Zur Praxis der Volksschule : Beilage zu Nr. 35 der „Schweizerischen Lehrerzeitung"

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **Schweizerische Lehrerzeitung**

Band (Jahr): **45 (1900)**

Heft 35

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Zur Praxis der Volksschule.

Beilage zu Nr. 35 der „Schweizerischen Lehrerzeitung". VIII.

Bruchzahlen und Bruchgrössen.

Von *J. Rüefli*, Seminarlehrer in Bern.

Die Schwierigkeiten und Widersprüche, welche der Bruchrechnung vielfach noch anhaften, wurzeln in einer unklaren, schwankenden, oder einseitigen Fassung des Bruchbegriffes. Wer z. B. den Bruch lediglich als Bruchgrösse auffasst, wird dadurch zu der Ansicht gedrängt, dass es keinen verständlichen Sinn habe, mit einem Bruch zu multipliziren oder zu teilen, während andere, für welche der Bruch wesentlich Bruchzahl ist, in Operationen dieser Art weder logische noch methodische Schwierigkeiten finden. In meiner in der Schweiz. Päd. Zeitschrift (VIII. Jahrgang, 6. Heft) veröffentlichten Abhandlung „Zur Bruchrechnung" habe ich den Versuch gemacht, diese Begriffe nach ihrem Wesen und ihrem Zusammenhang klar zu stellen. Hier soll dieser Versuch weiter ausgebaut und durchgebildet werden.

Wenn eine zahlenmässig bestimmte Grösse in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen ist, so kann man auf zwei verschiedenen Wegen zum Ziele gelangen. Hat man z. B. die Grösse „20 Meter" durch 5 zu teilen, so kann man einmal die Anzahl der Meter teilen, wobei die als Einheiten gezählten Massstrecken unverändert bleiben. Man erhält als Resultat „4 Meter". Dieser Quotient stimmt mit dem Dividenden in der Art und Grösse der Einheiten überein; ihre Anzahl aber ist fünfmal kleiner. Die Teilung lässt sich aber auch in der Weise ausführen, dass man nicht die Anzahl der Masseinheiten, sondern diese Einheiten selber jede in 5 gleiche Stücke teilt, so dass jedes Stück ein „Fünftelmeter" ist. Dabei hat man zu schliessen: 1 Meter geteilt durch 5 ist 1 Fünftelmeter; 20 Meter geteilt durch 5 sind offenbar zwanzigmal so viel, also „20 Fünftelmeter". Der Quotient stimmt in diesem Falle mit dem Dividenden in der Anzahl der Einheiten überein; diese aber sind fünfmal kleiner. Von dem ersten Resultate dagegen unterscheidet sich das zweite dadurch, dass es eine fünfmal so grosse Anzahl fünfmal kleinerer Grösseneinheiten enthält. Da aber eine zahlenmässig bestimmte Grösse in gleichem Sinne sowohl durch die Anzahl als auch durch die Grösse der Einheiten bedingt ist, so müssen die beiden Resultate die gleiche Grösse darstellen.

Ist aber eine Grösse wie z. B. „4 Meter" durch 5 zu teilen, so erhält man nach dem zweiten Teilungsverfahren „4 Fünftelmeter". Versucht man dagegen die Lösung nach dem ersten Verfahren, also dadurch, dass man die Anzahl 4 durch 5 teilt, so stellt man sich die Aufgabe, eine Zahl zu suchen, welche mit 5 multiplizirt, die Zahl 4 als Resultat gibt. Nun macht man aber die Erfahrung, dass von den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe keine dieser Bedingung entspricht. Es bleibt also nichts anderes übrig, als die Anzahl der Meter durch „4/5", d. h. „4 geteilt durch 5" darzustellen, so dass das Resultat in der Form „4/5 Meter" erscheint, wobei der wagrechte Strich die Bedeutung des Divisionszeichens hat. Trotzdem die Verknüpfung der beiden Zahlen 4 und 5 durch Division keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe darstellt, so betrachtet man sie, weil sich dies als zweckmässig erweist, gleichwohl als eine Zahl, nämlich als Bruchzahl, und legt diese der Masseinheit „Meter" als Anzahl bei. Zur Unterscheidung von den Bruchzahlen werden nun die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe ganze Zahlen genannt. Mit der Einführung der Bruchzahlen hat die Arithmetik die erste Erweiterung des Zahlengebietes vollzogen.

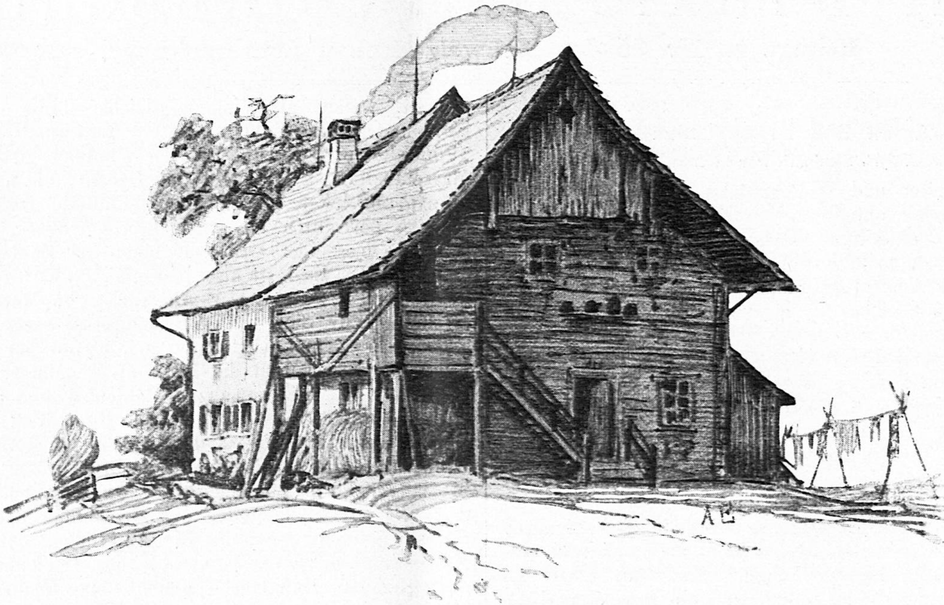
Die Anwendung des Ausdrucks „4/5 Meter" ist an die Bedingung geknüpft, dass man für denselben bei der Auswertung jedesmal „4 Fünftelmeter" setzt, so dass diese beiden Bezeichnungen lediglich zwei verschiedene symbolische Darstellungen für eine und dieselbe Grösse sind. Sie haben aber nicht die gleiche operative Bedeutung. Die eine entspricht der Teilung der Grösseneinheiten, die andere der Teilung ihrer Anzahl. Die eine drückt die Grösse in Fünftelmetern, die andere in Metern aus. Nach der einen ist die Anzahl der Grösseneinheiten eine ganze Zahl, nach der anderen eine Bruchzahl. Der Ausdruck „4 Fünftelmeter" bezeichnet eine Bruchgrösse, nämlich eine Strecke, welche als Vielheit gleicher Teile der als Ganzes betrachteten Masseinheit „Meter" dargestellt ist. Das Wort „Fünftelmeter" benennt die der Zählung zu Grunde liegende Masseinheit nach ihrer Art und Grösse; die aus dem Zahlwort „fünf" abgeleitete Bezeichnung „Fünftel" ist nicht Zahlname, sondern der durch eine ausgeführte Grössenteilung bestimmte Sachname einer Grösseneinheit; die Zahl 4 aber ist eine ganze Zahl. Es liegt also hier eine Bruchgrösse vor, aber keine Bruchzahl. Der Ausdruck „4/5 Meter" dagegen bezeichnet zwar die gleiche Bruchgrösse, setzt aber eine ganz andere Betrachtungsweise voraus. Hier ist nun nicht der Fünftelmeter, sondern die Masseinheit „Meter" Gegenstand des Zählens. Die beiden ganzen Zahlen 4 und 5 aber bilden in ihrer operativen Verknüpfung die Bruchzahl „4/5", welche der Masseinheit „Meter" als Anzahl zugeordnet ist. Diese Bruchzahl dient als Mittel, um die Bruchgrösse „4 Fünftelmeter" in anderer Form, nämlich in der Weise symbolisch darzustellen, dass die Bruchteile unter die Benennung des entsprechenden Ganzen gebracht werden. Die Anwendung der Bruchzahlen ist ein bewundernswerter Kunstgriff des Denkens, durch welchen das scheinbar Unmögliche gelingt, eine Vielheit gleicher Teile eines Ganzen als Anzahl dieses Ganzen darzustellen, ohne dass darin ein Widerspruch läge. In der Rechenpraxis und im Unterricht pflegt man diese wichtigste, oder richtiger gesagt, diese einzige Aufgabe der Bruchzahlen zu übersehen. Man wendet bei der Darstellung von Bruchgrössen die der Bruchzahl entsprechende Bezeichnungsweise an, lässt aber die diesem eminent praktischen Hülfsmittel zu Grund liegende Bedeutung unbeachtet.

Um von den beiden Ausdrücken „4 Fünftelmeter" und „4/5 Meter" den einen für den andern setzen zu dürfen, muss man sie als Grössenbestimmungen auffassen, so dass die Darstellung

4/5 Meter = 4 Fünftelmeter

eigentlich nicht eine Definition, sondern eine Grössengleichung ist. In der Rechensprache hat sich aber die Gewohnheit eingebürgert, die durch den gesprochenen Ausdruck „4 Fünftel" bezeichnete Bruchgrösse ebenfalls in der Form „4/5", d. h. so zu schreiben, als ob die Grössenteilung durch 5 nur als Forderung hingestellt wäre, während sie in Wirklichkeit ausgeführt ist. Dagegen pflegt man die durch „4/5" schriftlich dargestellte Bruchzahl in der Form „4 Fünftel", also in der Weise zu lesen, als ob die Teilung der Zahl 4 durch 5 ausgeführt wäre, während sie in Wirklichkeit eine nicht weiter ausführbare operative Verknüpfung dieser Zahlen ist. Kurz gesagt: Man schreibt die Bruchgrösse in der Form der Bruchzahl und liest diese in der Bezeichnungsweise der Bruchgrösse. Wenn die Angabe der Sachbenennung der als Ganzes betrachteten Grösse fehlt, so ist diese Ausdrucksweise zweideutig; denn jeder der beiden Ausdrücke „4/5" und „4 Fünftel" kann dann sowohl eine Bruchzahl als auch eine Bruchgrösse bezeichnen. Wird aber der Sachname des Ganzen angegeben, so verschwindet die Unbestimmtheit der schriftlichen Bezeichnung; denn der Ausdruck „4/5 Meter" zeigt beim ersten Anblick, dass er eine Bruchgrösse durch Anwendung der Bruchzahl 4/5 unter die Benennung des Ganzen bringt. In der mündlichen Bezeichnungsweise dagegen bleibt die Zweideutigkeit bestehen; denn im raschen Flusse der Rede wird wohl selten jemand die Ausdrücke „4 Fünftel Meter" und „4 Fünftelmeter" auseinanderhalten. Und doch ist leicht einzusehen, dass im ersten Falle „4 Fünftel" ein Zahlname ist, welcher eine Anzahl „Meter" bezeichnet, während im zweiten das Zahlzeichen 4 eine Anzahl „Fünftelmeter" darstellt. Der wesentliche Unterschied besteht also darin, dass das Wort „Fünftel" das einemal Zahlname, das anderemal Sachbenennung ist. Wer diese Unterscheidung als eine unfruchtbare Spitzfindigkeit betrachtet, wird wohl daran tun, sich die Sache noch an dem nachfolgenden Beispiel klar zu vergegenwärtigen und dabei zu bedenken, dass zwei Zahlen nur dann zu einer Zahl als Summe vereinigt werden können, wenn ihre Einheiten gleich sind, wenn sie also die

Zum Zeichnen nach der Natur.



gleiche Sachbenennung haben. Er wird dann einsehen, dass man den Ausdruck „$8^4/_5$ Meter“ in der Form

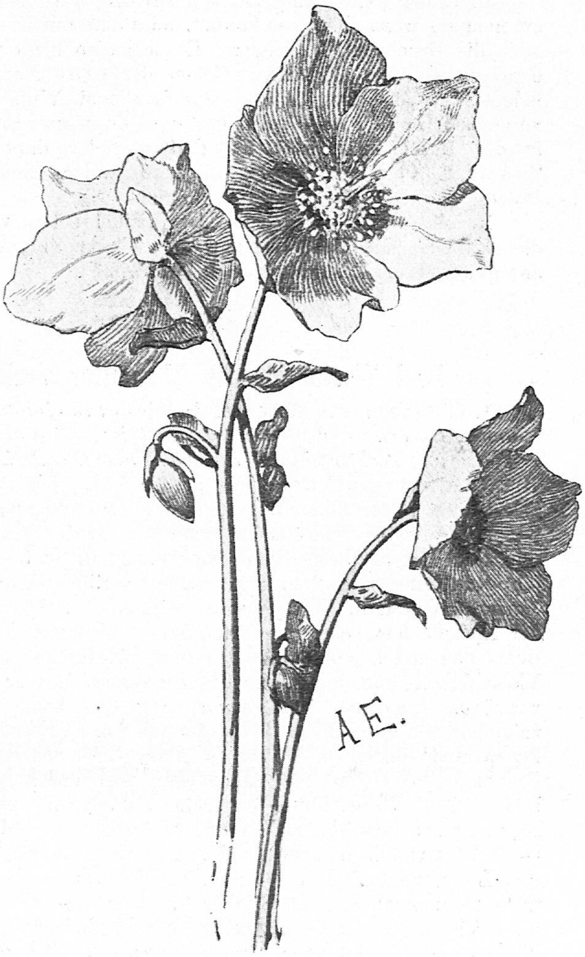
(8 und 4 Fünftel) Meter,

d. h. so zu lesen hat, dass nicht nur „8“, sondern auch „4 Fünftel“ als eine der Masseinheit „Meter“ zugeordnete Anzahl erscheint. Das Wort „Fünftel“ darf also nicht mit der Bezeichnung „Meter“ zu einem Sachnamen zusammenfliessen, sondern es hat in Verbindung mit der Ziffer 4 eine Anzahl Meter zu bezeichnen, denn sonst könnten die beiden Zahlen 8 und $^4/_5$ nicht die eine Zahl $8^4/_5$ mit der einen Benennung „Meter“ bilden. Dass man die in bündiger Fassung durch „$8^4/_5$ Meter“ bezeichnete Grösse anschaulicher, aber weitschweifiger auch in der Form

8 Meter + 4 Fünftelmeter

darstellen kann, und dass der Übergang von der einen dieser gleichwertigen Formen zur andern sich sicher und leicht vollziehen muss, wenn das Rechnen mit Bruchzahlen zweckmässig sein soll, ist so selbstverständlich, dass es keiner weitern Begründung bedarf.

Mit Bruchgrössen kann man rechnen, ohne Bruchzahlen anzuwenden. Wenn man rechnet: „2 . 3 Dezimeter = 6 Dezimeter“, oder: „3 . 8 Centimeter = 24 Centimeter“, so operirt man mit Bruchgrössen; denn die Ausdrücke „3 Dezimeter“ und „8 Centimeter“ bezeichnen Strecken, welche als Vielheiten von gleichen Teilen der Masseinheit „Meter“ dargestellt sind. Es wird aber niemand behaupten, dass dies ein Rechnen mit Bruchzahlen sei. Ein solches liegt offenbar erst dann vor, wenn man darstellt: „2 . $^3/_{10}$ Meter = $^6/_{10}$ Meter“, oder: „3 . 0,08 Meter = 0,24 Meter“. Es besteht also keine logische Notwendigkeit, beim Rechnen Bruchzahlen anzuwenden. Es sind lediglich



Gründe der **Zweckmässigkeit**, welche ihre Einführung veranlasst haben. Sie dienen als Mittel, um die Sprache der Arithmetik wesentlich zu vereinfachen. Man habe z. B. die Teilungsaufgabe „75 Meter : 8“ auszuführen. Wenn man den Dividenden als zweigliedrige Summe

72 Meter + 3 Meter

auffasst und im ersten Gliede die Anzahl der Einheiten, im zweiten aber die Masseinheit durch 8 teilt, so erhält man:

9 Meter + 3 Achtelmeter.

Das Resultat ist also wiederum eine zweigliedrige Summe, deren zweites Glied eine durch die ganze Zahl 3 dargestellte Bruchgrösse ist. Eine Summe dieser Art pflegt man wenig zutreffend eine zweifach **benannte Zahl** zu nennen. Es ist leicht einzusehen, dass hier gar nicht **eine** Zahl, wohl aber **eine** Grösse vorliegt, zu deren Darstellung die beiden Grösseneinheiten „Meter“ und „Achtelmeter“ und ausserdem die beiden ganzen Zahlen 9 und 3 dienen. Die mit diesem Verfahren verbundene, umständliche Bezeichnungsweise kann aber durch eine kürzere ersetzt werden, indem man zur Darstellung der Bruchgrösse „3 Achtelmeter“ die Bruchzahl $^3/_8$ anwendet. Man erhält dann:

9 Meter + $^3/_8$ Meter = $9\,^3/_8$ Meter.

Nun sind die beiden Glieder dadurch in **eines** zusammengefasst worden, dass man auch die Bruchgrösse „3 Achtelmeter“ mittels der Bruchzahl $^3/_8$ unter die Benennung „Meter“ gebracht hat. Wie zweckmässig in Fällen dieser Art die Bruchzahlen sind, tritt noch auffallender zu Tage, wenn man bei der Auflösung der Teilungsaufgabe „75 Meter : 8“ Bruchgrössen mit dezimaler Teilung anwendet. Man erhält dann: „9 Meter + 3 Zehntelmeter + 7 Hundertstelmeter + 5 Tausendstelmeter“. Das Resultat ist also eine viergliedrige Summe, deren Darstellung vier verschiedene Grösseneinheiten mit ihren Benennungen und die vier ganzen Zahlen 9, 3, 7 und 5 erfordert. Statt dieser ermüdend weitschweifigen Bezeichnungsweise bietet die Anwendung der entsprechenden Bruchzahlen in diesem Falle den einfachen, bündigen Ausdruck „9,375 Meter“.

Die Resultate meiner Untersuchung lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Eine **Bruchgrösse** ist eine Grösse, welche aus gleichen Teilen einer als Ganzes betrachteten Grösse besteht.

2. Jede Verbindung zweier Zahlen der natürlichen Zahlenreihe durch Division, welche keine Zahl dieser Reihe darstellt, wird **Bruchzahl** genannt, z. B. $^3/_4$.

3. Durch Anwendung einer ganzen Zahl kann eine Bruchgrösse als Vielheit von gleichen Teilen des Ganzen dargestellt werden, z. B. 3 Vierteljahre. Mittels einer Bruchzahl dagegen lässt sich die Bruchgrösse unter die Benennung des Ganzen bringen, z. B. 3/4 Jahr.

In beiden Fällen pflegt man die Bruchgrösse einen Bruch zu nennen, wozu aber noch kommt, dass man mit diesem Namen auch die Bruchzahl bezeichnet. Es sind also nicht weniger als drei verschiedene Begriffe, welchen der eine Name „Bruch“ beigelegt wird. Um Missverständnisse und Widersprüche zu vermeiden, muss man offenbar entweder diese drei Begriffe auch in der Bezeichnung auseinanderhalten, oder dann in jedem Spezialfalle sich klar vergegenwärtigen, welche Bedeutung des Wortes „Bruch“ der Sachlage entspricht.

In einem später erscheinenden Artikel sollen verschiedene die Methodik des Bruchrechnens betreffende Fragen ins Licht der gewonnenen Resultate gestellt werden.

Drei Werke für die Elementarschule.

1. **Göbelbeckers Wandtafeln** *für den vereinigten Anschauungs-, Sprach- und Rechenunterricht im ersten Schuljahr der Volks- und Töchterschulen. Spachholz und Ehrath in Bonndorf.*

Zum richtigen Verständnis der Aufgabe, die sich das angekündigte Unterrichtsmittel stellt und zur Würdigung seiner Bedeutung ist es unerlässlich, einige Bemerkungen vorauszuschicken, die wir ihrem Sinne nach einem in Nr. 5—9 der diesjährigen Neuen badischen Schulzeitung veröffentlichten grössern Vortrage des Hrn. Verfassers entnehmen. Letzterer geht von der Ansicht aus, dass die erfolgreiche Wirkung jedes Unterrichts namentlich auch auf die Willensbildung abhange von der Vielseitigkeit und der Stärke des Interesses, das er zu wecken vermöge. Da dieses letztere vor allem den konkreten Dingen zukommt und unter diesen hauptsächlich den handelnden menschlichen und tierischen Wesen in ihren Lebensbeziehungen zur Umgebung, so sollen diese Sachgebiete auch den Ausgangspunkt bilden für die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe und für deren Anwendung; wie sie anderseits im Anschauungsunterricht die stoffliche Grundlage abgeben für die ersten Sprech-, Schreib- und Leseübungen. Der Forderung einer vernünftigen Konzentration entsprechend sollen daher Anschauungs- und Rechnungsunterricht ineinandergreifen, sich gegenseitig belebend, vertiefend, klärend. Die Bildertabellen nun wollen als eine Art (unbemalter) Skizzen Anhaltspunkte bieten, aufmuntern zur Reproduktion und apperzipirenden Verbindung bereits bestehender durch konkrete Anschauung gewonnener Vorstellungen und Vorstellungsgruppen.

Die ersten sechs Tafeln stellen ländliche Szenen dar aus dem Leben und Treiben im Dorfe (auch in der Wohnstube) und dessen nächster Umgebung unter Berücksichtigung des Sondergepräges, das die Jahreszeiten (Frühling, Sommer und deren Übergänge) den betreffenden Lebensgebieten verleihen. Dabei legt der Verfasser besondern Wert darauf, dass die Schüler die skizzirten Objekte in ihrer einheitlichen innern Beziehung, etwa im Rahmen einer Erzählung auffassen. Was nun diese Bilder vor andern für den Anschauungsunterricht bestehenden unterscheidet, ist ausser der Hervorhebung der Lebensgemeinschaften einmal die besondere Berücksichtigung der Zahlverhältnisse, insofern, als jeder Gegenstand auf dem Bilde in einer bestimmten Zahl (bis 6) vertreten ist. Also z. B. Bild I: 1 Mann, 1 Knabe, 1 Hund, 1 Wasserrad etc. Bild III: 3 Kinder, 3 Katzen, 3 Pfannen etc. und zwar erscheinen diese Gegenstände sowohl gruppen- wie reihenweise geordnet und ist überdies durch verschiedene Stellung und Handlung der zu einer Zahlgruppe gehörigen Einheiten, deren Zusammensetzung resp. Zerlegung angedeutet; im weitern sind zum Zwecke der Einzelbesprechung nach Art der Hey-Specterschen Bilder einzelne Gruppen (Knabe und Hund, Pferd und Sperling etc.) durch Grösse oder Stellung besonders in die Augen fallend dargestellt.

In der zweiten Serie von 10 Tabellen sind quadratförmig (successive bis 20) zusammengeordnete schwarze und grüne Kreise (Kirschen) als unveränderliche Typen bestimmt zur Zahl*übung;* zur Erziehung der nötigen Geläufigkeit im Operiren mit den elementaren Zahlgebilden und zugleich sind denselben gleichsam als in sich abgeschlossene Naturtypen zur Versinnlichung der Zahlbegriffe bis sechs beigegeben: Kopf, Erdbeerblatt, Gabel, Schmetterling, Vogelfüsse, Hand in verschiedener Fingerstellung.

Die Blätter sind solid auf Leinwand gezogen und eignen sich für den Klassenunterricht. Wenn auch die Stoffwahl eine gewisse lokale Färbung nicht verleugnet, so könnte sie doch mit Nutzen in weitern Kreisen Verwendung finden.

Auf die Streitfrage der psychologischen Ableitung der ersten Zahlbegriffe und die Art der Gruppirung der symbolischen Zeichen einzutreten, erachten wir hier nicht als unsere Aufgabe.

Jedenfalls gebührt dem Verfasser das Verdienst, durch seine fleissige Arbeit aufs neue aufmerksam gemacht zu haben auf die Wichtigkeit der ersten begrifflichen Grundlagen und auf die Notwendigkeit einer gegenseitigen innern Beziehung der verschiedenen Unterrichtsdisziplinen. Es verdient daher dieses Lehrmittel angemessene Würdigung seitens fachmännischer Kreise.

A. F.

Rechnen.

Aufgaben für die Rekrutenprüfungen 1899.

Mündlich:

4. Von 4 Kameraden steuert jeder 2 Fr. 50 Rp. an eine Anstalt. Wieviel alle vier zusammen? 3. 6 Freunde machen eine Reise, auf welcher jeder durchschnittlich 5 Fr. 75 Rp. ausgiebt. Welches sind die Gesamtausgaben? 2. Von 760 Fr. gehen 2/5 verloren. Was erhält man noch? 1. Zu wieviel Prozent sind 250 Fr. zinstragend angelegt, wenn der jährliche Zins 8,75 Fr. beträgt?

10 Fr. 34,50 Fr. 456 Fr. 3½ %

4. Ein Meister zahlt wöchentlich 45 Fr. Lohn aus, wieviel also in 2 Wochen? 3. M. lässt sich eine Lieferung für 360 Fr. in 8 gleichen Teilen bezahlen. Wieviele Fr. sind jedesmal zu entrichten? 2. Bei sofortiger Zahlung wären von 360 Fr. 10 % nachgelassen worden. Wieviel hätte die Barzahlung ausgemacht? 1. Ein Rechteck von 12½ *m* Länge und 10 *m* Breite ist im Masstab $\frac{1}{50}$ (1 : 50) zu zeichnen. Wie gross wird die Länge, die Breite und die Fläche auf dem Plane sein?

90 Fr. 45 Fr. 324 Fr. 2,5 *dm*, 2 *dm*, 5 dm^2

Schriftlich:

4. Die Stadt St. Gallen liegt 673 *m* über Meer, Lugano 277 *m*. Wieviel höher liegt St. Gallen? 3. Eine Stadt zählt 27,860 Einwohner. Wie viele Häuser zählt sie, wenn durchschnittlich 14 Personen in einem Hause wohnen? 2. Wie viele Einwohner wird dieselbe Stadt bei der nächsten Zählung haben, wenn die Bevölkerung inzwischen um 5 % zunimmt? 1. Ein Teich misst 1575 m^2. Welchen Wert hat die 12 *cm* dicke Eisdecke desselben, wenn 1 m^3 Eis 9,2 *q* wiegt und 1 *q* zu 1,90 Fr. berechnet wird?

396 *m* 1990 H. 29,253 E. 3303,72 Fr.

4. Ein Handwerker besitzt für 1185 Fr. Werkzeuge, für 539 Fr. fertige Waren und für 1496 Fr. Rohstoffe. Welches ist der Gesamtwert? 3. Meister Peter hat letztes Jahr seinen Arbeitern 2470 Fr. Lohn ausbezahlt. Wieviel traf es durchschnittlich auf jeden der 26 Zahltage? 2. Die Kosten einer Arbeit sind zu 6450 Fr. berechnet. Es erfolgen 2 Angebote, das eine 2½ % höher, das andere 3½ % tiefer als der Voranschlag. Wieviel fordert jeder der beiden Bewerber? 1. Wie hoch ist 1 m^3 kantig geschnittenes Eichenholz berechnet, wenn eine Bohle (Brett, Laden) von 5 *m* Länge, 48 *cm* Breite und 5 *cm* Dicke 16 Fr. 80 Rp. kostet?

3220 Fr. 95 Fr. 6611,25 Fr. / 6224,25 „ 140 Fr.