Zur Praxis der Volksschule.

Beilage zu Nr. 20 der „Schweizerischen Lehrerzeitung". VI.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

(Methodische Skizze.)

Jeder Lehrer macht die Beobachtung, dass das Rechnen mit Brüchen den Schülern Schwierigkeiten bereitet, und dass es ihnen nicht leicht fällt, das Wesen des Bruches zu begreifen, also den *Bruchbegriff* zu erwerben. Selbst wenn die ersten Schwierigkeiten überwunden sind, und man daran geht, die erworbenen Kenntnisse zu verwerten, die Brüche miteinander in Beziehung zu bringen, d. h. mit den Brüchen zu rechnen, so erkennt man von neuem, dass die Kinder das Bruchrechnen nur schwer bewältigen, und dass nur ein planmässiges Fortschreiten, fleissiges Üben und stetes Wiederholen einigermassen befriedigende Resultate erzielen lassen. Wenn wohl jeder Lehrer sich für diese Übungen seinen eigenen Weg zurecht gelegt hat und der eine auf diese, der andere auf eine andere Weise am sichersten zum Ziele zu gelangen hofft, so dürfte es doch nichts schaden, in der S. L. Z. einen Gang zu skizziren, der eingeschlagen werden kann. Die folgende Arbeit will keine Präparationen für eine einzelne Lektion bieten, sondern eine übersichtliche Darstellung geben über die Entwicklung des Bruchbegriffes und die Einführung in die verschiedenen Rechnungsoperationen.

I. Entwicklung des Bruchbegriffes.

Die gebrochene Zahl entsteht durch Teilen einer Einheit in zwei oder mehrere Teile. Da die Schüler schon in den frühern Schuljahren in das Teilen der Zahlen eingeführt worden sind und im täglichen Leben vom Verteilen reden hören und selber Teilungen vornehmen oder vornehmen sehen, wie Teilen eines Kuchens, einer Anzahl Äpfel oder Nüsse, so wird man zweckmässig an diese Vorstellungen anknüpfen, um die zu vermittelnden Kenntnisse durch diese alten Vorstellungen auffassen zu lassen.

1. Die Halben. Der Lehrer stelle etwa folgende Aufgaben: Zwei Kinder haben 3, 5, 7, 9 etc. Franken unter sich gleich zu verteilen; wie viel erhält jedes Kind? Die Schüler werden antworten: Fr. 1. 50 Rp.; Fr. 2. 50 Rp. u. s. w. Der Lehrer macht darauf aufmerksam, dass man im gewöhnlichen Leben sich auch noch anders ausdrückt, indem man sagt: ein und einen halben Franken, zwei und einen halben Franken u. s. w. Wenn man also einen ganzen Franken in zwei gleiche Teile zerlegt, oder gegen zwei einander gleiche Geldstücke auswechseln lässt, so erhält man zwei Halbfrankenstücke oder zwei halbe Franken; macht man dasselbe mit einem Batzen (10 Rappenstück), so erhält man 2 halbe Batzen; zerschneidet man einen Apfel, eine Birne u. s. w. in 2 gleiche Teile, so erhält man 2 halbe Äpfel, 2 halbe Birnen u. s. w., verteilt man einen Liter Milch gleichmässig unter 2 Kinder, so erhält jedes einen halben Liter; wird ein 1 m langes Band unter 2 Mädchen gleich verteilt, so erhält jedes 1 Stück von einem halben Meter Länge. Auf diese Weise erhält man folgende Übersicht, die man an die Wandtafel schreibt:

1	ganzer	Fr.	= 2	halbe	Fr.
1	„	Batzen	= 2	„	B.
1	„	Apfel	= 2	„	Ä.
1	„	m	= 2	„	m.
1	„	l	= 2	„	l. u. s. w.

Nun zeichne man eine Strecke von 1 m Länge, eventuell auch eine kürzere an die Wandtafel, ebenso stelle man einen Kuchen durch einen Kreis dar und halbire beides. Aus den genannten Übungen und dieser Darstellung erkennen die Schüler leicht, dass ein Ganzes irgend welcher Art immer in zwei unter sich gleich grosse oder gleichwertige Stücke zerlegt werden kann, woraus sich durch Abstraktion die Einsicht bildet: *1 Ganzes = 2 Halbe.*

Dann lasse man mehrere der genannten Grössen halbiren, z. B. 2 ganze Fr. = 4 halbe Fr., 3 ganze Äpfel = 6 halbe Äpfel u. s. w., woraus abstrahirt wird: 2 Ganze = 4 Halbe, 3 Ganze = 6 Halbe u. s. w. Aber auch umgekehrt werden die Halben wieder zu Ganzen zusammengesetzt: 2 Halbe = 1 Ganzes, 4 Halbe = 2 Ganze, 7 Halbe = 3 Ganze und 1 Halbes u. s. w. Man lasse aber auch Halbe zusammenzählen, von einander abzählen, vervielfachen, teilen und messen, selbstverständlich als Kopfrechnen; dabei ist jeweilen die betreffende Anzahl der Halben als benannte Zahl zu behandeln. Man kann auch folgende Aufgaben stellen: 12 halbe Batzen sind unter 4 Kinder gleich zu verteilen, oder 15 halbe Fr. unter 3 Personen u. s. w., und dann daran die Fragen anschliessen: wie viel ist der vierte Teil von 12 Halben, der dritte Teil von 15 Halben u. s. w.

Um dem Schüler die Zweckmässigkeit oder Notwendigkeit der üblichen Darstellungsweise von Halben darzutun, lässt man eine der letztern Aufgaben schriftlich lösen; man wird also schreiben: 15 halbe Fr. : 3 = 5 halbe Fr. Jetzt weist man darauf hin, dass diese Schreibweise unzweckmässig ist und man dafür gewöhnlich eine andere anwendet: Man zieht einen wagrechten oder schiefen Strich, schreibt darunter die Ziffer 2, die Zweitel oder Halbe bedeutet, und über dem Strich die Anzahl der halben Fr., so erhält man:

$$\frac{15}{2} \text{ Fr.} : 3 = \frac{5}{2} \text{ Fr.} \quad \text{oder} \quad \frac{15}{2} : 3 = \frac{5}{2}$$

Es wird zweckmässig sein, dem Schüler jetzt den Namen *„Bruch"* zu vermitteln. Der Lehrer verschaffe sich eine Anzahl Haselrütchen von 1 m Länge, davon nehme er eines, lasse von einem Schüler durch Abmessen mit dem Meterstab die Mitte suchen, zerbreche es an der bezeichneten Stelle und lege die beiden Teile aufeinander, damit die Schüler sich von der Gleichheit derselben überzeugen können. Man bemerkt, dass jedes Stück, weil es durch *Brechen* entstanden ist, einen Bruchteil des ganzen Stäbchens darstellt; ebenso könne der halbe Fr. als ein Bruchteil des ganzen, der halbe Kuchen als ein Bruchteil des ganzen Kuchens, der halbe Apfel als ein Bruchteil des ganzen Apfels aufgefasst werden. So können wir dem Halben in allen Fällen Bruchteil oder kurzweg Bruch sagen; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, u. w. s. sind also Brüche. Die Schüler werden darauf aufmerksam gemacht, dass zum Schreiben eines Bruches ein wagrechter oder schiefer Strich, genannt Bruchstrich, und zwei Zahlen notwendig sind; die Zahl unter dem Strich gibt an, dass man das ganze Stück in 2 gleiche Teile geteilt, und die Zahl über dem Bruchstrich sagt, wie viele solcher Teile man genommen hat, so wird man leicht die Bezeichnungen Nenner und Zähler klar machen können.

Man könnte auch die Ableitung des Namens Bruch, sowie die Darstellung des Bruches durch Bruchstrich, Zähler und Nenner erst dann vornehmen, wenn noch andere Brüche zur Behandlung gekommen wären, und es liesse sich diese Verschiebung mit der Forderung rechtfertigen, dass das Begriffliche, hier der Name Bruch und die Darstellungsart des Bruches aus einer möglichst grossen Zahl von Beispielen abgeleitet werden soll, also nicht nur aus der Zerlegung des Ganzen in 2, sondern auch in 3, 4, 5 u. s. w. gleiche Teile. Doch wird man anderseits auch gerne den Namen Bruch bald gebrauchen wollen und ebenso die Bruchform, um etwa in Simultanschulen auch schriftliche Aufgaben stellen zu können; diese sind natürlich nicht als eigentliches Bruchrechnen zu betrachten, sondern sollen nur dazu dienen, den Begriff Halbe zu befestigen.

2. Die Viertel. Man stelle den Schülern Aufgaben, die das Teilen von irgend einer Anzahl Einheiten in 4 gleiche Teile verlangen, z. B. 12 Fr., 16 m Stoff, 24 l Milch, 20 kg Mehl. Dann gebe man die Aufgabe, einen Apfel, eine Birne, einen Kuchen, einen Fr., einen m, einen l, ein kg irgend einer Ware in 4 gleiche Teile zu teilen; so kommt man zum Ausdruck vierte Teile oder Viertel und erhält:

1	ganzer	Fr.	= 4	Viertel	Fr.
1	„	Apfel	= 4	„	Äpfel
1	„	m	= 4	„	m
1	ganzer	Kuchen	= 4	Viertel	Kuchen, u. s. w.

Nun zeichne man unter der ersten Strecke eine zweite von derselben Länge und neben den ersten Kreis einen zweiten von derselben Grösse und teile Strecke und Kreis in 4 gleiche Teile;

aus diesen Übungen und Zeichnungen wird dann wie vorhin abstrahirt: *1 Ganzes = 4 Viertel.* Ferner erkennen die Schüler leicht, dass 2 Ganze = 8 Viertel, 3 Ganze = 12 Viertel u. s. w. sind. Umgekehrt werden darauf die Viertel wieder zu Ganzen zusammengesetzt: 4 Viertel = 1 Ganzes, 8 Viertel = 2 Ganze u. s. w., 5 Viertel = 1 Ganzes und 1 Viertel, 11 Viertel = 2 Ganze und 3 Viertel u. s. w.

Um den Viertel wieder als Bruchteil des Ganzen oder als Bruch auffassen zu lassen, nimmt man ein zweites Stäbchen von 1 m Länge, lässt es durch einen Schüler in 4 gleiche Teile teilen, zerbricht es an den bezeichneten Stellen und legt die 4 Bruchstücke zur Vergleichung aufeinander. Ebenso wird man, wie bei den Halben, die Bruchformen $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, u. s. w. einführen und mit dem Bruch Viertel zweckmässige Rechenoperationen zur Befestigung des Bruchbegriffes vornehmen.

Alsdann *vergleiche* man die Viertel mit den Halben und zwar am Kreis und an der Strecke; da werden die Schüler ohne Weiteres erkennen, dass ein halber Kreis = 2 Viertelkreise, ein halber m = 2 Viertel m ist u. s. w., gerade so wie ein halber Kuchen 2 Viertelkuchen, ein halber Apfel = 2 Viertel Äpfel, ein halbes Pfund = 2 Viertel Pfund gibt; man erhält also allgemein: 1 Halbes = 2 Viertel oder umgekehrt 2 Viertel = 1 Halbes; ferner $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$; $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ u. s. w.; umgekehrt: $\frac{4}{4} = \frac{2}{2}$, $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ u. s. w. 5 Viertel = 2 Halbe und 1 Viertel oder $\frac{2}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{7}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$ u. s. w.

3. *Die Achtel.* Auch hier stellt der Lehrer wieder Aufgaben, wobei irgend eine Anzahl von Ganzen in 8 gleiche Teile geteilt werden soll. Dann wird ein Apfel, ein Kuchen, ein g, 1 kg, 1 m irgend einer Ware u. s. w. in 8 gleiche Teile geteilt, wobei der Ausdruck der achte Teil oder Achtel abgeleitet wird; man erhält:

1	ganzer Apfel	= 8	Achtel	Äpfel.
1	„ Kuchen	= 8	„	Kuchen.
1	„ g	= 8	„	g.
1	„ m	= 8	„	m u. s. w.

Unter die zwei ersten Strecken, welche die Halben und Viertel veranschaulichen, wird eine dritte gleich lange Strecke gezeichnet, ebenso neben die zwei andern Kreise ein dritter von gleicher Grösse; Strecke und Kreis werden in 8 gleiche Teile geteilt und dann wird abstrahirt: *1 Ganzes = 8 Achtel.* Daran schliessen sich Übungen wie: 2 Ganze = 16 Achtel, 5 Ganze = 40 Achtel u. s. w., umgekehrt: 8 Achtel = 1 Ganzes, 16 Achtel = 2 Ganze u. s. w. Man kann hier nochmals ein 1 m langes Stäbchen durch einen Schüler in 8 gleiche Teile teilen lassen und dasselbe in 8 gleiche Stücke zerbrechen, um die Schüler daran zu erinnern, dass der Ausdruck *Bruch* von *brechen* kommt. Ebenso wird man jetzt die Bruchformen $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ u. s. w. zur Darstellung der neuen Zahlen einführen und wiederum, vorzugsweise mündlich, verschiedene zweckmässige Rechnungen mit Achteln ausführen lassen.

Hierauf *vergleiche* man die Achtel zunächst mit den Vierteln, wobei man die gezeichneten Strecken oder Kreise zu Hülfe nimmt. Die Schüler werden leicht erkennen, dass 1 Viertel = 2 Achtel, $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ umgekehrt, dass 2 Achtel = 1 Viertel, $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$, $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, 3 Achtel = 1 Viertel und 1 Achtel oder $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $\frac{5}{8} = \frac{2}{4} + \frac{1}{8}$, $\frac{9}{8} = \frac{4}{4} + \frac{1}{8}$ u. s. w.

Darauf folgt die Vergleichung der Achtel mit den Halben und zwar wiederum an Strecke und Kreis: 1 Halbes = 4 Achtel oder $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$, $\frac{6}{2} = \frac{24}{8}$; umgekehrt: 4 Achtel = 1 Halbes, $\frac{8}{8} = \frac{2}{2}$, $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, 5 Achtel = 1 Halbes und 1 Achtel oder $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, $\frac{6}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{8}$, $\frac{11}{8} = \frac{2}{2} + \frac{3}{8}$, $\frac{15}{8} = \frac{3}{2} + \frac{3}{8}$. Schliesslich lasse man auch noch Achtel durch Viertel und Halbe ausdrücken und zwar stets unter Benützung der Veranschaulichungsmittel; also z. B. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{18}{8} = \frac{9}{4} = \frac{4}{2} + \frac{1}{4}$ u. s. w.

Die Schüler werden jetzt schon erkannt haben, dass man durch das Halbiren der Halben Viertel, durch das Halbiren der Viertel Achtel erhält; sie werden daher leicht begreifen, und zwar ohne dass weitere Veranschaulichung nötig sein wird, dass durch Halbiren von Achteln Sechszehntel entstehen. Man weise an dieser Stelle bloss auf diese Brüche hin, ohne jedoch auf eine Behandlung derselben einzutreten; dagegen kehre man jetzt zu Teilungen von Ganzen in eine kleinere Anzahl von Teilen zurück.

4. *Die Drittel.* Der Lehrer stellt wieder einige Rechnungsaufgaben, welche Dreiteilung irgend welcher Grössen verlangen; dann wird wie früher darauf hingewiesen, dass ein einzelnes Stück, ein Apfel, ein Kuchen ein m, ein l u. s. w. in drei gleiche Teile geteilt werden kann, und dass jedes dabei erhaltene Stück *Drittel* genannt wird; also

1	ganzer Apfel	= 3	Drittel	Äpfel.
1	„ m	= 3	„	m.
1	„ g	= 3	„	g.
1	„ Kuchen	= 3	„	Kuchen u. s. w.

An einer neuen, gleich langen Strecke und einem weitern Kreis (s. o.) wird die Dreiteilung von Strecke und Kreis vorgenommen; es kann auch nochmals ein 1 m langes Stäbchen in B gleiche Teile zerbrochen werden; daraus wird abstrahirt: *Ein Ganzes = 3 Drittel,* in Bruchform geschrieben $1 = \frac{3}{3}$; ebenso $2 = \frac{6}{3}$, $3 = \frac{9}{3}$; umgekehrt $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ u. s. w. Zur weitern Einprägung des Begriffes Drittel wird man zweckmässige Rechenoperationen vornehmen lassen. Mit Hülfe der geteilten Strecke und des Kreises vergleiche man den Drittel mit dem Halben und dem Viertel und zwar sollen die Schüler nur angeben, dass $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ist; diese Ungleichheiten sollen sie aus der Anschauung ableiten. Aus der Vergleichung von Halben, Dritteln und Vierteln wird der Schüler erkennen, dass der Bruch um so kleiner wird, je grösser sein Nenner ist, natürlich nur in Bezug auf einen Bruchteil. Er wird auch den Grund dafür angeben, nämlich: Je grösser der Nenner, um so grösser ist die Anzahl der Teile, in welche das Ganze geteilt wird, um so kleiner werden daher die einzelnen Teile. An die Drittel schliessen sich an:

5. *Die Sechstel.* Auf ähnliche Weise wie bei den bereits besprochenen Brüchen leitet man ab: 1 Ganzes = 6 Sechstel oder $1 = \frac{6}{6}$, dann lasse man eine beliebige Anzahl von Ganzen in Sechstel zerlegen, ebenso wieder eine beliebige Anzahl von Sechsteln zu Ganzen vereinigen. Man veranschauliche wieder die Sechstel durch entsprechende Teilung einer Strecke und eines Kreises und nehme zur Befestigung des Begriffs Sechstel zweckmässige Rechenoperationen vor. Nun *vergleiche* man

a) *Die Sechstel mit den Dritteln* und zwar immer mit Hülfe der gezeichneten Veranschaulichungsmittel: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$; umgekehrt $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ u. s. w.

b. *Den Sechstel mit dem Viertel und dem Achtel.* Die Schüler sollen an den Zeichnungen ablesen: $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$; weitere Vergleichungen sind nicht nötig. Der Schüler wird leicht verstehen, dass der Bruchteil, bezw. der Bruch um so kleiner ausfällt, je grösser sein Nenner ist. Aus der angestellten Betrachtung können die Schüler auch erkennen, dass der Sechstel durch

Halbiren des Drittels entsteht; sie werden daher leicht den Schluss ziehen, dass das Halbiren der Sechstel Zwölftel gibt; eine eingehende Behandlung derselben halte ich aber nicht für nötig. Dagegen wird man noch die *Neuntel* entwickeln und dieselben entweder in der bisherigen Weise aus der Neunteilung eines Ganzen oder aus der Dreiteilung eines Drittels ableiten; auch mit den Neunteln werden ähnliche Übungen vorgenommen, wie mit den bisher betrachteten Brüchen.

6. *Die Fünftel.* Man beginne mit Aufgaben, deren Lösung eine Fünfteilung irgend welcher Grössen, bezw. Zahlen verlangt; dann zeigt man, wie auch verschiedene Einheiten in fünf Teile geteilt werden können; z. B. ein Kuchen, ein Apfel, 1 Fr., 1 m, 1 l u. s. w. Die Schüler können sofort angeben, dass der fünfte Teil eines m ein Fünftel = m, eines Fr. = 1 Fünftel = Fr. u. s. w. ist. Sie sollen dann aber diese Brüche auch durch andere Werte ausdrücken, nämlich: 1 Fünftel Fr. = 2 Batzen, 1 Fünftel m = 2 dm u. s. w. Auch die Fünfteilung veranschauliche man an Strecke und Kreis und lasse so abstrahiren: *1 Ganzes = 5 Fünftel,* $1 = \frac{5}{5}$. Mehrere Ganze werden in Fünftel zerlegt, und Fünftel werden wieder zu Ganzen zusammengesetzt; zur Befestigung des Begriffes Fünftel werden einige Rechenoperationen mit Fünfteln vorgenommen.

Nun vergleiche man noch den Fünftel mit dem Viertel und dem Sechstel; an den Veranschaulichungszeichnungen werden die Schüler ablesen: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ u. s. w. und daraus von neuem die Wahrheit erkennen: Jeder einzelne Bruchteil ist um so kleiner, je grösser sein Nenner ist.

7. *Die Zehntel.* Man leite sie in analoger Weise wie die bisher behandelten Brüche aus der Zehnteilung der Einheit ab, oder man lasse sie durch Halbiren der Fünftel entstehen; man kann auch beides machen. Die Schüler erkennen wieder: *1 Ganzes = 10 Zehntel,* in Bruchform $1 = \frac{10}{10}$. Auch mit den Zehnteln nehme man die gleichen Behandlung vor, wie sie oben mehr oder weniger ausführlich dargelegt ist.

Die angestellten Übungen sollten vollständig genügen, um den Bruchbegriff zu entwickeln, so dass weitere systematische Veranschaulichungen nicht mehr nötig sein werden; allerdings wird der Lehrer noch oft in den Fall kommen, bei dem einen oder andern Schüler oder bei der einen und andern Aufgabe wieder auf die Veranschaulichung durch Kreis oder Streckenteilung zurückgehen zu müssen. Nach Behandlung der Zehntel stellt man eine Vergleichung an zwischen diesen zuletzt gewonnenen und den früher bei Betrachtung der „Dezimalbrüche" entwickelten Zehnteln. Die Schüler werden leicht erkennen, dass im einen wie im andern Fall dem Zehntel eine Zehnteilung irgend welcher Einheit zu Grunde liegt, und dass nur die Schreibweise eine verschiedene ist. Man unterlasse hier auch nicht, die Einheiten 1 dm, 1 dl, 1 Batzen u. s. w. darstellen zu lassen durch 0,1 m oder $\frac{1}{10}$ m, 0,1 l oder $\frac{1}{10}$ l, 0,1 Fr. oder $\frac{1}{10}$ Fr.; man bereitet dadurch auch schon die Verwandlung der einen Bruchform in die andere vor, was später vorgenommen werden muss, und man hat dabei Gelegenheit, den Schülern zu erklären, dass der Unterschied zwischen den „gemeinen Brüchen" und den „Dezimalbrüchen" nur in der *Schreibweise*, aber keineswegs in ihrer Bedeutung liegt.

Es sei hier noch bemerkt, dass man logisch richtiger unterscheiden würde: „Brüche in gemeiner Form" und „Brüche in dezimaler Form", da der Unterschied eben nur in der Form liegt. Wenn in der weitern Darstellung doch die geläufigern Bezeichnungen „gemeine Brüche" und „Dezimalbrüche" beibehalten werden, so geschieht es der Kürze des Ausdruckes wegen.

II. Vorübungen zum Bruchrechnen.

Dem systematischen Bruchrechnen haben einige Belehrungen und Übungen vorausgehen über Primzahlen und zusammengesetze Zahlen, über Zerlegung der zusammengesetzten Zahlen, über Aufsuchen der gemeinschaftlichen Faktoren und gemeinschaftlichen Vielfache von Zahlengruppen, sowie über Erweitern und Kürzen der Brüche. An Schulen, welche die Aufgabe haben, auf höhere Anstalten vorzubereiten und die Algebra zu pflegen, wird man diese Übungen nicht umgehen können. Für die Volksschule dagegen haben manche derselben allerdings keinen grossen Wert, da die Schüler z. B. beim Addiren und Subtrahiren der Brüche den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner meistens durch einfache Überlegung finden können und daher das sonst übliche Verfahren zur Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachs mehrerer Zahlen nicht anzuwenden brauchen. Immerhin sollen der Vollständigkeit wegen diese Übungen kurz besprochen werden.

Schon in den frühern Schuljahren sind im Anschluss an das Einmaleins Zerlegungen von Zahlen vorgenommen worden. Dieselben werden wiederholt und ergänzt und sowohl mündlich als auch schriftlich ausgeführt, z. B. $36 = 2 . 18 = 3 . 12 = 4 . 9 = 6 . 6$ oder $36 = 2 . 18 = 2 . 2 . 9 = 2 . 2 . 3 . 3$ oder kürzer $36 = 2 . 2 . 3 . 3$. Im Anschluss an diese Zerlegung gibt man die Erklärung, dass solche Zahlen, die nicht mehr zerlegt werden können, *Primzahlen* und solche Faktoren, die keine Zerlegung mehr zulassen, Primfaktoren genannt werden; dann lasse man im Zahlenraum 1—100 die Primzahlen und die zusammengesetzten Zahlen aufsuchen.

Um die Schüler auf die Bestimmung des *grössten gemeinschaftlichen Faktors* mehrerer Zahlen hinzuführen, nenne man zuerst Gruppen von 2, dann von 3 und mehr Zahlen und frage, welche Zahlen in allen Zahlen der genannten Gruppe ohne Rest enthalten sind — natürlich Kopfrechnen — z. B. welche Zahlen sind in den Zahlen 8 und 12 ohne Rest enthalten? Die Schüler finden sicher die Zahlen 2 und 4. Welche Zahlen sind in 12, 18 und 24 ohne Rest enthalten? Die Schüler finden: 2, 3, 4 und 6. Jetzt erklärt man oder lässt erklären, dass im letzten Beispiel die Zahlen 2, 3, 4 und 6 Faktoren sind sowohl von 12 als von 18, und von 24, daher *gemeinschaftliche Faktoren* dieser Zahlen genannt werden. Man lässt noch bei andern Zahlengruppen die gemeinschaftlichen Faktoren aufsuchen; dabei ist es zweckmässig, die Zahlen und ihre gemeinschaftlichen Faktoren übersichtlich an die Wandtafel zu schreiben, damit die Schüler mehrere Aufgaben mit ihren Lösungen vor Augen haben. Der Lehrer weist sodann darauf hin, dass bei jeder Zahlengruppe immer *ein* Faktor der grösste ist; dieser wird der grösste gemeinschaftliche Faktor der betreffenden Zahlen genannt. Nun folgt die Aufgabe — wiederum im Kopf zu lösen — für verschiedene Zahlengruppen den grössten gemeinschaftlichen Faktoren anzugeben: man wählt natürlich die Beispiele so, dass die Schüler durch einfache Überlegung die Antwort finden können. Will man den grössten gemeinschaftlichen Faktor auch schriftlich bestimmen lassen, so empfiehlt sich folgende Darstellung:

Aufgabe. Es ist der grösste gemeinschaftliche Faktor von 12, 18 und 24 zu bestimmen. *Auflösung.* Man zerlege:

12 ist 2 . 6,	6 ist 2 . 3,		also ist 12 = **2** . **2** . **3**.
18 ist 2 . 9,	9 ist 3 . 3,		„ „ 18 = **2** . **3** . 3.
24 ist 2 . 12;	12 ist 2 . 6,	6 ist 2 . 3,	„ „ 24 = **2** . **2** . 2 . **3**

Bei jeder Zerlegung lasse man in der hier angegebenen Weise sprechen, geschrieben wird aber jeweilen nur das Endergebnis nach also. Diejenigen Faktoren, die allen 3 Zahlen gemeinschaftlich sind, lässt man unterstreichen und schreibt sie gleichzeitig unter den Strich hin; das Produkt derselben gibt den grössten gemeinschaftlichen Faktor: aller drei Zahlen also Grösster gemeinschaftl. Faktor von 12, 18 und 24 = 2. 3 = 6.

Um das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* von Zahlengruppen zu bestimmen, schlage man einen analogen Weg ein. Man lasse irgend eine Einmaleinsreihe nennen, z. B. die 5er Reihe; dann betone man: 10 ist das 2 fache, 15 das 3fache, 20 das 4 fache u. s. w. von 5 und stelle nun die Frage: Was stellen die Zahlen 10, 15, 20 u. s. w. für die Zahl 5 dar? Antwort: Vielfache. Die Schüler haben darauf Vielfache von andern Zahlen anzugeben; jetzt folgt die Aufgabe: Nennt mir eine Zahl, in welcher jede der beiden Zahlen 2 und 3 ohne Rest enthalten ist; es werden genannt: 6, 12, 18 u. s. w. Dieselbe Aufgabe stellt man für andere Zahlengruppen. Es ist auch hier zweckmässig, die Zahlengruppen und die erhaltenen „Antworten an der Wandtafel übersichtlich zu notiren. Der

Schüler soll erkennen, dass z. B. die Zahl 6 das 3 fache von 2 und das 2 fache von 3 ist, somit ein Vielfaches sowohl von 2 als von 3 darstellt, und deshalb ein *gemeinschaftliches Vielfaches* von 2 und 3 genannt wird. Aus der an der Wandtafel stehenden Übersicht werden die Schüler wiederum leicht erkennen, dass in den verschiedenen Beispielen immer *ein* Vielfaches das kleinste ist; man nennt es das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der betreffenden Zahlengruppe. Man lasse im Kopf für verschiedene Zahlengruppen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aufsuchen; die Schüler sollen durch einfache Überlegung die Antworten finden.

Will man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache schriftlich bestimmen lassen, so kann man folgende Darstellung wählen: *Aufgabe:* Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 6, 8, 10 und 18? *Auflösung.* Man zerlege:

6 ist 2 . 3, also 6 = 2 . 3
8 „ 2 . 4, 4 ist 2 . 2, „ 8 = 2 . 2 . 2
10 „ 2 . 5 „ 10 = 2 . 5
18 „ 2 . 9, 9 „ 3 . 3, „ 18 = 2 . 3 . 3;

geschrieben werden nur die Zerlegungen nach also.

Nun erkläre man, dass das gesuchte Vielfache alle Faktoren von 6 enthalten muss, damit es ein Vielfaches von 6 sein kann; ebenso alle Faktoren von 8, damit es ein Vielfaches von 8 sein kann u. s. w.; dabei müsse man aber das eine 2, das man schon bei der Zahl 6 in Rechnung gebracht hat, bei der Zahl 8 nicht mehr in Rechnung bringen, ebenso bei der Zahl 18 das eine 3 nicht mehr, weil es ebenfalls schon bei der Zahl 6 genommen wurde; auch bei der Zahl 5 das 2 nicht mehr. Also erhält man:

Kleinste gemeinschaftl. Vielfache = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 360.

Oder man entwickle die kürzere Erklärung: Für alle 4 Zahlen braucht es 3 *2er*, 2 *3er* und 1 *5er*, daher ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller 4 Zahlen 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 360.

Wenn man bei einigen Beispielen auf diese Art das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bestimmt hat, erkennen die Schüler die Regel: Man zerlegt jede der betreffenden Zahlen in ihre Primfaktoren und schreibt dann jeden Primfaktor so oft auf, als er sich in derjenigen Zahl findet, wo er am öftesten vorkommt; das Produkt der so aufgeschriebenen Primfaktoren ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

(Schluss folgt.)

Rechnen.

Aufgaben im Rechnen für die Rekrutenprüfungen von 1898:

VI. 4. Ein Bäcker schuldet mir 20 Fr. Daran liefert er für 4 Fr. 90 Rp. Brot. Was bleibt er noch schuldig? 3. Ein Arbeiter kauft 6 Hemden à 3 Fr. 50 Rp. und 6 Paar Strümpfe à 1 Fr. 50 Rp. Was muss er bezahlen? 2. Unter zwei armen Familien sollen $4^1/_2$ *q* Kartoffeln im Verhältnis zur Kinderzahl verteilt werden. Wieviel erhält jede, wenn die eine 4, die andere 5 Kinder hat? 1. Welchen Zins tragen 360 Fr. à $3^1/_2$ % in 5 Monaten?

(Lösung: 15,10 Fr. 30 Fr. 2 *q* und $2^1/_2$ *q*. 5,25 Fr.)

VII. 4. Auf einem See fahren die Dampfschiffe seit 1835. Wie viele Jahre sind es seither? 3. Kaufmann F. hat letztes Jahr eine Dampfschiff-Linie 50 mal befahren und dafür jedesmal 1 Fr. 40 Rp. ausgelegt. Wie hoch kam dies zu stehen? 2. Zur gewöhnlichen Taxe hätte eine Fahrt statt 1 Fr. 40 Rp. genau $3^1/_2$ Fr., also das *Wievielfache* gekostet? 1. Herr Schmid ist bei der Dampfschiff-Gesellschaft mit 16 000 Fr. beteiligt und erhielt letztes Jahr $8^1/_2$ % Zins. Wie viele Fr. macht dies auf jedes Quartal?

(Lösung: 63 J. 70 Fr. $2^1/_2$ Fr. 340 Fr.)

VIII. 4. Ein Krämer erhält 210 Kilogramm Seife. Nach einem Monat hat er davon noch 35 Kilogramm. Wieviel hat er verkauft? 3. Eine Frau kauft 6 Kilogramm Zucker, das Kilogramm zu 65 Rappen, und 15 Kilogramm Reis, das Kilogramm zu 40 Rappen. Was hat sie zu bezahlen? 2. Wie viele Eier, das Dutzend zu 80 Rp., muss eine Bäuerin verkaufen, wenn sie aus dem Erlös 5 *m* Tuch, den *m* zu 2,40 Fr. kaufen will? 1. Wie viele *kg reines* Silber sind zur Prägung von 100 000 Zweifrankenstücken erforderlich, wenn ein Zweifrankenstück 10 *g* wiegt und der Kupferzusatz 20 % beträgt?

(Lösung: 175 *kg*. 9,90 Fr. 180 Eier. 800 *kg*.)

Le printemps.

H. G. K.

Marie invite Jeanne à faire une promenade dimanche prochain. Le printemps est revenu: Le temps, l'air, le ciel, les arbres, les prés, les fleurs, les oiseaux.

a. N'as-tu pas envie de faire une promenade sur le Baldern, dimanche prochain? Le temps est très beau aujourd'hui. J'espère qu'il sera de même dimanche prochain, car, depuis quelques jours, le baromètre va toujours en montant.

L'air est doux. Les vents tièdes du printemps ont remplacé la bise glaciale de l'hiver. Le ciel est bleu. On n'y voit presque pas de nuages. Le lac brille comme un miroir. Les névés du Glärnisch resplendissent d'une blancheur éblouissante. Les branches des arbres fruitiers sont couvertes de fleurs. Les cerisiers ont déjà noué, tandisque les poiriers ressemblent à des bouquets immenses. Les fleurs roses des pommiers ne tarderont pas à paraître. Les champs et les bois se sont parés de verdure. Les prés sont émaillés des fleurs des pâquerettes, des boutons d'or, de la dent de lion. Les oiseaux construisent leurs nids en chantant à pleins poumons. Toute la nature respire le renouveau du printemps.

Ecris-moi un petit mot pour me faire savoir si tu veux bien m'accompagner dimanche après le catéchisme. Nous serons de retour à sept heures du soir, car, avec nos jambes lestes et vigoureuses, nous pourrons faire le trajet en moins de deux heures.

Arrivées sur la hauteur, nous y jouirons d'une vue magnifique sur la ville de Zurich, le lac et les Alpes.

J'attends une réponse par le retour du courrier.

Ton amie qui t'aime. . . .

b. Dimanche prochain, j'irai faire une course sur l'Ütliberg, avec mes parents, mes sœurs et frères. Je te prie d'être des nôtres. Je te promets une journée agréable. Le temps se remet au beau depuis quelques jours. Jl ne changera pas jusqu'à dimanche car le baromètre monte lentement et une légère bise chasse les nuages.

Le soleil darde ses doux rayons sur la terre. Le beau printemps est revenu. Le temps est doux. Le brouillard a disparu. Les champs, les prés et les bois reverdissent. La terre s'est parée de gazon et de fleurs. Les cerisiers et les poiriers nous réjouissent par leurs fleurs d'une blancheur éblouissante. Le retour des hirondelles nous annonce les beaux jours. Elles construisent leurs nids sous le toit de nos maisons. La femelle pond ses oeufs. Elle les couve et les petits ne tarderont pas à éclore. La femelle et le mâle leur donnent la becquée. Dès que les petits ont grandi, ils prennent leur vol et cherchent leur nourriture. Les jolis papillons multicolores voltigent de fleur en fleur. Les abeilles bourdonnent dans l'air. Elles cherchent du miel dans le calice des fleurs.

Les jeunes filles vont faire des bouquets. Elles cueillent la primevère, la violette, la pâquerette. Elles vont chercher le muguet qui croît au bord des sentiers et le long des ruisseaux.

Viens donc contempler la nature dans toute sa beauté. Je compte sur toi et je t'embrasse de tout mon cœur. Envoie donc bien vite un „oui“ affectueux à ton amie qui t'attend avec impatience. Je te serre la main.

Devoirs. 1. Vousoyer.

2. Mettre l'imparfait et le futur dans la partie descriptive.

3. Mettre l'infinitif complétif après les locutions:

a) N'as-tu pas envie de... N'avez-vous pas envie de... Je n'ai pas envie de... Nous n'avons pas envie de... J'ai toujours envie de... Nous avons toujours envie de... Pourquoi n'as-tu pas envie de... Pourquoi n'avez-vous pas envie de... L'écolier paresseux a toujours envie de... Les écoliers paresseux ont toujours envie de...

b. Je ne tarderai pas à... Nous ne tarderons pas à... Le train ne tardera pas à... Les fleurs ne tarderont pas à... Les oiseaux ne tarderont pas à... Les petits ne tarderont pas à...

c. Je te prie de... Je vous prie de... Il me prie de... Il nous prie de... Il m'a prié de... Il nous a prié de... Nous le prions de... Vous les priez de... Pourquoi ne l'as-tu pas prié de... Prie-le de... Priez-les de...

d. Je t'invite à... Je vous invite à... Invite-la à... Invitez-les à... Pourquoi ne l'avez-vous pas invité à...