfen ja nicht im Millimeter den allgemeinen Masstab der Natur erblicken; man wird im allgemeinen nur erwarten können, dass die Abscissenintervalle im Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Fibonaccizahlen stehen.“ Und so galt es nun, meine Messungen noch weiter auszudehnen, und dann zu versuchen, ob die Resultate

¹⁾ Beihefte zum Botan. Zentralblatt, Bd. XXII, 1907, Abtlg. II.

sich vielleicht in anderer Weise unter das Ludwig'sche Gipfelgesetz einreihen lassen. Ich glaube, dass mir das annähernd gelungen ist; dass also ein neuer Beweis für die Gültigkeit des Gesetzes der Anlagevermehrung bei Ausbildung der Blattspreite gegeben werden kann.

In erster Linie muss ich aber die theoretische Frage, die bei Ritter nur kurz gestreift ist, etwas einlässlicher besprechen, d. h. ich möchte, der Mitteilung der Resultate meiner Untersuchung vorausgehend, abzuleiten versuchen, was für Kurven sich für Länge und Breite der Blätter ergeben müssen, wenn die Vermehrung der Anlagen nach der Regel des Fibonacci vor sich geht.

Wir supponieren für eine bestimmte Flächeneinheit eine Anlage. Diese eine Anlage bedinge also nur den Flächeninhalt des Blattes, in dem Sinne, dass eine Verdoppelung der Anlage für die Entwicklung des Blattes eine Verdoppelung der Blattfläche bedeute usw. Vermehrt sich nun die Anlage nach unserm Fibonaccischema, so müssen wir für die Blattfläche eine Fibonaccikurve erhalten, d. h. wenn eine mehrgipflige Kurve auftritt, so müssen die Quotienten aus den Gipfelzahlen gleich sein den Quotienten aus den Fibonaccizahlen. Nun ist es ja allerdings nur in ganz seltenen Fällen möglich, die Blattfläche aus wenigen Messungen genau zu bestimmen; bei allen komplizierten Blattformen wird auch eine genügende Annäherungszahl nur schwer zu erreichen sein; bei einfacheren Blattformen dagegen kann die Messung weniger Dimensionen doch genügende Annäherungswerte ergeben, sodass sich wenigstens daraus ablesen lässt, ob die Kurve in den Hauptzügen dem Fibonaccitypus entspricht. Nehmen wir als einfachste Blattform z. B. die Ellipse, die annähernd ziemlich häufig verwirklicht ist, so genügt die Messung von Länge und Breite, um die Fläche zu bestimmen. Es ist dann aber

nicht einmal nötig, diese selbst zu berechnen. Da der Inhalt der Ellipse gleich $\frac{\pi}{4}(\text{LB})$ ist, so müssen, wenn sich $J_1 : J_2 : J_3$ usw. verhalten wie die Fibonaccizahlen, sich auch $\frac{\pi}{4}(\text{LB})_1 : \frac{\pi}{4}(\text{LB})_2 : \frac{\pi}{4}(\text{LB})_3$ usw. gleich verhalten. Nun ist $\frac{\pi}{4}$ aber eine Konstante, also verhält sich $(\text{LB})_1 : (\text{LB})_2$ usw. ebenfalls wie die Fibonaccizahlen. Und das gilt nicht nur bei der Ellipse, sondern auch bei jeder andern einfachen Blattform, so dass wir also in sehr vielen Fällen verhältnismässig leicht prüfen können, ob wir es bei der Variation der Blattspreite mit einer Fibonaccikurve zu tun haben oder nicht.

Nun hat aber diese Untersuchungsmethode einen Mangel, der sich nicht aus der Welt schaffen lässt. Unsere Messinstrumente erlauben uns nicht eine absolut genaue Messung; unter den Millimeter hinunter werden wir bei Blattmessungen nicht gehen können, schon deswegen, weil nie alle Blätter absolut in gleichem Zustand gemessen werden und weil sich Fältchen und dergleichen nicht immer vollständig vermeiden lassen; d. h. selbst diese Millimetermessungen werden nicht immer absolut zuverlässig sein. Bei der Multiplikation von $L \times B$ multiplizieren wir dann auch unsere Beobachtungsfehler. Ein anderer Mangel liegt ferner darin, dass wir so sehr grosse Zahlen und eine sehr grosse Variationsbreite bekommen, so dass eine fast unbegrenzte Zahl von Messungen nötig würde, um eine geschlossene Kurve zu erhalten, in der zudem die Primzahlen immer vollständig fehlen müssen. Wir können also eine solche Flächenkurve überhaupt nur konstruieren, wenn wir sie auf eine andere Einheit beziehen, etwa auf 10 oder 20 oder gar 100 mm². Aus allen diesen Gründen wird es uns genügen müssen, wenn die Kurve in grossen Zügen einer Fibonaccikurve entspricht.

Zuverlässig sind für uns nur die direkt erhaltenen Zahlen,

also die linearen Dimensionen des Blattes. Und wie müssen nun die Variationskurven für diese aussehen, wenn die Kurve der Blattfläche dem Fibonaccitypus angehört? Eine einfache Überlegung lehrt, dass, gleiche Grundform der Blattspreite vorausgesetzt, die Verdoppelung der Fläche eine Multiplikation der linearen Dimensionen mit der Quadratwurzel aus 2 verlangt. Verhalten sich also die Abstände der Kurvengipfel für die Blattfläche wie die Fibonaccizahlen, so müssen sie sich in der Kurve der Länge und Breite verhalten wie die Quadratwurzeln aus diesen. Wichtig ist dabei, dass die Grundform der Blattspreite dieselbe bleibt, bei einem elliptischen Blatte also sich das Verhältnis von Länge zu Breite nicht ändert. Diesen Punkt scheint mir nun Ritter ausser acht gelassen zu haben und es ist leicht möglich, dass bei Berücksichtigung desselben seine Kurven noch besser stimmten.

Aus diesen allgemeinen Überlegungen ergab sich für unsern speziellen Fall, die Untersuchung der Vincablätter, folgendes Vorgehen. In erster Linie musste der Versuch gemacht werden, ob nicht schon die für die Werte von $L \times B$ erhaltene Kurve die Andeutung einer Entwicklung nach dem Ludwig'schen Gesetz ergebe. War das der Fall, so erleichterte sich die weitere Arbeit bedeutend, denn es ist unstreitig leichter, die Gipfelzahlen auf ganze Fibonaccizahlen zu reduzieren, als auf die Quadratwurzeln von solchen, vor allem deswegen, weil die Intervalle viel grösser sind. Können wir auch so nur ungefähre Werte erhalten, so haben wir doch einen festen Anhaltspunkt, dessen Richtigkeit oder Unrichtigkeit sich im weiteren dann rasch ergeben wird.

Wir wollen annehmen, die Gipfel unserer Kurve liegen annähernd auf den Fibonaccizahlen multipliziert mit x . $\frac{LB}{x}$, $\frac{L_1 B_1}{x}$, $\frac{L_2 B_2}{x}$ usw. gibt also die Fibonaccireihe. Sagen wir

also kurz: $\frac{LB}{x} = \text{Fibonaccizahl}$. Damit nun LB nach der Fibonaccireihe sich entwickle, muss L und B sich je nach den Quadratwurzeln aus diesen entwickeln. L muss also sein gleich einer Konstanten α mal Quadratwurzel aus der zugehörigen Fibonaccizahl, B gleich β mal dieser selben Quadratwurzel. Wir haben also $\frac{\alpha\sqrt{Fi} \beta\sqrt{Fi}}{x} = \text{Fibonaccizahl}$. Daraus ergibt sich $\alpha\beta = x$. Da nun das Verhältnis von $L : B$ konstant sein muss, gleich y , so muss auch $\alpha : \beta = y$ sein. Und damit haben wir die Möglichkeit, unsere Gipfelzahlen für L und B zu berechnen.

Gegeben sind uns:

L und B als direkt gemessen,
 x ergab sich aus der Kurve für $L \times B$,
 y ist $\frac{L}{B}$ für die berücksichtigten Blätter.

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= x, \\ \frac{\alpha}{\beta} &= y, \\ \alpha^2 &= xy, \\ \alpha &= \sqrt{xy}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{x}{y}},\end{aligned}$$

mit andern Worten: die Gipfel der Kurve für L müssen liegen auf den Quadratwurzeln der Fibonaccizahlen multipliziert mit \sqrt{xy} , und die entsprechenden der B -Kurve auf denselben multipliziert mit $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Hätte die Kurve für $L \times B$ keine klaren Andeutungen für die schätzungsweise Bestimmung von x gegeben, so hätten wir anders vorgehen müssen. Und zwar wären wir in dem Fall wohl am besten von der Kurve für L ausgegangen. Ihre Gipfel hätten sich verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Fibonaccizahlen. Die Berechnung der zugehörigen Fibonaccizahlen mag

auf algebraischem Wege möglich sein. Wir Nicht-Mathematiker werden aber wohl rascher durch Probieren zum Ziele kommen, indem wir versuchen, die Zahl zu finden, mit der die Quadratwurzeln multipliziert werden müssen, um unsere Gipfelzahlen zu bekommen. (Wenn der Fall so einfach liegt, wie bei den Untersuchungen Ritters, haben wir diese bald gefunden.) Damit haben wir dann α bestimmt. Aus $\alpha : \beta = L : B = y$ können wir dann β berechnen und so die Gipfel der B-Kurve nachkontrollieren. $\alpha\beta$ gibt uns x und wir haben so eine weitere Kontrolle unseres Resultates, indem die Gipfel der $L \times B$ -Kurve den Fibonaccizahlen mal x wenigstens angenähert entsprechen müssen.

So haben wir also in beiden Fällen, ob wir die eine oder andere Kurve als Ausgangspunkt wählen, die Möglichkeit, die Resultate durch Umrechnen der einen Kurve auf die andere zu kontrollieren, so dass wir unsere Schlüsse mit genügender Sicherheit ziehen können.

3. Die Variation der Blätter von *Vinca minor*.

Für eine Untersuchung wie die vorliegende eignet sich *Vinca minor* aus zwei Gründen besonders gut: die Blattform ist sehr einfach, nahezu eine Ellipse, und doch in ihren Dimensionen sehr variabel; als immergrüne Pflanze liefert sie uns die Blätter auch im Winter stets frisch, so dass sich die Messungen auf eine längere Zeit verteilen lassen, in der zudem ein Weiterwachsen nicht anzunehmen ist. Die Frage, ob die Blätter des Vorjahres im Winter alle ausgewachsen sind, hätte allerdings eigentlich eine vorausgehende Spezialuntersuchung verlangt; ich begnügte mich aber mit der Konstatierung der Tatsache, dass meine Messungen aus verschiedenen Jahren und von verschiedenen Standorten, die am Anfang des Winters

und am Ende Kurven mit gleicher Gipfelage ergaben, so dass also die gestellte Frage für mich mit ja beantwortet erschien.

Was die Auswahl der Blätter anbetrifft, so ging ich folgendermassen vor: ohne irgendwelche Wahl wurden an verschiedenen Standorten einzelne Stengel oder Ausläufer gesammelt, und dann davon sofort zu Hause meist sämtliche nicht notorisch verkrüppelten Blätter gemessen, unter Weglassung der allerjüngsten an den Triebspitzen. Der Augenschein lehrt ohne weiteres, dass die Mitte des Triebes auf eine ziemlich weite Strecke die gleichartigsten, ich möchte sagen „normalen“ Blätter trägt, so dass also ohne weiteres aus der Art der Auswahl sich eine Bevorzugung dieser ergab. Doch wurden auf solche Weise auch die oft abnorm breiten und kurzen Blätter der Triebbasis, wie auch die oft sehr schmalen der Triebspitze genügend berücksichtigt.

Die Messungen wurden vorgenommen durch leichtes Aufdrücken der frischen Blätter auf Millimeterpapier mit Hilfe eines Objekträgers. So liessen sich auf einen Blick Länge und Breite genau genug ablesen. Schwierigkeiten ergaben sich nur ausnahmsweise bei abnorm gekrümmten Blättern, die dann einfach ausgeschaltet wurden. Die Länge wurde gemessen vom Beginn der Spreite bis zur Spitze, also ohne Blattstiel.

Für die Anzahl der zu messenden Blätter nahm ich mir nicht eine bestimmte Grenze von vornherein vor, sondern gedachte dieselbe möglichst hoch zu treiben, mindestens soweit, bis sich durch weitere Messungen die Kurve nicht mehr wesentlich änderte, d. h. die Gipfel konstant blieben. Durch Konstruktion der Kurven von 200 zu 200 Messungen für Länge und Breite konnte dieser Moment leicht bestimmt werden und er war auch über Erwarten früh erreicht. Schon von 800 Messungen an ergaben sich keine wesentlichen Verschiebungen der wichtigeren Gipfel mehr. Der Sicherheit halber

und vor allem, um verwertbare Zahlen für die Blattfläche und für die Korrelation zwischen Länge und Breite zu erhalten, steigerte ich die Zahl der Messungen trotzdem bis auf 2500.

In Fig. 2 habe ich die Kurven für 800, 1400 und 2500 Längenmessungen übereinandergezeichnet reproduziert; man sieht, dass alle wichtigeren Gipfel der 2500-Kurve schon bei

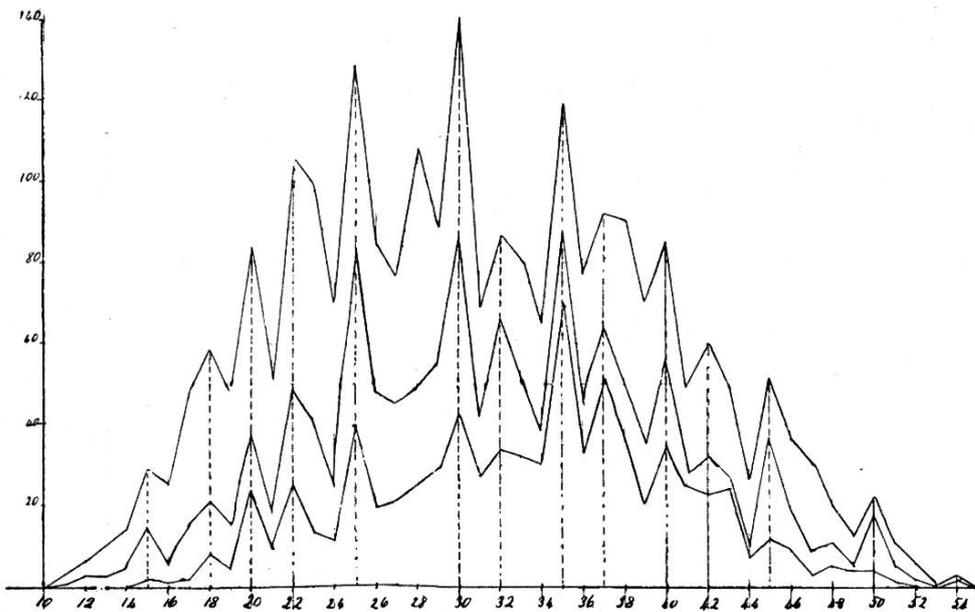


Fig. 2. Variationskurve für die Länge der Blätter von *Vinca minor*, konstruiert nach 800, 1400 und 2500 Messungen.

800 vorhanden sind. Nur der auf 28 tritt noch bei 1400 nicht hervor. Ganz gleiche Verhältnisse ergaben sich für die Breite. Damit dürfte der Nachweis geführt sein, dass die Anzahl meiner Messungen auch für ziemlich weittragende Schlüsse gross genug ist.

a) *Die Korrelation zwischen Länge und Breite.*

Den Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen und Rechnungen bildet das durch die Messungen gefundene Zahlenmaterial. In der Tabelle auf Seite 16 ist dieses übersichtlich zusammengestellt; diese gibt nicht nur in der untersten und

Korrelation zwischen Länge und Breite bei den Blättern von *Vinca minor*. (2500 Messungen.)

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	Total:					
6	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
7	—	2	2	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	
8	—	1	2	4	6	4	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26		
9	—	—	3	3	10	11	12	6	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	52		
10	—	2	2	3	6	6	17	20	7	10	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	86		
11	—	—	—	—	4	10	17	18	21	9	6	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	107			
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	141			
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	201			
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	216			
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	222			
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	265			
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	285			
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	232			
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	198			
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	167			
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	109			
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	89			
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	44		
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18		
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18		
26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	
27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
Total:	3	6	10	14	29	25	48	59	48	84	51	106	99	69	129	85	77	109	89	140	69	87	81	67	119	77	92	91	70	85	50	60	50	27	52	36	31	20	13	23	11	6	1	3	—	—	—	2500			

der äussersten Reihe die Variation von Länge und Breite überhaupt, sondern auch sofort einen kleinen Einblick in die Korrelation zwischen den beiden Grössen. Das Material dürfte wohl genügen zur mathematischen Berechnung eines Korrelationsindexes, nach den Formeln, wie man sie da und dort in variationsstatistischen Arbeiten findet. Ich habe solche Rechnungen nicht durchgeführt; sie liegen mir zu ferne und ich habe immer den Eindruck gehabt, dass solche nach ziemlich komplizierter Methode berechneten Indices für uns Nicht-Mathematiker meist herzlich wenig sagen; wir sind doch gezwungen, uns diese erst durch eine andere Darstellungsweise zu illustrieren. So begnüge ich mich also im folgenden von vornherein mit solchen anschaulicheren Darstellungen, die mir zudem gestatten, diejenigen Punkte, die für meine weitere Untersuchung wichtig sind, besonders hervorzuheben.

Ein besserer Einblick in die Korrelationsverhältnisse ergibt sich schon, wenn wir die Variation des Verhältnisses von L zu B, das wir oben mit y bezeichnet haben, verfolgen. Ich habe dieses Verhältnis mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Messungen auf eine Dezimale bestimmt, oder, um Brüche zu vermeiden, als $10 L : B$ berechnet. Das Resultat ist folgendes:

$10 L : B$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
	1	5	12	9	58	129	235	316	359	326		
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	238	251	188	151	95	61	31	9	9	4	3	4
			32	33	34	35	36	37	38			
			1	1	1	1	—	—	1			

Fig. 3 zeigt diese Variation in graphischer Darstellung. Es ist eine zweigipflige Kurve mit Hauptgipfel auf 18 und einem Nebengipfel auf 21; die Korrelation zwischen L und B kann also keine vollständige sein, denn sonst hätten wir eine eingipflige Kurve erhalten müssen. Die grosse Variationsbreite

unseres y 's, die uns hier entgegentritt, sagt uns bereits, wie leicht das Bild für unseren Versuch der Anwendung des Ludwig'schen Gipfelgesetzes auf die Variationen der Länge

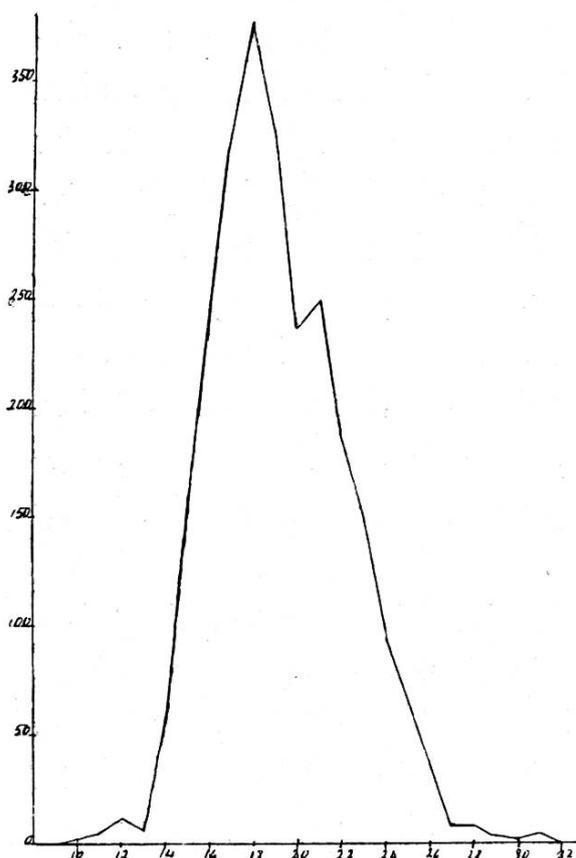


Fig. 3.

Variation des Wertes $10 L : B$ bei *Vinca*.

Weise graphisch dar, dass wir, die Länge als Abscisse genommen, die zugehörige Breite als Ordinate auftragen. Besteht eine vollständige Korrelation, so muss die Verbindungslinie dieser sämtlichen Punkte eine Gerade sein, die, wenn mit der Länge auch die Breite wächst, nach rechts ansteigt. Wir können diese theoretische Gerade berechnen aus dem Mittelwert von $10 L : B$, der 19,24 beträgt. Bei $L = 19,24$ müsste $B = 10$ sein, bei $L = 38,48$, $B = 20$ usw., doch genügen ja diese zwei Werte bereits zur Konstruktion der Geraden.

und Breite gestört werden kann, wenn wir die Gesamtzahl der Messungen berücksichtigen würden; noch mehr aber die Zweigipfligkeit der Kurve. Es geht daraus hervor, dass unter den untersuchten Blättern zwei Typen vorkommen, die nicht zusammengenommen werden dürfen.

Zur Charakterisierung der Korrelationsverhältnisse zwischen L und B eignen sich zwei andere Darstellungsarten besser. Wir berechnen zunächst aus unseren Tabellen für jede Blattlänge die mittlere Breite und stellen uns dann das Ergebnis in der

Soweit nun die empirisch gefundene Kurve oberhalb dieser berechneten Geraden liegt, sind die Blätter verhältnismässig zu breit, soweit sie darunter liegt, entsprechend zu schmal.

Die gefundene Zahlenreihe ist folgende:

Länge des Blattes:	11	12	13	14	15	16	17		
Zugehörige mittlere Breite:	7,3	8,0	8,3	8,7	9,2	9,4	9,9		
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
10,8	11,4	12,0	12,5	13,1	13,5	13,9	14,6	14,8	15,2
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
15,7	15,6	16,1	16,5	16,9	17,1	17,3	17,2	17,7	18,1
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
17,9	19,3	18,7	19,6	19,6	20,3	19,5	20,4	20,5	20,0
48	49	50	51	52	53	54			
21,2	22,2	22,2	23,0	22,3	23,0	24,3			

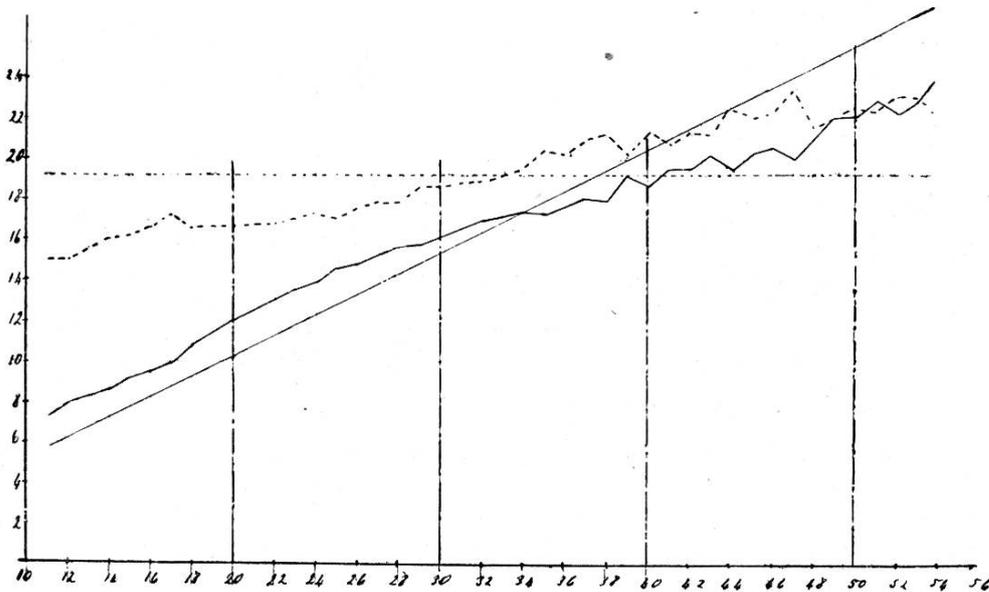


Fig. 4. Variation der Breite mit zunehmender Länge bei den Blättern von *Vinca*.

Wir finden also zwar ein fast kontinuierliches Ansteigen der Breite mit wachsender Länge, aber, wie bei unserer zweigipfligen Kurve für die Variation von L : B zu erwarten war, ein recht starkes Abweichen der empirischen Kurve von der

berechneten Geraden, wie Fig. 4 (ausgezogene Linie) aufs deutlichste zeigt. Anfänglich liegt die empirische Kurve (starke Linie) über der berechneten (zarte Linie); bei der Länge 34 mm kreuzen sich die beiden und nachher bleibt die empirische unter der berechneten. Mit andern Worten: die kürzeren Blätter sind im Mittel zu breit, die längeren zu schmal.

In der gleichen Figur ist (punktierte Linien) die Änderung der Breite mit wachsender Länge noch in anderer Weise dargestellt, nämlich als Kurve der Grösse $10 L : MB$, wobei MB die mittlere Breite der Blätter jeder Länge bedeutet. Wäre die Korrelation eine vollständige, so müssten wir eine der Abscissenaxe parallellaufende Gerade erhalten auf dem für $10 y$ gefundenen Mittelwert von 19,24. Diese Linie ist (zart punktiert) ebenfalls eingezeichnet. Ein Blick zeigt, wie vorher, auch hier die zu grosse Breite der kurzen und das umgekehrte Verhalten der langen Blätter.

Es ist ferner von Interesse, die Frage auch umgekehrt zu stellen, wie mit steigender Breite sich die mittlere Länge ändere, da dieses Verhältnis unter Umständen sehr von dem bereits besprochenen abweichen kann. In ganz gleicher Weise wurde also zu jedem B die mittlere Länge berechnet und der Verlauf der Kurve (stark ausgezogen) in Fig. 5 dargestellt, und zum Vergleich auch hier wieder die bei vollständiger Korrelation und einem mittleren $10 y$ von 19,24 sich ergebende Gerade (zarte Linie) eingezeichnet. Die gefundenen Zahlen sind folgende:

B:	6	7	8	9	10	11	12	13
ML:	14,8	16,5	16,0	16,8	17,3	19,9	22,2	24,7
	14	15	16	17	18	19	20	21
	26,2	28,6	31,4	31,9	35,1	37,6	39,1	41,4
		23	24	25	26	27		
		45,0	46,9	47,0	45,8	49,5		

Sehen wir ab von den schmälisten und breitesten Blättern, bei denen die Mittelzahlen wegen der geringen Frequenz sowieso keinen grossen Wert haben, so ergibt sich als Resultat eine viel bessere Übereinstimmung der empirischen Kurve mit der berechneten, als bei der Variation der mittleren Breite. Wichtig, weil von vornherein nicht erwartet, ist aber besonders die Tatsache, dass nicht etwa die schmalen Blätter verhältnismässig zu lang sind, sondern umgekehrt: die schmalen Blätter sind etwas zu kurz, die breiten etwas zu lang.

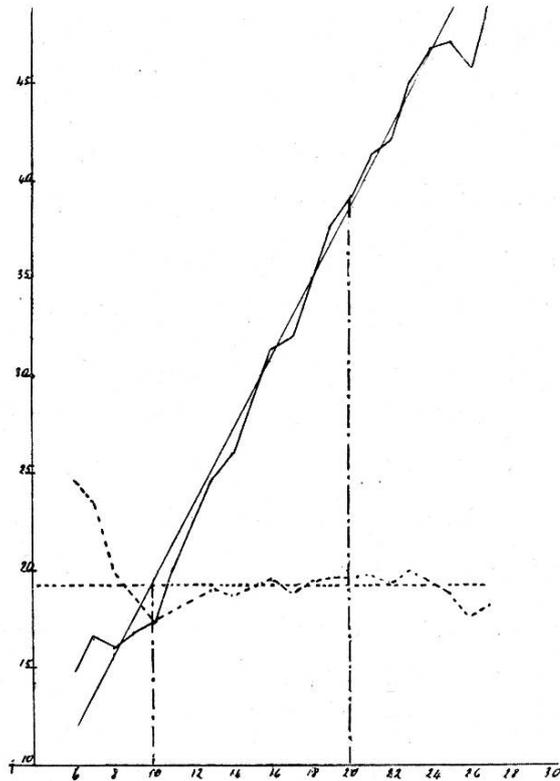


Fig. 5.

Variation der Länge mit zunehmender Breite bei den Blättern von *Vinca*.

Die punktierte Kurve in der gleichen Figur stellt die Variation von $10 ML:B$ dar, verglichen mit der Geraden für konstantes $10 y = 19,24$. Sie zeigt in gleicher Weise eine bessere Übereinstimmung zwischen berechneter und empirischer Kurve als die Fig. 4; und ebenso, dass die schmalen Blätter eher zu kurz, die breiteren zu lang sind (wenn die beiden Extreme nicht berücksichtigt werden).

b) Die Variation der Fläche.

Die Form der Vincablätter entspricht nahezu einer Ellipse, so dass also aus Länge und Breite der Flächeninhalt annähernd genau berechnet werden kann nach der Formel $F = \frac{\pi}{4}(LB)$.

Da nun $\frac{\pi}{4}$ eine Konstante ist, genügt es, wie in der Einleitung ausgeführt, die Variation der Grösse $L \times B$ zu untersuchen. Dieser Wert schwankt für die untersuchten 2500 Blätter zwischen 66 und 1377. Wollte man den mm^2 als Einheit nehmen, so würden also 2500 Messungen zur Aufstellung einer Variationskurve niemals genügen. Dazu kommen noch die andern in der Einleitung auseinandergesetzten Gründe, welche uns zwingen, für die Konstruktion der Kurve eine andere, grössere Einheit zu nehmen.

Wie gross soll diese sein? Es ist klar, dass für die niedrigeren Werte eine kleinere Einheit angenommen werden darf als für die grösseren, da die Sprünge weniger gross sind; doch geben zwei verschiedene Einheiten eine unklare Kurve. Nehmen wir die Einheit zu klein, so riskieren wir, eine nicht geschlossene Kurve zu erhalten, im umgekehrten Fall fliessen leicht die Gipfel zusammen. Da es sich aber in keinem Fall um eine absolut scharfe Kurve handeln kann, sondern diese uns nur Anhaltspunkte für die Bestimmung des x geben soll, so fand ich es richtiger, die Einheit etwas klein zu wählen, nämlich 10, darüber dann aber noch eine zweite Kurve mit der Einheit 20 zu konstruieren. Das Resultat war so, dass sich ein recht klares Bild der Variation von $L \times B$ ergab.

Ich verzichte auf die Anführung der langen Zahlenreihen, die sich jeder aus der Korrelationstabelle berechnen kann. Die Kurve Fig. 6 spricht für sich. Sie braucht nur noch ein paar Erläuterungen betreffend die Konstruktion.

Die Zahlen an der Abscissenaxe: 6, 7, 8, 9, ... 80, 81 usw. bedeuten die Werte von $L \times B$ dividiert durch 10. Die Frequenzzahlen der unteren (einfachen) Kurve wurden so festgestellt, dass die Werte $L \times B$ in Zehnergruppen eingeteilt

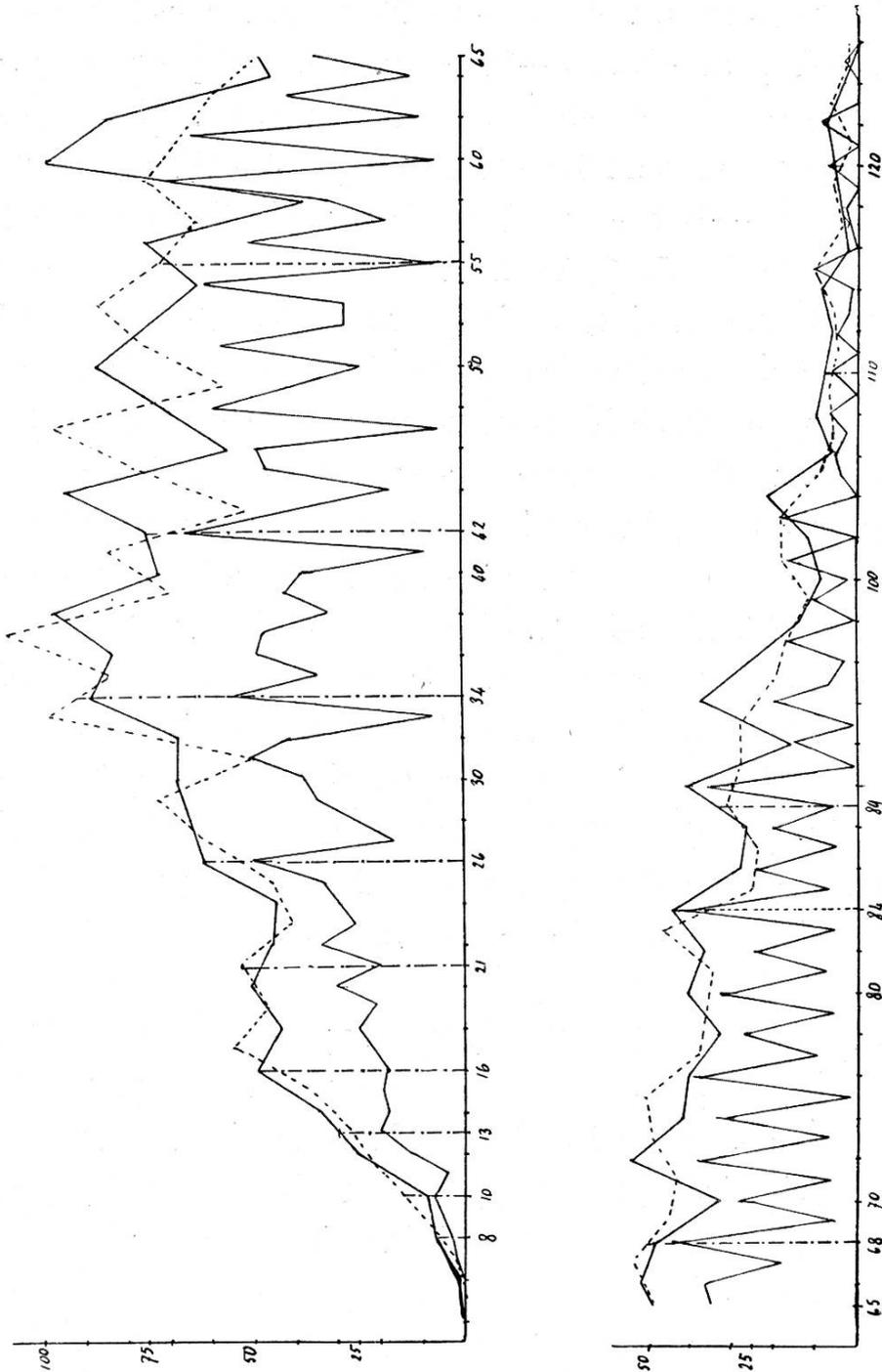


Fig. 6. Variation des Wertes $L \times B$ bei den Blättern von *Vinca*.

wurden, 66—75 wurde sodann mit 7, 76—85 mit 8, 86—95 mit 9 usw. bezeichnet.

Die obere (doppelte) Kurve ist konstruiert mit der Einheit 20 und zwar in doppelter Weise. Die ausgezogene Kurve

gibt die Frequenzen, welche man erhält, wenn man zusammenzieht 51—70, 71—90, 91—110 usw. Die Eckpunkte dieser Kurve müssen die geraden Zahlen 6, 8, 10 usw. sein. In der punktierten Kurve sind zusammengezogen die Werte 61—80, 81—100, 101—120 usw.; ihre Eckpunkte liegen auf den ungeraden Zahlen 7, 9, 11 usw.

Die erhaltenen Kurven sind, wie zu erwarten, sehr vielzackig. Bei näherem Zusehen lässt sich aber doch leicht einiges herauslesen, namentlich wenn wir zunächst nur die linke Hälfte, die nach der ganzen Konstruktionsweise viel zuverlässiger sein muss, berücksichtigen. Da fallen sogleich schon bei der Zehnerkurve einige Gipfel auf, nämlich die auf den Zahlen 10, 13, 26, 34, 42. Diese Gipfel können nicht nur Zufall sein, sie entsprechen zu gut der Fibonaccireihe. Sie veranlassten mich, die Kurve weiterhin auf das Auftreten von Gipfeln auf Fibonacci-Haupt- und -Nebenzahlen zu kontrollieren. Das Ergebnis war recht ermutigend:

- 8, scharfe Knickung der Zwanzigerkurve;
- 10, Gipfel in der Zehnerkurve;
- 13, " " " " " "
- 16, " " " Zwanzigerkurve;
- 21, " " " " " ; die Depression in der Zehnerkurve ist ohne Bedeutung, da sie von zwei Gipfeln begleitet ist;
- 26, weit vorragender Gipfel der Zehnerkurve;
- 34, " " " " " "
- 42, " " " " " "
- 55, Depression in allen Kurven;
- 68, vorragender Gipfel der Zehnerkurve;
- 84 (2×42), vorragender Gipfel in beiden Kurven;
- 89, Gipfel in der Zwanzigerkurve; für die Zehnerkurve sehr hoher Gipfel auf der Nachbarzahl 90.

Es entsprechen also, ausser der Zahl 55, allen Haupt- und ersten Nebenzahlen der Fibonaccireihe Gipfel einer oder beider Kurven. Dazu kommen nun freilich noch eine ziemliche Anzahl von Gipfeln, die sich nicht in dieser Reihe unterbringen lassen. Wenn also auch durch die Variationskurve für $L \times B$ einigermaßen wahrscheinlich gemacht wird, dass die Vergrößerung der Fläche in dem in der Einleitung auseinandergesetzten Sinn dem Anlagenvermehrungsgesetze nach Fibonacci folgt, so ist damit doch der strikte Beweis dafür noch nicht geführt.

Dieser Beweis kann erst dann als geführt betrachtet werden, wenn für die genau gemessenen, also zuverlässigeren linearen Dimensionen sich eine Entwicklung der Kurven nach dem Ludwig'schen Gipfelgesetz ergibt, d. h. wenn jene Gipfel sich verhalten wie die Quadratwurzeln der Fibonaccizahlen. Nachdem uns nun aber die Kurve für $L \times B$ so deutliche Anhaltspunkte gegeben hat, dass wir unser wahrscheinliches x sofort daraus ablesen können, ist die Kontrolle unseres Resultates an den Variationskurven für L und B sehr einfach.

c) Die Variation der Länge und Breite und ihr Verhältnis zum Ludwig'schen Gipfelgesetz.

Nach den Ausführungen der Einleitung dürfen wir zur Kontrolle, ob die Gipfelzahlen der Kurven von L und B den Quadratwurzeln der Fibonaccizahlen entsprechen, nicht sämtliche Messungen berücksichtigen, sondern nur die Blätter mit gleichem $L : B$. Absolut ist aber diese Einschränkung nicht zu nehmen; es genügt, wenn wir die Extreme ausser acht lassen und die Blätter mit nahezu gleichem $L : B$ herbeiziehen, damit wir doch ziemlich grosse Frequenzzahlen erhalten.

Die Kurve von $L : B$ besitzt den Hauptgipfel auf 18. Ich konstruiere mir nur die Variationskurven von L und B für

diejenigen Blätter, deren L:B 17—19 (untere Kurve) und 16—20 (obere Kurve) beträgt, so dass also in beiden Fällen, da der berücksichtigte Teil der L:B-Kurve fast genau symmetrisch ist, der Mittelwert von L:B, also unser 10 y, 18 beträgt.

Damit können wir unsere theoretischen Gipfelzahlen berechnen und vergleichen mit den empirischen:

$x = 10$, ergibt sich aus der Kurve von $L \times B$.

$y = 1,8$. $\alpha = \sqrt{18} = 4,25$. $\beta = \sqrt{\frac{10}{1,8}} = 2,36$.

Somit erhalten wir folgende Zahlen für L- und B-Gipfel:

Fibonaccizahl:	$\sqrt{\text{Fib.}}$:	$\alpha\sqrt{\text{Fib.}}$:	Empirische Gipfel für L:	$\beta\sqrt{\text{Fib.}}$:
8	2,83	12,0	—	6,4
10	3,16	13,4	—	7,5
13	3,61	15,3	15	8,5
16	4	17,0	17	9,4
21	4,58	19,6	20	10,7
26	5,10	21,7	22	12,0
34	5,83	24,8	25	13,8
42	6,48	27,5	28	14,9
55	7,42	31,5	32	17,5
68	8,25	35,1	35	19,5
89	9,43	40,1	40	22,3
110	10,49	44,6	45	24,8

Vergleichen wir nun die Lage der empirischen Gipfel der L-Kurve mit diesen berechneten Zahlen in Fig. 7, so sehen wir eine gute Übereinstimmung. Die eingezeichneten Ordinaten entsprechen den theoretischen Gipfeln, sie fallen fast genau mit den Gipfeln der Kurve zusammen. Da die Messungen nur auf den mm genau gemacht wurden, kann eine bessere Übereinstimmung überhaupt nicht erwartet werden; die Ab-

weichung beträgt nirgends mehr als $\frac{1}{2}$ mm. Einzig der stark hervortretende Gipfel auf 30 passt nicht ins Schema. Doch kann dieser seine Ursache z. T. wenigstens in einer ganz unbewussten Bevorzugung der „runden“ Zahl 30 beim Auf- und Abrunden der Messungen haben (die starken Depressionen auf 29 und 31 sprechen dafür). Sei dem aber, wie ihm wolle,

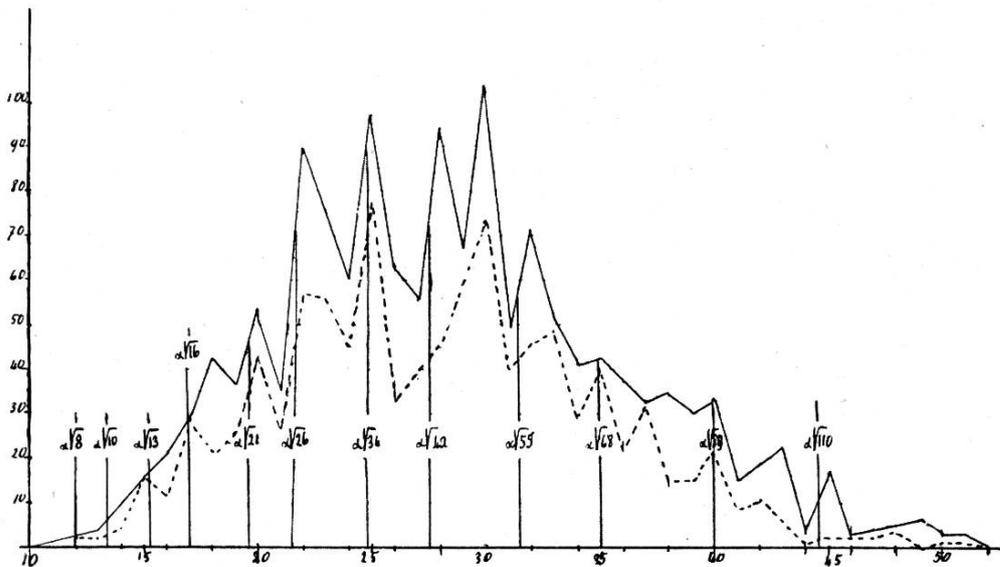


Fig. 7. Variation der Länge der Blätter von *Vinca* mit dem L:B-Index von 17—19 (punktirt) und dem von 16—20 (ausgezogen).

die übrige Kurve stimmt so gut mit dem, was unsere theoretische Annahme verlangt, dass diese eine vorläufig nicht genügend erklärte Abweichung das Resultat nicht umzustossen vermag.

Von der B-Kurve können wir nicht viel erwarten. Die Werte von $\beta\sqrt{Fi}$ sind so nahe beieinander, dass fast jede Zahl als Gipfelzahl auftreten müsste, die tatsächlichen Gipfel also einfach Zufallsgipfel sind. Ich verzichte also auf die Reproduktion der Kurve, die im wesentlichen übereinstimmt mit der aus der Korrelationstabelle zu konstruierenden Gesamtkurve. Widersprüche zu den Schlüssen aus der L-Kurve ergeben sich aus ihr nicht.

Damit dürfte der Nachweis geführt sein, dass der aus der Kurve für $L \times B$ gezogene Schluss auf die Entwicklung der Blattflächenkurve für *Vinca minor* nach dem Ludwig'schen Gipfelgesetz berechtigt war, und somit unsere Annahme, dass einer bestimmten Flächeneinheit eine Anlage entspreche und diese Anlagen sich nach dem Gesetz des Fibonacci vermehren, wenigstens für diesen Fall sich als zulässig erwiesen haben.

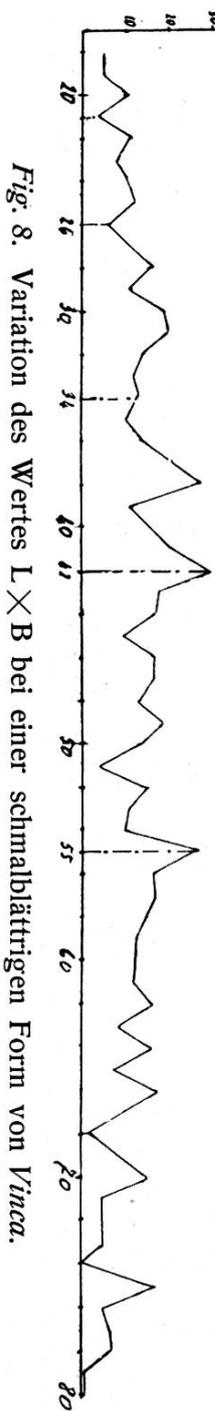
Nachtrag.

Die vorstehende Arbeit war so gut als abgeschlossen, als ich bei Anlass eines Ferienaufenthaltes in einem Garten in Thalwil eine auffällig schmalblättrige Form von *Vinca minor* beobachtete, die ich ebenso in Rüschlikon und Zofingen wieder fand. Ich benützte die Gelegenheit, auch davon eine möglichst grosse Zahl auszumessen, um das Resultat mit meinen St. Gallerzahlen zu vergleichen. Leider brachte ich es nur auf 820 Messungen, die zu einem vollwertigen Schluss für sich allein nicht ausreichen können, wohl aber, wenn die Zahlen gleichsinnig liegen, eine Stütze der früheren Resultate bilden.

Ich begnüge mich mit den Aufführungen der wichtigsten Ergebnisse dieser nachträglichen Messungen. In der Tabelle (S. 29) sind in gleicher Weise wie oben die gefundenen Zahlen zusammengestellt.

Man sieht, die Variation der Länge ist nahezu gleich gross, doch ist die Hauptmenge der Blätter länger als bei der normalen Form. Die Variation der Breite ist dagegen bedeutend geringer; sie geht nur von 5—19, gegenüber 6—29. Der total andere Charakter der Blätter drückt sich aber vor allem in

dem Faktor 10 L : B aus. Während bei den normalen Blättern der Hauptgipfel dieser Kurve bei 18 liegt, fällt der Schwerpunkt dieser Kurve bei der schmalblättrigen Form auf 33, wie aus folgenden Zahlen hervorgeht:



hervorgeht:

10 L : B:	19	20	21	22	23	24	25
Frequenz:	2	1	2	2	4	8	19
	26	27	28	29	30	31	32
	14	28	40	46	49	68	60
	35	36	37	38	39	40	41
	70	52	37	58	42	21	17
		44	45	46	47	48	49
		5	5	3	7	6	—
							4

Von ganz besonderem Interesse ist aber auch hier die Frage nach der Entwicklung der Kurve für $L \times B$ und ihren Beziehungen zum Ludwig'schen Gipfelgesetz. Trotz der verhältnismässig sehr kleinen Anzahl der Messungen ergab sich auch hier ein ziemlich eindeutiges Resultat. Die $L \times B$ -Kurve hat ihre beiden Hauptgipfel auf dem zehnfachen von 42 und 55. Und auch in der Gegend von 34 liegt ein Schwerpunkt. Ich begnüge mich mit der Reproduktion des mittleren Teils dieser Kurve in Fig. 8.

Führen wir auch hier unsere Rechnung durch und vergleichen die berechneten Gipfel der L-Kurve mit den empirischen, indem wir auch hier nur die dem Mittelwert 33 (von 10 L : B) nächstliegenden Blätter be-

rücksichtigen (31—35). Die Zahlen sind: $x = 10$, $y = 3,3$, $\alpha = \sqrt{33} = 5,74$.

Also Fibonaccizahl:	$\sqrt{\text{Fib.}}$:	$\alpha\sqrt{\text{Fib.}}$:	empir. Gipfel:
26	5,10	29,3	31
34	5,83	33,3	34
42	6,48	37,2	38
55	7,42	42,6	42
68	8,25	47,4	47
89	9,43	54,1	55

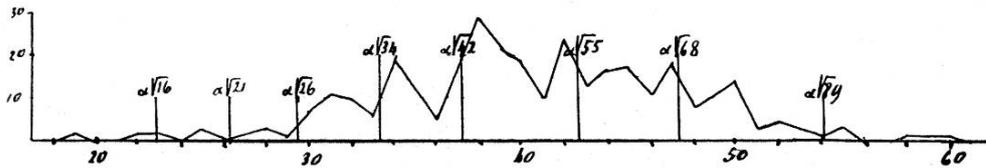


Fig. 9. Variation der Blattlänge bei einer schmalblättrigen Form von *Vinca*.

In Fig. 9 ist die Kurve mit Eintragung dieser Ordinaten ausgeführt. Man sieht, dass, wenn auch die Gipfel nicht so genau auf die theoretischen Punkte fallen, die Annäherung doch, in Anbetracht der geringen Zahl der Messungen, recht gut ist. Damit dürfte auch für diese schmalblättrige Form die Gültigkeit des Ludwig'schen Gipfelgesetzes wahrscheinlich gemacht sein und das Resultat der Hauptarbeit eine wertvolle Stütze erhalten haben.

St. Gallen, im Juni 1908.