Zeitschrift: Schweizerische Lehrerzeitung
Herausgeber: Schweizerischer Lehrerverein
Band: 96 (1951)
Heft: 20

Heft

SCHWEIZERISCHE LEHRERZEITUNG

ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN LEHRERVEREINS

Sonderheft: MATHEMATIK

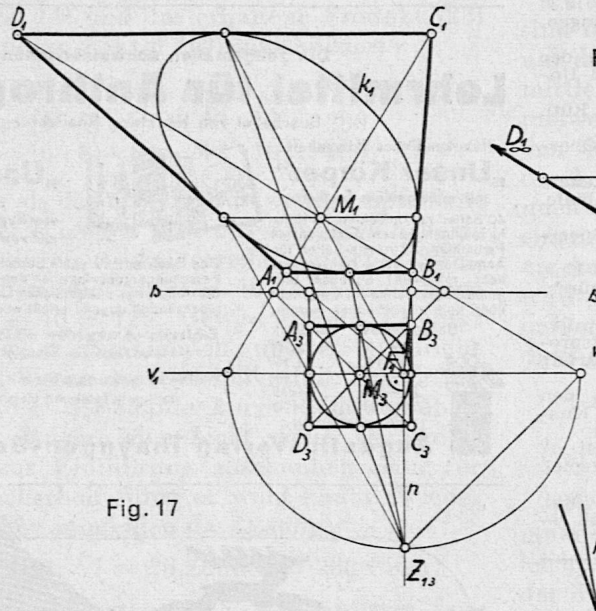


Fig. 17

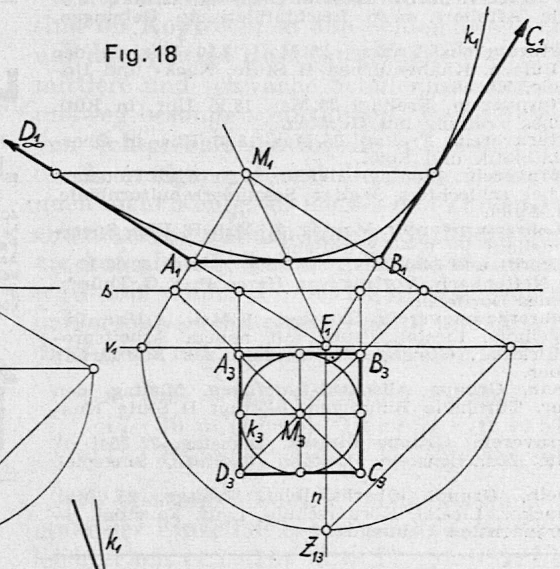


Fig. 18

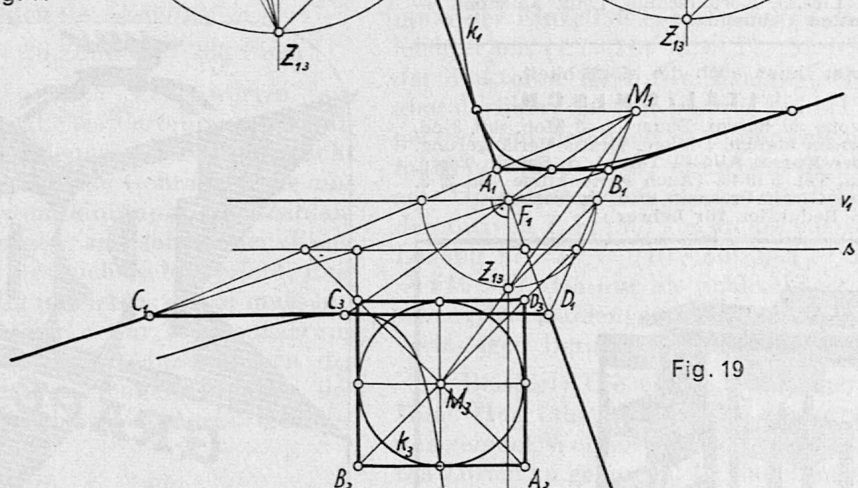


Fig. 19

Die Kegelschnitte im Unterricht der darstellenden Geometrie

(Siehe Seite 457 dieses Heftes)

SLZ 96. Jahrgang **Nr. 20** S. 441…468 Zürich, 18. 5. 1951

Versammlungen

LEHRERVEREIN ZÜRICH.

— **Lehrergesangverein.** Freitag, 25. Mai, 19.30 Uhr, Hohe Promenade. Probe.

— **Lehrerturnverein.** Montag, 21. Mai, 18 Uhr, Hallenbad Zürich. Schwimmen: Lektion II. Stufe und Crawl (persönliche Fertigkeit). Leitung: Leo Henz, Schwimminstruktor.

— **Lehrerinnenturnverein.** Dienstag, 22. Mai, 17.30 Uhr, Turnhalle Sihlhölzli. Lektion für die Unterstufe: «Wir turnen im Freien.» Leitung: H. Futter.

— **Pädagogische Vereinigung. Arbeitsgemeinschaft der Elementarlehrer.** Donnerstag, 24. Mai, 17.15 Uhr, im Beckenhof, Lesezimmer. Sprachunterricht im 2. Schuljahr.

— **Pädagogische Vereinigung. Arbeitsgruppe «Einführung in die Existenzphilosophie».** Nächste Zusammenkunft: Freitag, den 25. Mai, 20.15 Uhr, im Beckenhof.

— **Pädagogische Vereinigung. Arbeitsgemeinschaft «Grundfragen der Volksschule».** Fortsetzung der Tätigkeit nach den Sommerferien.

— **Schulkapitel, 1. Abteilung.** Kapitelsversammlung 9. Juni, 08.15 Uhr, im Kirchgemeindehaus am Hirschengraben. Traktanden: Begutachtungen der Lese- und Rechenbücher sowie des Sprachbuches der Sekundarschulstufe. Vortrag mit Lichtbildern von Kollegen Hans Wymann: «Finnland, Land, Volk, seine gegenwärtige Lage», unter Mitwirkung von Aune Tuomela, Gesang, und Timo Mäkinen, Klavier.

— **Lehrerturnverein Limmattal.** Montag, 21. Mai, 17.30 Uhr, Kappeli. Leichtathletische Uebungen (Sportabzeichen!), Spiel. Leiter: A. Christ.

— **Lehrerturnverein Oerlikon und Umgebung.** Freitag, 25. Mai, 17.30 Uhr, Turnhalle Saatlenstrasse. Lektion Mädchen II. Stufe, Spiel. Leitung: W. Bachmann.

AFFOLTERN am Albis. Lehrerturnverein. Dienstag, 22. Mai, 18.30 Uhr, Turnhalle Affoltern a. A. Leichtathletische Uebungen, Spiel.

BÜLACH. Lehrerturnverein. Freitag, 25. Mai, 17.10 Uhr, in der Turnhalle in Bülach. Knabenturnen II. Stufe, Neck- und Unterhaltungsspiele, Korbball.

HINWIL. Lehrerturnverein. Freitag, 25. Mai, 18.15 Uhr, in Rüti. Leichtathletisches Training mit Geräten.

MEILEN. Lehrerturnverein. Freitag, 25. Mai, 17.30 Uhr, in Obermeilen. Leichtathletik und Spiel.

USTER. Lehrerturnverein. Montag, 21. Mai, 17.50 Uhr, Heusser-Staub-Wiese, bei schlechtem Wetter Sekundarschulturnhalle. Knabenturnen, Spiel.

WINTERTHUR. Lehrerturnverein. Montag, 21. Mai, 18 Uhr. Speerwurf und Schnellauf im 6.—9. Schuljahr.

— **Schulkapitel (Nord- und Südkreis).** Samstag, 23. Mai, 09.00 Uhr, in der Kirche Neftenbach. Vortrag von Herrn Prof. G. Thürer: «Gotthelf und das Dorfleben.»

BASELLAND. Lehrergesangverein. Samstag, 19. Mai, 14 Uhr, Restaurant «Ziegelhof», Liestal. Probe mit neuem Arbeitsprogramm laut Zirkular. Günstige Gelegenheit zur Einführung neuer Mitglieder.

— **Lehrerturnverein, Gruppe Allschwil-Binningen.** Montag, den 21. Mai, 17 Uhr, Turnhalle Binningen. Lektion II. Stufe Knaben. Spiel.

— **Lehrerinnenturnverein, Gruppe Birseck.** Dienstag, 22. Mai, 17 Uhr, Turnhalle Münchenstein. Lektion I. Stufe, Singspiel, Korbball.

— **Lehrerturnverein, Gruppe Oberbaselbiet.** Freitag, 25. Mai, Turnhalle Rotacker, Liestal. Körperschule, Lauf, Faustball. — Festlegung der nächsten Uebungen.

SCHWEIZERISCHE LEHRERZEITUNG

Beilagen — 6 mal jährlich: Das Jugendbuch, Pestalozzianum, Zeichnen und Gestalten — 4 mal jährlich: Der Unterrichtsfilm
2 mal monatlich: Der Pädagogische Beobachter im Kanton Zürich

96. Jahrgang Nr. 20 18. Mai 1951 Erscheint jeden Freitag Redaktion: Beckenhofstr. 31 Postfach Zürich 35 Telephon (051) 28 08 95
Administration: Stauffacherquai 36 Postfach Hauptpost Telephon (051) 23 77 44 Postcheck VIII 889

Die Zahlengesetze und das Volksschulrechnen

1. Beispiel: Das Zehnereinmaleins. Fragen wir die Zahlengesetze, wie die Aufgabe $40 \cdot 7$ zu lösen sei, so lautet die Antwort: Ein Produkt ($40 = 4 \cdot 10$) wird mit einer Zahl (7) multipliziert, indem man die Zahl (7) mit einem Faktor (4) und das erhaltene Produkt (28) noch mit dem andern Faktor (10) multipliziert:

$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc)$, also
$40 \cdot 7 = (4 \cdot 7) \cdot 10 = 28 \cdot 10 = 280$
$60 \cdot 8 = (6 \cdot 8) \cdot 10 = 48 \cdot 10 = 480$

Nichts einfacher als das und doch so wenig empfohlen! Viele Methodiker schlagen vor, das Zehnereinmaleins wie das kleine durch Additionsreihen gleicher Summanden einzuüben, die Aufgabe $40 \cdot 3$ also zu lösen durch $40 + 40 + 40 = 120$. Gewiss ist ein Produkt die Summe gleicher Summanden, und es entspricht dieser Weg dem Wesen der Multiplikation. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Schüler kurze Reihen zu überblicken vermag, längere aber nicht mehr. Der Additionsweg mag zur Einführung anschaulich sein, zur wünschbaren Sicherheit führt er wohl kaum. Wieder andere Lernbücher empfehlen die Lösung:

$40 \cdot 7 = 4$ Zehner $\cdot\, 7 = 28$ Zehner $= 280$ Einer.

Hier liegt ein Operieren nach Stellenwerten vor, mehr oder weniger ein schriftliches Verfahren ins Kopfrechnen übertragen. Das Zahlengesetz dagegen macht ganz einfach von der Möglichkeit Gebrauch, die uns unser herrliches Zehnersystem einräumt, eine Zahlenoperation höherer Ordnungen auf solche der Einer zurückzuführen. Wer hätte es nicht schon erlebt, dass aufgeweckte Schüler freudig meldeten: «Man muss nur noch eine Null dahintersetzen!» Zur Mechanisierung dieses Verfahrens dient das Nebeneinanderüben des Einer- und Zehnereinmaleins: Nenne Aufgaben des kleinen Einmaleins und daneben die zugehörigen des Zehnereinmaleins:

$4 \cdot 7 = 28 \qquad 40 \cdot 7 = 280$
$6 \cdot 8 = 48 \qquad 60 \cdot 8 = 480$

Ebenso üben wir das Einer- und Hunderter-, das Einer- und Tausendereinmaleins nebeneinander:

$4 \cdot 7 = 28 \qquad 400 \cdot 7 = 2\,800$
$4 \cdot 7 = 28 \qquad 4000 \cdot 7 = 28\,000$

Eine noch weitergehende Abkürzung wäre:

$60 \cdot 8 = \;?$
$6 \cdot 8 = 48 \rightarrow$ Null dahinter $= 480!$

2. Beispiel: Wir üben im Kopfrechnen Aufgaben wie: $17 \cdot 30 = \;?$ und finden als Lösungen:

$17 \cdot 30 = (17 \cdot 3) \cdot 10 = 51 \cdot 10 = 510$
$17 \cdot 30 = (17 \cdot 10) \cdot 3 = 170 \cdot 3 = 510$
$17 \cdot 30 = (10 \cdot 30) + (7 \cdot 30) = 300 + 210 = 510$

Welche Lösung verdient den Vorzug? Bekanntlich sind im Kopfrechnen alle Schleichwege erlaubt, wenn nur das richtige Resultat gefunden wird. Im Blick auf mittlere und schwache Schüler ist aber doch ein Normalweg besonders einzuüben. Meine Schüler entschieden sich geschlossen für die 1. Lösung, sie sei einfach, die 2. weniger gut und die 3. kompliziert! Ich freute mich nicht wenig, als ich bei den Zahlengesetzen Übereinstimmung mit den jungen Rechnern fand. Sie reihen die Aufgabe $17 \cdot 30$ unter dem Satz ein: Eine Zahl (17) wird mit einem Produkt ($30 = 3 \cdot 10$) multipliziert, indem man sie mit einem Faktor und das erhaltene Produkt noch mit dem andern Faktor multipliziert:

$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c = (ac) \cdot b$, also
$17 \cdot 30 = (17 \cdot 3) \cdot 10 = 51 \cdot 10 = 510$ oder
$17 \cdot 30 = (17 \cdot 10) \cdot 3 = 170 \cdot 3 = 510$

Ob erst mit 3 oder 10 malgenommen werden soll, muss der Einzelfall entscheiden, z. B. $1{,}7 \cdot 30$ löst sich leichter mit $(1{,}7 \cdot 10) \cdot 3 = 17 \cdot 3 = 51$. Über die Wahl der Faktoren lässt das Zahlengesetz Freiheit, nicht aber darüber, dass die passive Zahl (17) als Summe aufgefasst und demnach in Summanden ($10 + 7$) zerlegt malgenommen wird, denn die Zahlengesetze tragen eine Operation wenn immer möglich schrittweise von der aktiven Zahl (30) aus an die passive (17) heran. Die Lösung $17 \cdot 30 = (10 \cdot 30) + (7 \cdot 30) = 300 + 210 = 510$ soll also nur als Schleichweg erlaubt sein. Wir sehen: Die Zahlengesetze erweisen sich als unsere zuverlässigen Berater für naturgemässe Lösungen.

3. Beispiel: Die aktive Zahl einer Rechenaufgabe: Hans Hug fährt mit seinem Motorrad um 10.15 Uhr von seinem Wohnort ab, um nach dem 98 km entfernten Zürich zu gelangen. In Baden macht er 40 Minuten Aufenthalt, und in Dietikon braucht er eine Viertelstunde, um eine Panne zu beheben. Wann ist er in Zürich, wenn er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 56 km in der Stunde fährt? — Als ich diese Prüfungsaufgabe für die Aufnahme in die Sekundarschule der Stadt Zürich vom Frühjahr 1950 einer neuen 6. Klasse vorlegte, meinte eine Schülerin: «Ich verstehe die Aufgabe nicht!» Auf meine Frage aber: «Was bedeuten denn die 56 km?» war die Nebeldecke sofort behoben, und die Rechnerin löste Schritt um Schritt bis zur Ankunftszeit in Zürich. Sie hatte die Beziehung der 56 km zu den 98 km erkannt, gemerkt, dass letztere mit den 56 km gemessen werden müssen,

mit andern Worten: sie hatte die aktive Zahl der Aufgabe erfasst. «Die aktive Zahl einer Rechenaufgabe erkennen, heisst diese halb lösen», hatte unser Mathematiklehrer im Seminar gesagt, und ich bin ihm noch heute dafür dankbar, dass er uns den Blick dafür schärfte. «Was heisst addieren?» fragte er uns zur Einführung in die Zahlengesetze, was wir ehemalige Drittklass-Sekundarschüler verblüfft mit: «Doch 2 Zahlen zusammenzählen!» beantworteten. «Ja», fuhr unser Lehrer fort, «ist es aber wirklich dasselbe, ob ich diesen Tisch da für 250 Franken und den Stuhl dazu für 70 Franken kaufe oder einen Tisch für 70 Franken und einen Stuhl für 250 Franken?» Nochmals verblüfft, mussten wir zugeben, dass beide Einkäufe zwar für das Portemonnaie dasselbe bedeuten, in Wirklichkeit aber zwei Paar Schuhe seien! «Also», gab uns der Mathematiker mit, «wollen wir lieber sagen: Addieren heisst, zu einer gegebenen Zahl, der passiven, eine zweite, die aktive, zuzählen. Wohl können Summanden und Faktoren vertauscht werden, doch sollte der Volksschullehrer im Interesse der Erziehung zum klaren Denken, die aktive und passive Zahl einer Rechenoperation nicht durcheinander werfen.»

4. Unsere Berater, die arithmetischen Sätze für die Rechenfälle der Volksschule, stellen sich in 4 Gruppen vor:

A. Die *passive* Zahl ist eine Summe.

1. Zu einer Summe wird eine Zahl *addiert*, indem man sie zu dem einen Summanden addiert und zur erhaltenen Summe noch den andern:

$36 + 2 = (30 + 6) + 2 = 30 + (6 + 2) = 30 + 8 = 38$
$36 + 20 = (30 + 6) + 20 = (30 + 20) + 6 = 50 + 6 = 56$
$(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$

2. Von einer Summe wird eine Zahl *subtrahiert*, indem man sie von einem Summanden subtrahiert und zur erhaltenen Differenz den andern Summanden addiert:

$36 - 2 = (30 + 6) - 2 = 30 + (6 - 2) = 30 + 4 = 34$
$36 - 20 = (30 + 6) - 20 = (30 - 20) + 6 = 10 + 6 = 16$
$$(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b$$

3. Eine Summe wird mit einer Zahl *multipliziert*, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die Produkte addiert:

$36 \cdot 2 = (30 + 6) \cdot 2 = (30 \cdot 2) + (6 \cdot 2) = 60 + 12 = 72$
$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

4. Eine Summe wird durch eine Zahl *dividiert*, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert:

$72:3 = (60 + 12):3 = (60:3) + (12:3) = 20 + 4 = 24$
$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$

B. Die *aktive* Zahl ist eine Summe.

5. Eine Summe wird zu einer Zahl *addiert*, indem man zu der Zahl den einen Summanden addiert und zur erhaltenen Summe den andern Summanden:

$53 + 26 = 53 + (20 + 6) = (53 + 20) + 6 = 73 + 6 = 79$
$8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

6. Eine Summe wird von einer Zahl *subtrahiert*, indem man von der Zahl den einen Summanden subtrahiert und von der erhaltenen Differenz noch den andern Summanden:

$23 - 7 = 23 - (3 + 4) = (23 - 3) - 4 = 20 - 4 = 16$
$58 - 23 = 56 - (20 + 3) = (58 - 20) - 3 = 38 - 3 = 35$
$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

7. Eine Zahl wird mit einer Summe *multipliziert*, indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliziert und die Produkte addiert:

$58 \cdot 23 = 58 \cdot (20 + 3) = (58 \cdot 20) + (58 \cdot 3) = 1160 + 174 = 1334$
$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

8. Wie wird eine Zahl durch eine Summe *dividiert*? Hier liegt keine glatte Regel vor, sondern ein *Verfahren:* Man muss schätzen!

1334 : 23 = ? Man lehnt die Division durch 23 an die mit 20 an und schätzt! Nur grössere oder kleinere Geschicklichkeit hierin führt rascher oder langsamer zum Ziel.

$$\begin{array}{l} 1334 : 23 = 50 + 8 = 58 \\ 1150 \\ \;\,184 \\ \;\,184 \\ \quad\;\; 0 \end{array}$$

C. Die *passive* Zahl ist ein Produkt.

9. Ein Produkt wird mit einer Zahl *multipliziert*, indem man den einen Faktor desselben mit der Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt noch mit dem andern:

$800 \cdot 3 = (100 \cdot 8) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot 100 = 24 \cdot 100 = 2400$
$800 \cdot 10 = (100 \cdot 8) \cdot 10 = (100 \cdot 10) \cdot 8 = 1000 \cdot 8 = 8000$
$$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc)$$

10. Ein Produkt wird durch eine Zahl *dividiert*, indem man den einen Faktor desselben durch die Zahl teilt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert:

$1600 : 4 = (16 \cdot 100) : 4 = (16 : 4) \cdot 100 = 4 \cdot 100 = 400$
$$(ab) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$

D. Die *aktive* Zahl ist ein Produkt.

11. Eine Zahl wird mit einem Produkt *multipliziert*, indem man die Zahl mit einem Faktor desselben multipliziert und das erhaltene Produkt noch mit dem andern Faktor:

$28 \cdot 300 = 28 \cdot (100 \cdot 3) = (28 \cdot 3) \cdot 100 = 84 \cdot 100 = 8400$
$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$$

12. Eine Zahl wird durch ein Produkt *dividiert*, indem man die Zahl durch den einen Faktor dividiert und den erhaltenen Quotienten noch durch den andern Faktor des Produkts:

$28000 : 70 = 28000 : (7 \cdot 10) = (28000 : 7) : 10 = 4000 : 10 = 400$

E. Rudolf, Esslingen

Das Lernen ist ein Denkenlernen; und von der Seite der Verstandesbildung her betrachtet, ist Erziehung die Bildung sorgfältiger und gründlicher Denkgewohnheiten

JOHN DEWEY

Divisionsverfahren mit Anwendung der Reihen

H. Biedermann und H. Boller, Leitfaden des kaufmännischen Rechnens, II. Teil, 3. Auflage 1923, zeigen Seite 2 und 3 (und ebenso I. Teil, 15. Auflage 1949, S. 11 und 12) ein Divisionsverfahren mit Anwendung der Reihen. Die Anleitung lautet: «Wenn der Divisor (Nenner) nahe bei einer Rangzahl liegt, so kann die Division dadurch vereinfacht werden, dass man den Dividend (Zähler) zuerst durch die Rangzahl teilt und hierauf zu kleine Ergebnisse durch sukzessive Zuschläge, zu grosse durch abwechselnde Abzüge und Zuschläge korrigiert. Der Korrekturfaktor wird gefunden, indem man die Differenz (d) zwischen Nenner und Rangzahl (R) durch letztere teilt.»

Die Autoren zeigen, dass sich das Verfahren mit Vorteil anwenden lässt bei der Umrechnung metrischer Gewichte in englische und amerikanische, sowie bei derjenigen von Franken in Pfund und Dollar, ferner bei Prozent- und Zinsrechnungen *im* und *auf* Hundert (Beispiele: Bruttoverkaufspreis, Ankaufspreis, Wechselsumme, ursprüngliches Kapital).

Das beschriebene Verfahren scheint uns von allgemeinem Interesse zu sein, weshalb wir hier besonders darauf aufmerksam machen möchten. Gleichzeitig erachten wir es aber als notwendig, zu zeigen, welcher Zusammenhang zwischen diesem Divisionsverfahren und den Reihen besteht.

Die angeführten Divisionen lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

1. Gruppe: Divisor um wenige Einheiten *grösser* als eine Rangzahl;

2. Gruppe: Divisor um wenige Einheiten *kleiner* als eine Rangzahl.

Divisionen der ersten Gruppe zeichnen sich dadurch aus, dass immer kleinere Beträge addiert, diejenigen der zweiten Gruppe dadurch, dass abwechslungsweise Beträge (Korrekturen) subtrahiert und addiert werden müssen. Diese «Korrekturen» werden erst verständlich, wenn man die dem Verfahren zugrunde liegenden *Reihen* kennt.

I. Divisionen der ersten Gruppe (Beispiel: $5667 : 97 = 5667 : [100 - 3]$) lassen sich (für den Dividend 1) auf den allgemeinen Ausdruck $\frac{1}{1-a} : 100$ zurückführen.

II. Divisionen der zweiten Gruppe (Beispiel: $5667 : 103 = 5667 : [100 + 3]$) lassen sich (für den Dividend 1) auf den allgemeinen Ausdruck $\frac{1}{1+a} : 100$ zurückführen.

III. Spezialfälle (darunter verstehen wir Brüche, wie sie bei Prozent- und Zinsrechnungen im und auf Hundert erhalten werden):

A. Im Hundert:

$$\text{Beispiel: } \frac{5667 \cdot 100}{97} = \frac{5667 \cdot 100}{100 - 3}$$

Dieser Bruch entspricht einer Division der ersten Gruppe. Der Faktor 100 (Rangzahl) im Zähler hebt die nachfolgende Division (I) durch die Rangzahl auf.

Folgerung: Derartige Brüche lassen sich direkt auf den Ausdruck $\frac{1}{1-a}$ zurückführen.

B. Auf Hundert:

$$\text{Beispiel: } \frac{5667 \cdot 100}{103} = \frac{5667 \cdot 100}{100 + 3}$$

Folgerung: Derartige Brüche lassen sich direkt auf den Ausdruck $\frac{1}{1+a}$ zurückführen.

Damit haben wir gezeigt, dass die in Frage kommenden *Divisionen* sich auf die Ausdrücke $\frac{1}{1-a}$: Rangzahl und $\frac{1}{1+a}$: Rangzahl zurückführen lassen, die *Brüche* dagegen auf die Ausdrücke $\frac{1}{1-a}$ und $\frac{1}{1+a}$.

Reihenentwicklung: Die Brüche $\frac{1}{1-a}$ und $\frac{1}{1+a}$ können durch eine einfache algebraische Division in *geometrische* Reihen entwickelt werden, welche die Grundlage des zu erläuternden Verfahrens bilden.

Für den Bruch $\frac{1}{1-a}$ erhalten wir die Reihe:

$$1 : (1 - a) = \underline{1 + a + a^2 + a^3 + \ldots}$$

Für den Bruch $\frac{1}{1+a}$ erhält man entsprechend die Reihe:

$$1 : (1 + a) = \underline{1 - a + a^2 - a^3 + \ldots}$$

Die *Form* dieser Reihen zeigt nun, warum bei Divisionen der ersten Gruppe «Korrekturen» addiert und weshalb sie bei Divisionen der zweiten Gruppe abwechslungsweise subtrahiert und addiert werden müssen. Da es sich um fallende geometrische Reihen handelt, ist der Wert des nächstfolgenden Gliedes immer um ein gleiches Vielfaches kleiner. Besonders bequem lassen sich die Glieder berechnen, wenn der Faktor $q = {}^1/_{100}$, ${}^1/_{1000}$, . . . oder ein Vielfaches, ${}^3/_{100}$, ${}^7/_{1000}$, . . . ist.

Man merke sich:

a) Bei Divisionen von der Form $\frac{1}{1-a}$: Rangzahl und $\frac{1}{1+a}$: Rangzahl (I und II) sind alle Glieder der Reihe durch die Rangzahl zu dividieren.

b) Bei Brüchen, wie sie sich bei Prozent- und Zinsrechnungen *im* und *auf* Hundert ergeben (III: A und B), besitzen die Glieder der Reihe ihren vollen Wert.

Zahlenbeispiele:

A. *Division:* $\frac{1}{1-a}$: Rangzahl (5667 : 97)

1. Wir rechnen mit dem Dividend 1, dann lautet die Division:

$$1 : 97 = \frac{1}{97} = \frac{1}{100 - 3} = \frac{1 : 100}{1 - {}^3/_{100}} = \frac{1}{1 - {}^3/_{100}} : 100$$

$$\left(\frac{1}{1 - {}^3/_{100}} \text{ entspricht } \frac{1}{1-a}\right)$$

In eine Reihe entwickelt ergibt der Bruch:

$$\frac{1}{1 - {}^3/_{100}} = 1 + {}^3/_{100} + ({}^3/_{100})^2 + ({}^3/_{100})^3 + \ldots$$

2. Für den Dividend 5667 erhält man (unter Berücksichtigung von $\frac{1}{1-a} : 100$) $\frac{5667}{1 - {}^3/_{100}} = 56{,}67 + 56{,}67 \cdot {}^3/_{100} + 56{,}67 \cdot ({}^3/_{100})^2 + \ldots$ (wobei ${}^3/_{100} = q$).

B. *Bruch:* $\frac{1}{1-a}$ $\left(\frac{5667 \cdot 100}{97}\right)$

Bei Brüchen von der Form $\frac{5667 \cdot 100}{97}$ braucht die Reihe nicht durch eine Rangzahl dividiert zu werden, weil für den Dividend 1 der Ausdruck: $\frac{1 \cdot 100}{97} = \frac{100}{100-3} = \frac{1}{1-{}^3/_{100}}$ ergibt, also $\frac{1}{1-a}$ entspricht.

Die Reihe lautet daher folgendermassen:

$\frac{5667 \cdot 100}{97} = 5667 + 5667 \cdot {}^3/_{100} + 5667 \cdot ({}^3/_{100})^2 + \ldots$ (wobei ${}^3/_{100} = q$).

Primär liegt der Bruch $\frac{1}{1-a}$ und sekundär die daraus durch Division erhaltene Reihe auch dem Lösungsverfahren zur Berechnung der Wechselsumme zugrunde, das Umiker in seiner Aufgabensammlung für Sekundar- und Bezirksschulen, II. Teil, 2. Auflage, Seite 133, angibt. Die verschiedenen Zinse sind Glieder einer fallenden geometrischen Reihe*). Die Voraussetzung zur Reihenentwicklung ist eine Zinsrechnung im Hundert (= Dreisatz und damit ein Bruch von der Form $\frac{1}{1-a}$). Gegeben sind: Barwert (weniger als 100%), Diskontsatz = 4% und Zeit = 80 Tage. Gesucht ist die Wechselsumme = 100%.

Lösung: (Dreisatz)

Zins à 4% für 80 Tage = ${}^8/_9$% der Wechselsumme (= 100%)

Barwert = 100% − ${}^8/_9$% = $99^1/_9$%

1%

Wechselsumme = 100%

$\frac{32500 \cdot 100}{99\,{}^1/_9}$ = Fr. 32791,479

Der Wert dieses Bruches kann auf drei Arten berechnet werden:

1. Gewöhnlich, als Division;
2. Division mit Anwendung der Reihen (Umiker);
3. Reihenentwicklung und Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe*).

Die Reihenentwicklung für den obigen Bruch lautet:

a) Für den Barwert 1:

$= \frac{1 \cdot 100}{99^1/_9} = \frac{100}{100 - {}^8/_9} = \frac{1}{1 - {}^8/_{900}}$ (entspricht $\frac{1}{1-a}$)

Reihe: $= 1 + {}^8/_{900} + ({}^8/_{900})^2 + ({}^8/_{900})^3 + \ldots$

b) Für den Barwert Fr. 32500:

$= 32500 + \frac{32500 \cdot 8}{900} + \frac{32500 \cdot 8}{900} \cdot \frac{8}{900} + \ldots$

Da ${}^8/_{900} \equiv \frac{4 \cdot 80}{100 \cdot 360}$ erhalten wir beim Einsetzen in die Reihe wiederum die Glieder der Berechnung von Umiker*):

$$\text{Wechselsumme} = 32500 + \frac{32500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360} + \left(\frac{32500 \cdot 4 \cdot 80}{100 \cdot 360}\right) \cdot \frac{4 \cdot 80}{100 \cdot 360} + \ldots$$

Damit ist gezeigt, dass der Bruch $\frac{1}{1-a}$ auch der besprochenen Berechnung der Wechselsumme zugrunde liegt.

Dr. *W. Moser*, Solothurn

*) Moser, SLZ Nrn. 14/15, 1950.

«Minus mal minus gleich plus»

Bekanntlich hat diese Beziehung einen gewissen mystischen Beigeschmack. Er geht zu Lasten von Begründungen, welche die Meinung aufkommen lassen, es gehe da nicht ganz mit rechten Dingen zu. Um das Produkt $(-5) \cdot (-4)$ auszurechnen, wird z. B. oft $(0-5) \cdot (0-4)$ nach der Formel $(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d = ac - bc - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd$ umgeformt, dabei aber «vergessen», dass ihre Herleitung an die Voraussetzungen $a > b$ und $c > d$ geknüpft war. Denselben Denkfehler begeht man beim «Beweis» der Beziehung $4 - (-7) = 4 + 7$, falls man im Ausdruck $4 - (0 - 7)$ die Klammer auf Grund der Formel $a - (b - c) = a - b + c$ löst, dabei aber nicht beachtet, dass sie zunächst nur gilt, wenn $b > c$ und $a > (b - c)$ ist. F. Klein schreibt hiezu in seinem bekannten Buche über Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus (Springer 1924): «Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, keine Versuche zum *Erschleichen unmöglicher Beweise* zu machen.»

Nicht erst das Rechnen mit den negativen Zahlen, sondern schon ihre *Einführung* bereitet Schwierigkeiten. Da heisst es z. B. die Differenz von 0 und 5 sei die neue, negative Zahl $0 - 5$, oder kürzer -5. M. Simon (Methodik der elementaren Arithmetik, Teubner 1906) sagt dazu: «So leicht scheinbar dieser rein formale Standpunkt ist . . . der Schüler hat immer das Gefühl dabei, dass etwas faul im Staate Dänemark. Und das Gefühl täuscht ihn auch nicht, denn sind die negativen Zahlen wirklich Zahlen, so muss unter sie etwas Abzählbares fallen . . .». Auch kritische Mathematiker lehnten diese «formalen» Differenzen je und je ab, und erst das späte 19. Jahrhundert brachte eine einwandfreie, natürliche Erklärung der negativen Zahlen. *Der einführende Algebraunterricht soll nicht mit denselben belastet werden*, da sie nun einfach einmal ein gewisses Abstraktionsvermögen verlangen und zunächst auch nicht viel nützen.

Suchen wir jetzt für die spätere Behandlung guten Rat, so weist nach meinen Erfahrungen das Vorgehen der Primarschule bei der Einführung des Rechnens mit den natürlichen und den gebrochenen Zahlen einen gangbaren Weg. Man fängt dort nicht mit der «Zahl 3» an, sondern mit 3 Äpfeln, 3 Buben, 3 aufeinanderfolgenden gleichen Tätigkeiten und abstrahiert daraus die reine Zahl 3 in ihrer anschaulichen Bedeutung als Eigenschaft einer Menge. Man fügt zusammen, nimmt weg, wiederholt gleiche Operationen, erzeugt gleiche Bruchstücke von Stäben und runden Kuchen und führt zur Abkürzung Zeichen oder Symbole ein. Entsprechend sind nun die negativen Zahlen und das Rechnen mit ihnen einzuführen. W. Lietzmann (Methodik des mathematischen Unterrichts, Leipzig 1923) schreibt: «Wie sich der Schüler die Welt der abstrakten natürlichen Zahlen angewandt und vielfach innig verbunden denkt mit der Welt der realen Wirklichkeit, so will er auch mit den neuen Zahlbegriffen Dinge aus der Wirklichkeit in Verbindung bringen . . . die Operationen irgendwie deuten . . . ist nicht mit dem Symbol zufrieden; er will damit konkrete Vorstellungen verknüpfen.»

Erzeugt ein Motor eine Zugkraft von 1000 kg, so kommt es darauf an, ob sie nach vorwärts oder nach rückwärts zieht. Schauen wir nicht einfach darauf, wie gross die Kraft ist, ohne Berücksichtigung ihrer Richtung, als «absolute» Grösse, so sind die beiden Kräfte durchaus *verschieden*. Wir wollen sagen, die eine sei $K_1 = \overrightarrow{1000}$ kg, die andere $K_2 = \overleftarrow{1000}$ kg, nennen den Pfeil ihr *Richtungs-*, *Qualitäts- oder Vorzeichen* und die 1000 kg ihren *absoluten Betrag* $|K_1|$ bzw. $|K_2|$. Statt zu sagen, ich habe 100 Fr. Guthaben oder 100 Fr. Schulden, sage ich, ich habe $\overrightarrow{100}$ Fr. bzw. $\overleftarrow{100}$ Fr. (oder umgekehrt). Wärme und Kälte, entgegengesetzte Verschiebungen, Drehungen, Stromstärken, Geschwindigkeiten, Abstände von einem Fixpunkt, können ebenso unterschieden werden. Allgemein muss ein System von Dingen vorliegen, die einen sie zerstörenden Gegensatz besitzen (Loewy: Grundlagen der Arithmetik, Leipzig 1915). Wir machen also aus jeder bisherigen «*absoluten Zahl*» deren zwei. Indem wir sie «in bezug auf» oder relativ zu ihrer Richtung betrachten, erhalten wir neue Dinge, die gerichteten oder «*relativen Zahlen*». $\overleftarrow{10}$ und $\overrightarrow{10}$ heissen *entgegengesetzte Zahlen* (gleicher absoluter Betrag aber verschiedene Vorzeichen!).

Einwände: Man kann fragen, wie es denn nun mit den andern möglichen Richtungen einer Kraft, eines Abstandes usw. sei. Die Antwort ist, dass diese Fälle auf die imaginären und komplexen Zahlen führen. Warum schreibt er denn nicht $+1000$ kg und -1000 kg, wie es üblich ist? Lietzmann sagt: «Die Einführung der negativen Zahlen wird durch eine *lächerliche Äusserlichkeit* gewaltig erschwert. Wir bezeichnen sie dadurch, dass wir ihnen das Operationszeichen der Subtraktion vorsetzen. *Das Zeichen — ist also zweideutig!* Gewiss ist diese Wahl zweckmässig, wenn man erst zu der Erkenntnis durchgedrungen ist, dass es gleichgültig ist, die Zahl a zu subtrahieren oder die entgegengesetzte Zahl $-a$ zu addieren, oder dass ein Operieren mit der Zahl $-a$ einem Operieren mit der Differenz $0-a$ gleichkommt. Aber das soll erst noch kommen.» Die alten Inder, die Erfinder der negativen Zahlen, schrieben $\dot{1}0$ statt -10, andere 10'. Auch anders geschriebene Plus- und Minuszeichen kommen vor. Loewy (zit.) und Mohrmann (Bardeys Aufgabensammlung, 11. Aufl., Teubner 1923) schreiben $\overleftarrow{10}$. Die berechtigte Frage, ob man überhaupt das Recht habe, diese neuartigen Dinge $\overleftarrow{10}$, $\overrightarrow{10}$ usw. «Zahlen» zu nennen, beantwortet man mit dem Nachweis, dass man mit ihnen rechnen kann, wie üblich.

Eine wesentliche Schwierigkeit bei der *Einführung der Operationen mit den neuen Zahlen* besteht darin, dass der Schüler infolge der jahrelangen Automatisierung des Rechnens meint, es sei an sich selbstverständlich, was das heisse, zwei Zahlen zu addieren usw. Er kann sich nicht mehr in die Lage des ABC-Schützen versetzen, dem man etwa sagte, er solle aus zwei Haufen von 5 und 3 Nüssen einen machen, und feststellen, wie viele Nüsse er enthalte: Das nenne man 5 und 3 zusammenzählen! Genau so ist zuerst zu zeigen, wie man auch aus zwei «gerichteten Zahlen» stets eindeutig eine dritte, *ihre Summe* gewinnen kann. Wirken auf einen Körper die Kräfte 170 kg nach oben ($\overrightarrow{170}$ kg) und 80 kg nach unten ($\overleftarrow{80}$ kg), so beträgt die gesamte wirksame Kraft $\overrightarrow{170}$ kg $+ \overleftarrow{80}$ kg, oder ausgerechnet $\overrightarrow{90}$ kg, wie anschaulich leicht einzusehen ist. Drehe ich den Uhrzeiger zuerst um 17' vorwärts, dann um 29' zurück, so ist die totale Drehung $\overrightarrow{17'} + \overleftarrow{29'} = \overleftarrow{12'}$. Ebenso kann man geradlinige Verschiebungen (Vektoren auf einer Geraden) herausziehen. Stehen in einer Buchhaltung zwei Posten von 110 Fr. Schulden und 40 Fr. Schulden, so ergibt sich als «Gesamtvermögen» beim Abschluss $\overleftarrow{110}$ Fr. $+ \overleftarrow{40}$ Fr. $= \overleftarrow{150}$ Fr. Aus einer genügenden Zahl solcher Beispiele lässt sich leicht die *Additionsregel* abstrahieren: Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen addiert man, indem man ihre absoluten Beträge addiert und das Vorzeichen der Summanden beibehält, zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen, indem man den kleinern absoluten Betrag vom grössern subtrahiert und als Vorzeichen dasjenige der Zahl mit dem grössern absoluten Betrag wählt. An Beispielen ist auch leicht zu zeigen, dass *die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen stets gleich* 0 ist (die Kraft 0 kg bedeutet, es wirkt *keine* Kraft! Lat. nullus = keiner). Etwas schwieriger ist die *Subtraktion* «*gerichteter Zahlen*». 3 Äpfel von 8 Äpfeln subtrahieren hiess feststellen, wie viele übrig bleiben, wenn man von 8 Äpfeln deren 3 wegnimmt, oder: wie viele muss ich zu einem Haufen von 3 dazulegen, damit er 8 enthält? Die Bilanz einer Buchhaltung mit zwei Posten ergab 70 Fr. Guthaben ($\overrightarrow{70}$ Fr.). Der erste Posten beträgt 100 Fr. Guthaben ($\overrightarrow{100}$ Fr.). Wie gross ist der zweite? (Oder: Dieser erste Posten wird gestrichen. Was bleibt übrig?) Dann ist die Differenz $\overrightarrow{70}$ Fr. $- \overrightarrow{100}$ Fr. $= \overleftarrow{30}$ Fr. (Probe: $\overleftarrow{30}$ Fr. $+ \overrightarrow{100}$ Fr. $= \overrightarrow{70}$ Fr.!) Die «Resultierende» zweier in derselben Geraden wirkenden Kräfte beträgt $\overleftarrow{40}$ kg. Wie gross ist die zweite, wenn die erste $\overrightarrow{90}$ kg ist? Lösung: $\overleftarrow{40}$ kg $- \overrightarrow{90}$ kg $= \overleftarrow{130}$ kg (Probe: $\overleftarrow{130}$ kg $+ \overrightarrow{90}$ kg $= \overleftarrow{40}$ kg). Welche Temperaturänderung ergibt zusammen mit einer Abnahme um 14° eine Zunahme von 29°? Antwort: $\overrightarrow{29^\circ} - \overleftarrow{14^\circ} = \overrightarrow{43^\circ}$ (Probe: $\overrightarrow{43^\circ} + \overleftarrow{14^\circ} = \overrightarrow{29^\circ}$). Wieder ergibt sich eine Regel: Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man ihre entgegengesetzte addiert. Wesentlich ist jedoch, dass, wie man sieht, *die Subtraktion zweier relativen Zahlen stets ausführbar* ist. Insbesondere lässt sich jede Zahl von 0 subtrahieren!

$$0 \text{ Fr.} - \overleftarrow{8} \text{ Fr.} = \overrightarrow{8} \text{ Fr.} \qquad \text{allgemein} \quad 0 - \overleftarrow{a} = \overrightarrow{a}$$

$$0 \text{ Fr.} - \overrightarrow{8} \text{ Fr.} = \overleftarrow{8} \text{ Fr.} \qquad \text{allgemein} \quad 0 - \overrightarrow{a} = \overleftarrow{a}$$

Es lässt sich jetzt zeigen, was aber in der Schule mit Recht gewöhnlich übergangen wird, dass für diese Addition und Subtraktion der relativen Zahlen die gleichen Gesetze gelten wie für die bisherigen absoluten Zahlen (Klammern setzen und lösen, ausrechnen eines zwei- oder mehrgliedrigen Ausdrucks in beliebiger Reihenfolge) und, dass das nur dann so ist, wenn die beiden Operationen gemäss den angegebenen Regeln erklärt sind (*Satz von der Permanenz der Rechengesetze*, Hankel 1867). Interessierte Kollegen seien hingewiesen auf: E. Landau, Grundlagen der Analysis, New-York 1946; ferner auf R. Nevanlinna, Leitende Gesichtspunkte in der Entwicklung der Mathematik, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich, Heft 1, 1950.

Und nun *die übliche Bezeichnung der relativen Zahlen!* Die Symbolik ist immer sekundär. Wie gezeigt wurde, ist $\overleftarrow{a} = 0 - \overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{a} = 0 - \overleftarrow{a}$, oder: Die zu einer beliebigen relativen Zahl A entgegengesetzte ist $0 - A$. Bezeichnungen oder *individuelle Zahlzeichen* A sind deshalb nur für die Zahlen der einen Richtung nötig, etwa für alle Guthaben, für alle Kräfte nach oben, alle Abstände nach rechts usw. Die Zahlen der andern Richtung können dann durch die Differenzen $0 - A$ bezeichnet oder dargestellt werden. Als individuelle Zeichen für die Zahlen der «einen Richtung» wählt man zweckmässig ihre absoluten Beträge 1, 2, 3, 4 $\cdot\cdot\cdot\cdot$ 3,17; $^5/_6$; z usw. Die zu ihnen entgegengesetzten Zahlen der «andern Richtung» heissen dann $0 - 1$, $0 - 2$, $0 - 3$, $0 - 4 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 0 - 3{,}17$, $0 - {}^5/_6$, $0 - z$ usw. Da die Glieder 0 bei der Ausrechnung eines mehrgliedrigen Ausdrucks bedeutungslos sind, lässt man sie weg, *setzt also fest* $-z$ *bedeute* $0 - z$. (Negative Zahlen: -1, -2, -3 usw.) Will man für die Zahlen der «einen Richtung» Zeichen haben, die sich von den Zeichen für ihre absoluten Beträge unterscheiden, so schreibt man $+1$, $+2$, $+3$, $+4$ usw. ($+z$ bedeute $0 + z = z$, positive Zahlen). Notwendig ist das nicht. Man muss, um diese Festsetzungen betreffend die Bezeichnungen richtig erfassen zu können, erkennen, dass *Zahl und Zahlzeichen zweierlei* ist: Was sich ein Tibetaner beim Zählen *denkt*, ist genau dasselbe wie bei uns, trotz anderer Worte und Zeichen. Diese relativen Zahlen existieren genau so wirklich wie die allgemein üblichen ungerichteten oder absoluten und sind nicht irgendwie künstlich, unnatürlich, imaginär oder absurd. Alle Zahlen sind «freie Schöpfungen unseres Geistes» (Gauss), welche Beziehungen der Aussenwelt umkehrbar eindeutig in unser Bewusstsein abbilden.

Schliesslich noch die *Multiplikation (und Division) der relativen Zahlen!* Ein unzulässiger Beweis der bekannten *Vorzeichenregeln* wurde schon eingangs erwähnt. Grundsätzlich ist festzustellen, dass *man zuerst überhaupt erklären muss, was das heisst, zwei gerichtete Zahlen zu multiplizieren*. Die Division ist dann die Umkehrung. Es liegt derselbe Fall vor wie im Bruchrechnen, wo man $^4/_5$ Fr. $\cdot$ $^3/_7$ auch nicht auf Grund der Erklärung, $^4/_5$ Fr. $\cdot$ 3 bedeute $^4/_5$ Fr. $+$ $^4/_5$ Fr. $+$ $^4/_5$ Fr. ausrechnen kann, und dann die neue Operation so *erklärt*, dass sie den Preis von $^3/_7$ kg zu $^4/_5$ Fr. liefert, genau so wie die Multiplikation mit einer ganzen Zahl den Preis von 3 kg ergab. Es ist methodisch verfehlt, etwas beweisen zu wollen, was zu definieren ist. Die neue Multiplikation gerichteter Zahlen wird erklärt durch den Wunsch, sie solle nicht nur den Betrag, sondern auch die Richtung der gesuchten Grösse liefern. Hier sind gute *Beispiele* notwendig. Lietzmann gibt folgendes Beispiel: «$(+3) \cdot (+5)$ heisst, 5mal werden 3 Schritte nach rechts addiert, das gibt 15 Schritte nach rechts; $(-3) \cdot (+5)$ heisst, 5mal werden 3 Schritte nach links addiert, das gibt 15 Schritte nach links; $(+3) \cdot (-5)$ heisst, 5mal werden 3 Schritte nach rechts subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach links; $(-3) \cdot (-5)$ heisst, 5mal werden 3 Schritte nach links subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach rechts.» Oder: Fährt auf der Strasse ein Auto mit der Geschwindigkeit 20 m/s nach rechts ($= +20$ m/s) oder nach links ($= -20$ m/s) an mir vorbei, so beträgt sein Abstand von mir, nach bezw. vor 10 s ($= +10$ s bzw. -10 s): $+200$ m $= (+20$ m/s$) \cdot (+10$ s$)$; -200 m $= (-20$ m/s$) \cdot (+10$ s$)$; -200 m $= (+20$ m/s$) \cdot (-10$ s$)$; $+200$ m $= (-20$ m/s$) \cdot (-10$ s$)$. Hübsche Beispiele gibt auch L. Locher-Ernst (Arithmetik und Algebra, Archimedesverlag 1945): Ich habe vor einiger Zeit angefangen, jeden Tag 10 Fr. Guthaben bzw. Schulden zu machen und setze dies in die Zukunft fort. Die Berechnung der Vermögensänderung in bezug auf den heutigen Tag nach bzw. vor 5 Tagen gibt 4 Fälle: $(+10$ Fr./Tag$) \cdot (+5$ Tage$) = +50$ Fr.; $(-10$ Fr./Tag$) \cdot (+5$ Tage$) = -50$ Fr.; $(+10$ Fr./Tag$) \cdot (-5$ Tage$) = -50$ Fr.; $(-10$ Fr./Tag$) \cdot (-5$ Tage$) = +50$ Fr. Kehre ich nur die Richtung der an einem Hebel wirkenden Kraft, bzw. nur die Richtung ihres Arms um, so ändert sein Drehsinn, wechsle ich aber beide Richtungen, so bleibt er erhalten. Weniger anschaulich ist folgende Überlegung: Will man die positiven Zahlen durch ihre absoluten Beträge bezeichnen können, so ist die Multiplikation zweier positiven Zahlen so zu erklären, dass keine Widersprüche auftreten; also $(+4) \cdot (+3) = 4 \cdot 3 = 12 = +12$ und $(-4) \cdot (+3) = (-4) \cdot 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12$. Von hier aus führen zwei Wege weiter. Bilde ich ebenso $(-4) \cdot (+2)$; $(-4) \cdot (+1)$; $(-4) \cdot 0$ so erhalte ich der Reihe nach -8; -4; 0. Damit diese Folge im gleichen Sinne weitergeht (graphische Darstellung des Produktes als Funktion des 2. Faktors!), so muss es heissen $(-4) \cdot (-1) = +4$; $(-4) \cdot (-2) = +8$; $(-4) \cdot (-3) = +12$. Lässt man jetzt den 1. Faktor sukzessive die Werte $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$ annehmen, so liefert eine analoge Überlegung $(+4) \cdot (-3) = -12$. Der andere Weg geht von dem Wunsche aus, es solle $(+4) \cdot (-3)$ dieselbe Zahl sein wie $(-3) \cdot (+4) = -12$, mit -3 multiplizieren heisse also, den absoluten Betrag des Multiplikanden mit 3 multiplizieren und das Vorzeichen umkehren; folglich: $(-4) \cdot (-3) = +12$.

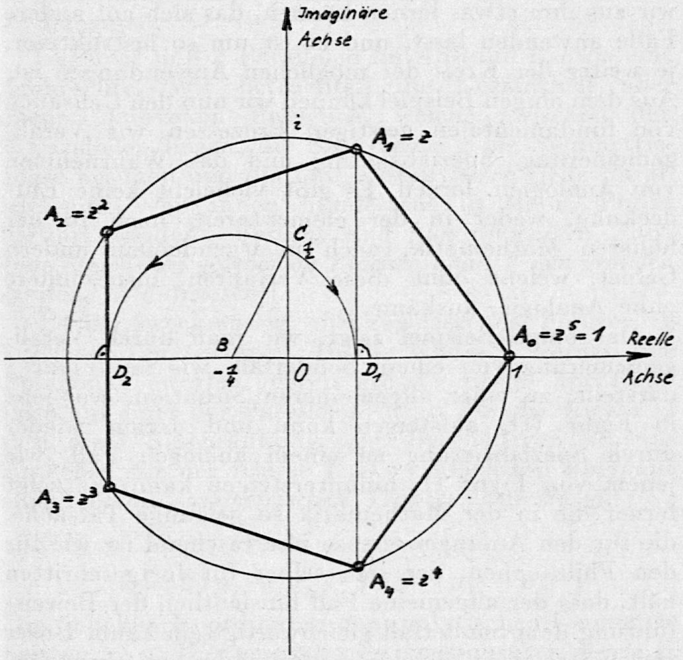
Ebenso wie schon bei den Operationen 1. Stufe bemerkt worden war, lässt sich nun auch hier zeigen, dass alle Gesetze, welche für das Multiplizieren (und Dividieren) der bisherigen absoluten Zahlen gültig waren (Berechnen eines Produkts in beliebiger Reihenfolge, multiplizieren mehrgliedriger Ausdrücke, ausklammern usw.) auch für relative Zahlen und Buchstaben, die solche darstellen, gültig bleiben, falls diese Operationen nach den angegebenen Vorzeichenregeln ausgeführt werden, aber auch nur dann. Damit ist klargelegt, wie sich diese Dinge vom logisch-abstrakten Standpunkt aus verhalten. Alle Vorzeichenregeln bei den Operationen mit den negativen Zahlen sind an sich willkürliche Festsetzungen, welche gestatten, *alle Gesetze über das Rechnen mit absoluten Zahlen weiter zu verwenden.* Da die Subtraktion im Bereiche der relativen Zahlen stets ausführbar ist, *fallen die einschränkenden Nebenbedingungen beim Buchstabenrechnen weg.* (Z. B. dass $a - b + c = a + c - b$ nur unter der Voraussetzung $a > b$ gilt.) Zugleich werden alle Formeln und Berechnungsvorschriften inhaltsreicher, indem sie *auch den Richtungssinn der berechneten Grösse gratis mitliefern und bei den gegebenen Grössen zu berücksichtigen gestatten.* (Soll man z. B. die Mitteltemperatur eines Monats berechnen, so können Kältegrade als negative Zahlen in *dieselbe* Formel $t = 1/n \cdot [t_1 + t_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + t_n]$ eingesetzt werden und ein negatives Ergebnis bedeutet, dass im Durchschnitt Kälte herrschte.) Geht man nochmals die angegebenen Beispiele durch, so erkennt man, dass dieses Ziel uns unwillkürlich als halbbewusstes Motiv bei der Aufstellung der Rechenoperationen mit den relativen Zahlen führte. Dass der ganze Bau überhaupt möglich ist, ist nicht selbstverständlich. Schon bei räumlich verschiedenen Richtungen geht das nicht mehr. Von einer logischen Notwendigkeit (Beweisbarkeit!) der ganzen Begriffsbildungen kann nicht die Rede sein. Die Logik verlangt nur ihre Widerspruchslosigkeit; nur diese ist zu beweisen, und sonst werden sie nur durch Zweckmässigkeitsgrüden bestimmt. Es ist dann für die meisten Menschen Sache der Gewöhnung, welchen Wirklichkeitsgehalt sie ihnen zuschreiben.

Dr. *K. Ott*, Zürich

Eine einfache Konstruktion des regelmässigen Fünfeckes

In der Schule behandelt man gewöhnlich die bekannte Konstruktion von Ptolemäus, die die Seite des Fünfeckes aus dem Umkreisradius liefert. Es gibt aber eine einfache Konstruktion, die den Vorteil hat, gleich alle fünf Eckpunkte zu bestimmen. Zu ihrer Begründung ist allerdings die Kenntnis der komplexen Zahlen nötig. Beizufügen ist, dass auch der Beweis der ersterwähnten Konstruktion nicht sehr einfach ist und auf der Sekundarschulstufe übergangen wird.

Das Vorgehen ist ohne weiteres aus der Figur ersichtlich.



Zum Beweis legen wir die Figur in eine komplexe Zahlenebene und gehen davon aus, dass komplexe Zahlen multipliziert werden, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Soll nun im Einheitskreis ein regelmässiges Fünfeck entstehen, so bedeutet dies, dass die Punkte A_0 und A_5 zusammenfallen müssen, dass also gilt:

$$z^5 = 1$$

oder

$$z^5 - 1 = 0.$$

Da eine Wurzel $z_0 = 1$ ist, folgt nach Abspaltung des dazugehörigen Wurzelfaktors

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Diese symmetrische Gleichung 4. Grades löst man wie üblich, indem man zunächst durch z^2 dividiert

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

und dann setzt

$$z + \frac{1}{z} = w.$$

Daraus folgt

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2.$$

So findet man die vier andern Lösungen der obigen Gleichung:

$$z_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4}(1 \mp \sqrt{5}) \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.$$

Da der Kreis gegeben ist, genügt es, noch den Realteil dieser komplexen Zahlen zu konstruieren.

$$R(z) = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}.$$

Wir machen

$$\overline{OB} = -\frac{1}{4}$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}.$$

Dann ist $\overline{BC} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

und es gilt tatsächlich

$$\overline{OD_1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

und $\overline{OD_2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5},$

womit der Beweis der Richtigkeit der Konstruktion erbracht ist.

E. Roth-Desmeules, Luzern

Verallgemeinerung, Spezialisierung, Analogie

Meiner persönlichen Überzeugung nach muss sowohl bei der Wahl der Probleme als auch bei den darüber gepflegten Auseinandersetzungen im Unterricht vor allem andern darauf geachtet werden, dass sie *instruktiv* sind. Es wird mir im Anschluss an ein Beispiel leichter fallen, den Sinn des Wortes «instruktiv» klar zu machen. Ich verwende als Beispiel den Beweis des wohlbekannten elementar-geometrischen Lehrsatzes von Pythagoras. Der Beweis, den ich kommentieren möchte, ist nicht neu; wir verdanken ihn Euklid selbst (*Elemente* VI, 31).

1. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenmasszahlen a, b und c, wobei a die Masszahl der Hypotenuse sein soll. Wir wünschen zu zeigen, dass

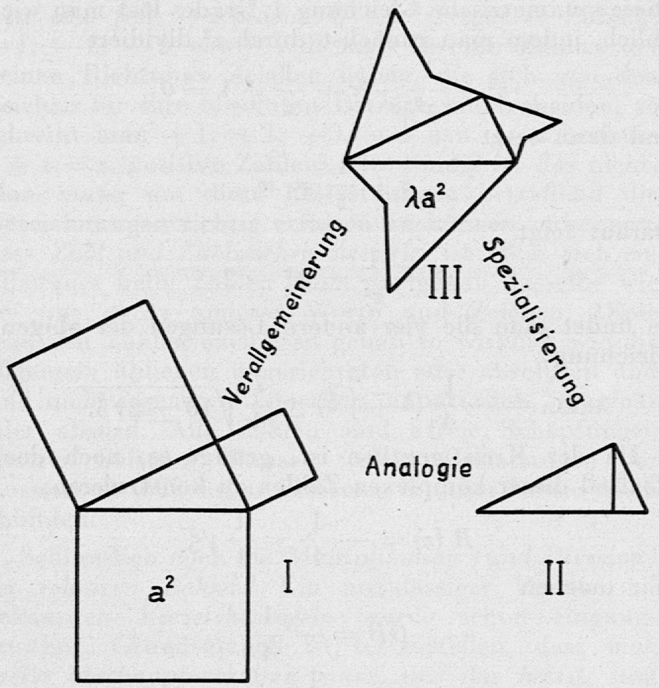
(1) $a^2 = b^2 + c^2.$

Dieses Ziel legt uns nahe, über den drei Seiten unseres rechtwinkligen Dreiecks Quadrate zu errichten. So gelangen wir zum nicht unbekannten Teil I der folgenden zusammengesetzten Figur. (Um den Sachverhalt besser zu erfassen, sollte der Leser die einzelnen Teile dieser Figur selber zeichnen und zwar erst dann, wenn sie in der Besprechung auftreten.)

2. Entdeckungen, selbst sehr bescheidene Entdeckungen, erfordern, dass man etwas merkt, eine gewisse Beziehung erkennt. Wir können den folgenden

Beweis finden, indem wir die *Analogie* zwischen dem bekannten Teil I und dem kaum weniger bekannten Teil II unserer zusammengesetzten Figur wahrnehmen: das gleiche rechtwinklige Dreieck, welches in I auftritt, ist in II durch die auf der Hypotenuse senkrecht stehende Höhe in zwei Teile zerlegt.

3. Vielleicht ist es dem Leser noch nicht gelungen, die Analogie zwischen den Figuren I und II zu erkennen. Diese Analogie kann jedoch ganz deutlich gemacht werden durch eine gemeinsame *Verallgemeinerung* von I und II, welche durch die Figur III zum Ausdruck kommt. Dort finden wir wieder dasselbe rechtwinklige Dreieck, wobei über dessen drei Seiten drei einander ähnliche Vielecke errichtet wurden, welche die Dreieckseiten als homologe Seiten besitzen, im übrigen aber beliebig sind.



4. Der Inhalt des Hypotenusenquadrates in Figur I ist a^2. Der Inhalt des unregelmässigen Vielecks, welches über der Hypotenuse von Figur III gezeichnet ist, kann mit λa^2 bezeichnet werden; dabei bedeutet der Faktor λ den Wert des Verhältnisses der beiden betrachteten Flächen. Nun folgt aber aus der Ähnlichkeit der drei Vielecke, die über den Seiten a, b und c des Dreiecks der Figur III gezeichnet sind, dass ihre Inhalte der Reihe nach gleich λa^2, λb^2 und λc^2 sind.

Soll nun die Gleichung (1) richtig sein (was die Behauptung des Satzes ist, den wir beweisen wollen), so muss auch die folgende Gleichung stimmen:

(2) $$\lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2.$$

Es braucht tatsächlich nur sehr wenig Algebra, um (2) aus (1) herzuleiten. (2) stellt eine *Verallgemeinerung* des ursprünglichen Lehrsatzes von Pythagoras dar: *Errichtet man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks drei einander ähnliche Vielecke, welche die Dreieckseiten als homologe Seiten besitzen, so ist das über der Hypotenuse errichtete Vieleck flächengleich der Summe der beiden andern.*

Es ist instruktiv, festzustellen, dass diese Verallgemeinerung hinsichtlich der Beweisführung *gleichwertig* ist dem Sonderfall, von dem wir ausgingen. Wir können in der Tat die Gleichungen (1) und (2) auseinander hervorgehen lassen durch Multiplizieren bzw. Dividieren mit λ (welches als Wert des Verhältnisses zweier Flächen von Null verschieden ist).

5. Der allgemeine, durch (2) ausgedrückte Lehrsatz ist hinsichtlich der Beweisführung nicht nur dem Sonderfall (1) gleichwertig, sondern jedem andern Sonderfall. Deshalb wäre der allgemeine Fall bewiesen, wenn sich irgendein solcher Sonderfall als unmittelbar einleuchtend erweisen sollte.

Beim Versuch, nun in brauchbarer Weise zu *spezialisieren*, halten wir Umschau nach einem passenden Sonderfall. Figur II stellt einen solchen Fall dar. Das rechtwinklige Dreieck, das über seiner eigenen Hypotenuse errichtet ist, ist ja ähnlich den zwei andern, über den Katheten errichteten Dreiecken, was wohlbekannt und leicht einzusehen ist. Nun ist offensichtlich das ganze Dreieck flächengleich der Summe seiner beiden Bestandteile. Damit ist der Lehrsatz von Pythagoras bewiesen.

6. Ich erlaubte mir, die obige Beweisführung so breit darzustellen, weil sie fast in allen ihren Phasen so eminent instruktiv ist. Ein Fall ist instruktiv, wenn wir aus ihm etwas lernen können, das sich auf andere Fälle anwenden lässt, und er ist um so instruktiver, je weiter der Kreis der möglichen Anwendungen ist. Aus dem obigen Beispiel können wir nun den Gebrauch von fundamentalen geistigen Prozessen, wie Verallgemeinerung, Spezialisierung und das Wahrnehmen von Analogien, lernen. Es gibt vielleicht keine Entdeckung, weder in der elementaren, noch in der höheren Mathematik, noch in irgendeinem andern Gebiet, welche ohne diese Verfahren, insbesondere ohne Analogie, auskäme.

Das obige Beispiel zeigt, wie man durch Verallgemeinerung von einem Sonderfall, wie ihn Figur I darstellt, zu einer allgemeineren Situation, wie jene in Figur III, aufsteigen kann und daraus wieder durch Spezialisierung zu einem analogen Fall, wie jenem von Figur II, hinuntersteigen kann. Es zeigt ferner die in der Mathematik so geläufige Tatsache, die für den Anfänger ebenso überraschend ist wie für den Philosophen, der sich selber für fortgeschritten hält, dass der allgemeine Fall hinsichtlich der Beweisführung dem Sonderfall gleichwertig sein kann. Unser Beispiel zeigt in ungekünstelter und suggestiver Art, wie sich beim Streben nach der gesuchten Lösung Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie in natürlicher Weise vereinigen. Man beachte, dass nur ein Minimum von Vorkenntnissen nötig ist, um die obige Beweisführung voll zu verstehen. Wir können deshalb nur bedauern, wie oft Mathematiklehrer solche Dinge nicht mit Nachdruck betonen und es bei solchen ausgezeichneten Gelegenheiten versäumen, ihre Schüler im Denken zu schulen. *G. Pólya*, Stanford University.

Dieser Aufsatz ist im April 1948 im «American Mathematical Monthly» erschienen und wurde mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers und des Verfassers von Emil Treichler aus dem Englischen übersetzt. In seinem Buche «Schule des Denkens» hat Prof. Pólya seine Ansichten über den Mathematik-Unterricht ausführlicher dargelegt. Über Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie siehe dort die Abschnitte, die auf den Seiten 223, 207 und 52 beginnen. (G. Pólya: «Schule des Denkens» [Vom Lösen mathematischer Aufgaben]. Sammlung Dalp, A. Francke AG., Bern, 266 S., Fr. 9.80.)

Wer ein schweres Leben hat, schätzt es mehr als der Verwöhnte. *André Chamson*, Paris
Aus seinem Vortrag am Congrès pédagogique Romande in Lausanne

Kurvendiskussion als Methode

A. Einleitung

Kurven diskutieren heisst, die geometrischen Eigenschaften dieser Gebilde ans Tageslicht fördern. Ich denke hier in erster Linie an solche Eigenschaften, die von einem bestimmten Koordinatensystem abhängen. Besonders wichtig sind *Steigung*, *Konvexität* und *Konkavität*. Diese drei Eigenschaften gestatten in vielen Fällen, die Lage zweier Kurven zueinander vollständig zu beurteilen.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie man durch Kurvendiskussion, also durch eine verhältnismässig elementare Methode, recht schwierige mathematische Probleme lösen oder doch mindestens deren Lösung vorbereiten kann. Sollte es nötig sein, so wird der freundliche Leser mit geringer Mühe durch einfache Skizzen die Hilfe der Anschauung in Anspruch nehmen.

B. Extremale achsensymmetrische Polygone mit fester Länge

Gegeben sind 2 Parallelen im Abstand l sowie eine Senkrechte. Wir betrachten die Gesamtheit aller ebenen konvexen Polygone, welche zwischen den 2 Parallelen liegen, die Senkrechte g als Symmetrieachse besitzen und die Länge l aufweisen (jede Parallele muss von innen mindestens in einem Punkt berührt werden). *Gesucht sind nun diejenigen Polygone, welche bei gegebenem Flächeninhalt F den grössten Umfang L aufweisen*[1]).

Es ist zweckmässig, die zugelassenen Figuren in 2 Klassen zu verteilen. In die Klasse I werden alle Polygone geworfen, deren grösste Breite am Rand (also auf einer der Parallelen) liegt. Für die Klasse II fällt diese Beschränkung weg. Beschäftigen wir uns zunächst mit der Klasse I. Die einfachsten Polygone sind hier die *symmetrischen Trapeze*. Für sie gilt:

$$F = (p_1 + p_2)\, l$$
$$L = 2\left[p_1 + p_2 + \sqrt{l^2 + (p_1 - p_2)^2}\,\right] \qquad (1)$$

Die üblichen Koordinaten der analytischen Geometrie heissen x, y. *Wir ersetzen nun konsequent x durch L, y durch F, arbeiten also in einer (L, F)-Ebene.*

Für *Rechtecke* wird $p_2 = p_1$, und somit lautet die Gleichung der «Rechteckkurve»:

$$F = 2\, p_1\, l;\quad L = 2\,(2\, p_1 + l) \qquad (2)$$
$$F = \frac{l}{2}\,(L - 2\, l) \qquad (3)$$

Für *Dreiecke* dagegen gilt $p_2 = 0$, und es resultiert:

$$F = p_1\, l;\quad L = 2\left[p_1 + \sqrt{l^2 + p_1^2}\,\right] \qquad (4)$$
$$F = \frac{l\,(L^2 - 4\, l^2)}{4\, L};\quad l^2 L^2 - 4\, l \cdot L\, F - 4\, l^4 = 0 \qquad (5)$$

Die «Rechteckkurve» ist also eine *Gerade* durch den Punkt A mit den Koordinaten $L = 2\, l$, $F = 0$ und der Steigung $\frac{l}{2}$, die Dreieckkurve eine *Hyperbel* durch denselben Punkt mit der Steigung

$$\frac{d\,F}{d\,L} = \frac{l}{4\, L^2}\,(L^2 + 4\, l^2);\quad \left.\frac{d\,F}{d\,L}\right|_{(L = 2\, l)} = \frac{l}{2} \qquad (6)$$

[1]) Ausser F = konst. ist für das Maximum von L, soll das Problem sich nicht trivialisieren, eine weitere Nebenbedingung notwendig. Dass gerade die Achsensymmetrie gewählt wird, rührt von der Abstammung des Problems von einer Aufgabe über Rotationskörper her.

Als Kegelschnitt weist die Dreieckkurve keine Wendestelle auf. Man stellt fest, dass der allein in Betracht fallende Hyperbelast beständig *nach unten konkav* ist. Daraus folgt aber, dass die beiden Kurven ausser A keinen weitern gemeinsamen Punkt besitzen, *und dass die Dreieckkurve rechts von A unterhalb der Rechteckkurve liegt.*

Trapeze lassen sich statt durch p_1, p_2 günstiger durch die *halbe Mittellinie p* und die *Abweichung* davon, λ, darstellen. Es gilt nämlich:

$$F = 2\, p\, l;\quad L = 2\left[2\, p + \sqrt{l^2 + 4\, \lambda^2}\,\right]. \qquad (7)$$
$$L = 2\left[\frac{F}{l} + \sqrt{l^2 + 4\, \lambda^2}\right].\quad 0 \leqq \lambda \leqq p. \qquad (8)$$

Nun betrachten wir eine unendliche Folge von Trapezen mit festem p und einem veränderlichen λ, welches das Intervall (8) durchläuft. Aus (7) liest man jetzt unmittelbar ab, dass bei festem p, also auch bei festem F, L monoton von $2\, l + 4\, p$ auf $2\left[2\, p + \sqrt{l^2 + 4\, p^2}\right]$ steigt. Die betrachtete Trapezschar bildet sich infolgedessen in der (L, F)-Ebene als eine zur L-Achse parallele Strecke ab. Lässt man jetzt auch p variieren, so erhält man ebendaselbst eine Streckenschar mit der genannten Parallelitätseigenschaft, welche den Raum zwischen Rechteck- und Dreieckkurve einfach und lückenlos überdeckt, und zwar gelangt man bei festem p und veränderlichem λ von einem Punkte A_i der erstgenannten zu einem Punkte B_i der letztgenannten Kurve[2]).

Diese Tatsache ist nun sehr aufschlussreich. Da nämlich jedem Trapez ein Punkt P_i auf einer Horizontalen durch ein passendes Punktepaar $A_i B_i$ und zwar zwischen A_i, B_i entspricht, so haben wir folgendes Zwischenresultat gewonnen:

Unter allen Trapezen (im weitern Sinn) der eingangs geschilderten Art besitzen bei festem F ausnamslos Dreiecke den grössten, Rechtecke den kleinsten Umfang.

Um weiter zu kommen, fassen wir die Trapeze noch auf andere Weise zu einparametrigen Scharen zusammen. In (1) halten wir p_1 fest und lassen p_2 das Intervall $0 \leqq p_2 \leqq p_1$ durchlaufen. In der (L, F)-Ebene resultiert eine neue Verbindung der Grenzkurven mit den Endpunkten C_i auf der Dreieck- bzw. D_i auf der Rechteckkurve. Wegen

$$\frac{d\,F}{d\,L} = \frac{l}{2\left[1 - \dfrac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{l^2 + (p_1 - p_2)^2}}\right]} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos\alpha} \qquad (9)$$

(α = Winkel zwischen Seiten- und Grundlinie) ist diese Verbindungskurve beständig *konkav nach unten*, weil die Steigung mit wachsendem α beständig abnimmt. Ausserdem (und das ist entscheidend) verläuft sie ganz im Raum zwischen Dreieck- und Rechteckkurve, da sich ja sonst ein Widerspruch zum oben bewiesenen Zwischenresultat ergäbe. Die letztgenannte Eigenschaft kommt auch der Strecke $C_i D_i$ zu, die künftig nach unten abschirmt. Lässt man jetzt auch p_1 variieren, so wird jeder Punkt auf und zwischen den Grenzkurven erfasst.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich zeigen, dass kein Doppeltrapez der Klasse I bei festem F grösstes

[2]) In den meisten Fällen ist an dieser Stelle eine Enveloppe zu diskutieren, was recht schwierig sein kann.

L besitzen kann. In der Tat gilt für eine derartige Fläche (β = Winkel zwischen der obern Seitenlinie und zugehöriger «Grundlinie»:

$$F = (p_1 - p_3)\,x + (p_2 + p_3)\,l$$
$$L = 2\,[p_1 + p_3 + \sqrt{x^2 + (p_1 - p_2)^2} + \sqrt{(l - x)^2 + (p_2 - p_3)^2}\,] \qquad (10)$$

(p_1, p_2, p_3: Grundlinien nach Grösse geordnet.
$x, l - x$: Höhe des untern bzw. obern Trapezes.)

Durch Variation von x von einem mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze zu berechnenden Anfangswert bis zum Endwert l wird eine Doppeltrapezschar erzeugt, der in der (L, F)-Ebene einen Kurvenbogen entspricht, welcher 2 Punkte des Bogens $C_i\,D_i$ verbindet. Man berechnet:

$$\frac{d\,F}{d\,x} = (p_1 - p_3)$$
$$\frac{d\,L}{d\,x} = 2\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + (p_1 - p_2)^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{(l-x)^2 + (p_2 - p_3)^2}}\right]$$
$$= 2\,(\sin\alpha - \sin\beta) \qquad (11)$$

Mit wachsendem x (p_1, p_2, p_3 konstant) nimmt nun α monoton zu, β monoton von α bis 0 ab. Infolgedessen nimmt auch $\frac{d\,F}{d\,L}$ monoton ab, und die Verbindungskurve ist durchwegs *konkav nach unten, liegt also oberhalb der Strecke $C_i\,D_i$*. Gerade dies war aber zu beweisen.

Der Leser wird sich überzeugen, dass man mit dem geschilderten Verfahren durch vollständige Induktion zu Polygonen aufsteigen kann, die aus beliebig vielen Trapezen bestehen und nicht extremal sein können[3]). Es gilt daher der *Satz:*

Unter allen achsensymmetrischen Polygonen der Klasse I von fester Länge l und vorgeschriebenem F besitzen ausnahmslos Dreiecke den grössten Umfang.

Wie steht es nun mit der Klasse II?

Betrachten wir zunächst ein Doppeltrapez mit gleichen Endbreiten y und einer im Innern gelegenen grössten Breite r. Bei Variation von x von 0 bis l berechnet man für $\frac{dL}{dx}$ wieder den rechts aussen stehenden Wert der Formel (11). Daraus kann gefolgert werden, dass das Minimum von L bei festem F für $\beta = \alpha$, das Maximum für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ erreicht wird. Die Deformation der Figur von der Ausgangsstellung $\beta = \alpha$ heisse *Antisymmetrisation.* Es ist klar, wie man durch Antisymmetrisation den Umfang eines beliebigen Doppeltrapezes der Klasse II vergrössert, ohne den Flächeninhalt F zu verändern. Aus Gründen der Platzersparnis muss es dem Leser überlassen bleiben, sich zu vergewissern, dass dieses Verfahren mit einem zusätzlichen Kunstgriff von allgemeiner Tragweite ist[4]). Dies bedeutet aber, dass jedes beliebige zulässige Polygon der Klasse II in ein flächengleiches Polygon der Klasse I mit grösserem L übergeführt werden kann. Polygone der Klasse II fallen demnach für unser Maximumproblem ausser Betracht.

[3]) Man konstruiert eine Folge von Strecken, die alle nicht unterhalb von $C_i\,D_i$ liegen.

[4]) Das Polygon wird entweder längs der grössten Breite aufgeschnitten, oder man schneidet das Rechteck mit der grössten Breite heraus. Sodann trennt man unten und oben je ein angrenzendes Trapez ab, antisymmetrisiert, fügt wieder zusammen und fährt in gleicher Weise fort. Das Verfahren ist immer anwendbar.

Endlich lässt sich jede ebene konvexe Figur durch ein konvexes Polygon mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Somit ist folgender Satz bewiesen:

Unter allen achsensymmetrischen konvexen Figuren der Ebene von der festen Länge l, gemessen auf der zu zwei Parallelen senkrecht stehenden Symmetrieachse, besitzen Dreiecke und nur diese Figuren bei festem Flächeninhalt F den grössten Umfang L[5]).

C. Extremale achsensymmetrische Polygone mit fester Breite

Dieses Beispiel, die natürliche Ergänzung zum vorigen, ist viel schwieriger, und wir werden mit der elementaren Methode nicht bis zur Endaussage vorstossen. Immerhin erhält man interessante Teilresultate. Für zulässige Trapeze mit der festen grössten Breite $2\,r$, der veränderlichen Breite $2\,x$ und der ebenfalls variablen Höhe h gilt:

$$F = (r + x)\,h;$$
$$L = 2\,[r + x + \sqrt{h^2 + (r - x)^2}\,] \qquad (12)$$

Zwei Spezialfälle erwecken besonderes Interesse:

$x = r \rightarrow$ Rechteck

$$F = 2\,r\,h;\; L = 4\,r + 2\,h.\; F = r\,(L - 4\,r) \qquad (13)$$

Die Rechteckkurve ist eine *Gerade* durch den Punkt A mit den Koordinaten $L = 4\,r,\; F = 0$.

$x = 0 \rightarrow$ Dreieck

$$F = r\,h;\; L = 2\,[r + \sqrt{h^2 + r^2}\,] \qquad (14)$$
$$F = \frac{r}{2}\sqrt{(L - 2\,r)^2 - 4\,r^2}\,;\; 4\,F^2 + 4\,r^3\,L - r^2 L^2 = 0$$

Die Dreieckkurve ist eine *Hyperbel* durch den Punkt A mit einer in diesem Punkt unendlich grossen Steigung.

Infolge des letztgenannten Umstandes wird die Frage nach weitern Schnittpunkten der beiden Kurven brennend. Dieselben werden gefunden durch Einsetzen des Wertes von F aus (13) in (14):

$$4\,r^2\,(L - 4\,r)^2 + 4\,r^3\,L - r^2\,L^2 = 0$$
$$r^2\,(3\,L^2 - 28\,r\,L + 64\,r^2) = 0$$
$$L = \frac{14\,r \pm 2\,r}{3}$$
$$L_1{}^* = \frac{16\,r}{3};\; L_2{}^* = 4\,r$$
$$F_1{}^* = \frac{4\,r^2}{3};\; F_2{}^* = 0 \qquad (15)$$

Es gibt also noch einen weitern Schnittpunkt B mit den Koordinaten $L = \frac{16\,r}{3}$, $F = \frac{4\,r^2}{3}$. Dies bedeutet, dass es für jedes $l > 0$ je ein Rechteck mit $h = \frac{2\,r}{3}$ sowie ein Dreieck mit $h = \frac{4\,r}{3}$ gibt, welche in L und F übereinstimmen.

Weitern Aufschluss über die Verteilung der Trapeze

[5]) Die Lösung des zugehörigen Minimumproblems verlangt höhere Hilfsmittel (Variationsrechnung, Differentialgleichungen). Immerhin lässt sich die Eulersche Differentialgleichung des Problems in der Form $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$ verhältnismässig einfach gewinnen. Man hat die Länge l in n gleiche Abschnitte zu teilen, ein Extremumproblem in n Variablen, nämlich den n zugeordneten Breiten, anzusetzen und endlich den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ vorzunehmen. Die Lösungskurven sind Kreisbogen mit Mittelpunkt auf der Symmetrieachse oder Geradenstücke. Schwieriger ist die Frage der richtigen Zusammenfügung, da ja nur für ein ganz bestimmtes F der Kreis als Vollkreis in Frage kommt.

liefert die *Enveloppenbedingung* $\frac{\partial F}{\partial h}\cdot\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial h}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$.

Die Auswertung liefert $h^2(h^2+r^2-2rx-3x^2)=0$ oder, wenn der triviale Fall $h=0$ weggelassen wird

$$h^2=3x^2+2rx-r^2 \tag{16}$$

Es folgen alle wünschenwerten Daten der Enveloppe:

$$F=(r+x)\sqrt{3x^2+2rx-r^2};\ L=2(r+3x) \tag{17}$$

$$\frac{dF}{dL}=\frac{x(x+r)}{\sqrt{3x^2+2rx-r^2}} \tag{18}$$

$$\frac{d^2F}{dL^2}=\frac{3x^3+3rx^2-r^2x-r^3}{6(\sqrt{3x^2+2rx-r^2})^3} \tag{19}$$

Wegen der Quadratwurzel ist x auf das Intervall $r/3\leqq x\leqq r$ zu beschränken.

Interessantester Enveloppenpunkt ist unstreitig der Punkt C mit den Koordinaten $L=8r$, $F=4r^2$. Er ist das Bild des *Quadrates*, das bekanntlich unter allen Vierecken mit festem F den kleinsten Umfang aufweist. Um die Entwicklung weiterzutreiben, müsste ein Abbildungssatz beigezogen werden. Dies würde aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen[6]).

H. Bieri, Bern

[6]) Mit Kurvendiskussion konnte der Verfasser 4 Maximumprobleme über Rotationskörper lösen.

Die Kegelschnitte im Unterricht der darstellenden Geometrie*

Einleitung

Es war schon lange mein Wunsch, den Unterricht in darstellender Geometrie auf der Mittelschulstufe (Typus C) nach folgendem methodisch zu begrüssenden Prinzip zu gestalten: einerseits *keine Behauptung aufstellen, ohne Verpflichtung, den zugehörigen Beweis auch zu liefern*, andererseits *Beweisführung und Konstruktion möglichst elementar zu halten.* Gerade die Behandlung der ebenen Schnitte eines Kreiskegels bietet Unbefriedigendes und bildet den eigentlichen Anlass zur Aufstellung obigen Postulates. Verzichtet man nämlich auf die Heranziehung der eigentlichen Begriffsbildungen der projektiven Geometrie (die trotz starken Verlockungen, meiner Ansicht nach, bis auf den Begriff des Doppelverhältnisses ganz der Hochschule überlassen werden kann), verschweigt man also «Involutionen» und, wenn man will, sogar den grössten Teil der Polarentheorie der Kegelschnitte, so begibt man sich in eine recht ungemütliche Situation, wenn man gezwungen wird — und das ist wohl der Fall —, gewisse Aussagen über den Charakter eines Kegelschnittes zu machen.

Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist es, zu zeigen, dass eine wirklich elementar-geometrische und für Schulzwecke als befriedigend und vollständig ausreichend zu betrachtende Erledigung der anschliessend zu erörternden Probleme möglich ist. Wie weit es mir gelungen ist, methodisch Interessantes und sonst Neues zu bringen, möge der Leser selbst beurteilen. Ich möchte lediglich noch bemerken, dass die in diesem Aufsatz vorkommenden analytischen Entwicklungen als Einflechtungen, gewissermassen als nützliche Ergänzungen aufzufassen sind, die ohne Störung der rein geometrischen Betrachtungen weggelassen werden können.

§ 1. **Die Ellipse**

Eine erste Bekanntschaft mit einem Kegelschnitt, nämlich der Ellipse, macht der Schüler bei der Parallelprojektion des Kreises. Normalerweise ist ein ausführliches Studium der perspektiven Affinität einerseits im Raume und andererseits auf demselben Träger (konlokale perspektive Affinität) vorangegangen. Daher ist es zweckmässig, die *Ellipse* nicht vermittels der Brennpunkte, sondern direkt *als perspektiv-affine Figur des Kreises zu definieren.* Es braucht hier kaum betont zu werden, dass diese Ellipsendefinition den Kreis als Spezialfall umfasst. Auf Grund der aufgestellten Definition lassen sich sofort zwei Aussagen machen:

Satz 1: Jeder nicht zur Achse parallele ebene Schnitt eines Kreiszylinders ist eine Ellipse. Denn dieser kann als perspektiv-affine Figur des Kreises gedeutet werden.

Satz 2: Jede Parallelprojektion eines Kreises ist im Allgemeinen eine Ellipse. Das ist eigentlich eine andere Fassung des Satzes 1.

Das Studium der Symmetrieen bei der — ich wiederhole: nun als perspektiv-affine Figur des Kreises definierten — Ellipse führt in natürlicher Weise auf *die beiden Hauptachsen* (grosse und kleine Achse der Ellipse als einzige Achsen für normale Symmetrie), ferner zum allgemeineren Begriff eines *Durchmessers* (Achse für normale bzw. schiefe Symmetrie), dann zum Begriff *Ellipsenmittelpunkt* (zentrische Symmetrie) und schliesslich zum Begriff eines *Paares konjugierter Durchmesser* (in bekannter Weise erklärt). Denkt man sich durch die grosse Achse zur Ebene der Ellipse die Normalebene gelegt und in ihr ein rechtwinkliges Dreieck über der grossen Halbachse a als Hypotenuse gezeichnet, wobei die vom Ellipsenmittelpunkt ausgehende Kathete die Länge der kleinen Halbachse b haben soll, so ist die andere Kathete ein Stück einer Mantellinie einer Rotationszylinderfläche mit Leitkreisradius b (die Rotationsachse geht durch den Mittelpunkt der Ellipse). Von dieser Fläche ist offenbar die gegebene Ellipse ein ebener Schnitt. Mit Hilfe dieser Fläche können nach dem Vorgehen von Dandelin (Dandelinsche Kugeln) die Begriffe: *Brennpunkte und Leitlinien* der Ellipse auf natürliche Weise eingeführt werden. Dadurch erweisen sich die hier definierte und die «Ellipse der analytischen Geometrie» als völlig identisch.

Diese Identifizierung kann aber, immer auf der hier gegebenen Definition fussend, auch auf analytischem Wege, durch Aufstellung der Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser als Koordinatenachsen, bewerkstelligt werden. So entnimmt man der Fig. 1 ohne weiteres folgende Proportionen:

$$\bar{x}:x=r:a\ \therefore\ \bar{x}=\frac{r}{a}\,x$$

$$\text{und }\ \bar{y}:y=r:b\ \therefore\ \bar{y}=\frac{r}{b}\,y$$

$$\text{aber }\ \bar{x}^2+\bar{y}^2=r^2\ \therefore\ \frac{r^2}{a^2}\,x^2+\frac{r^2}{b^2}\,y^2=r^2$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

* Diesem Aufsatz lag ein unter gleichlautendem Titel im Mathematischen Kolloquium Winterthur gehaltener Vortrag zugrunde.

dabei bedeuten a und b die Längen zweier konjugierter Halbmesser der Ellipse.

Nachdem man den Schüler mit allerlei aus der perspektiven Affinität fliessenden Ellipsenkonstruktionen, Schnitt- und Tangentenproblemen vertraut gemacht hat, behandelt man unter anderem folgende Sätze:

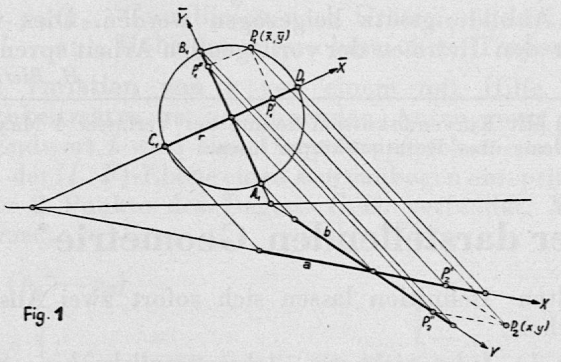


Fig. 1

Satz 3: Es ist stets möglich, eine gegebene Ellipse perspektiv-affin bzgl. einer gegebenen Geraden als Affinitätsachse so zu transformieren, dass die Bildfigur ein Kreis ist.

Satz 4: Sind zwei ebene Felder perspektiv-affin mit demselben Dritten bzgl. derselben Affinitätsachse, so sind sie es auch untereinander bzgl. der gleichen Achse (ebenes Feld = Punktfeld bzw. Geradenfeld in einer Ebene).

Satz 5: Jede perspektiv-affine Figur einer Ellipse ist wieder eine Ellipse.

Folgerung zu Satz 5: Jede Parallelprojektion einer Ellipse ist wieder eine Ellipse.

Beweis von Satz 3: Sei die Ellipse durch ein Paar konjugierter Durchmesser $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$ gegeben. Dann läuft alles darauf hinaus, zu zeigen, dass bei gegebener Affinitätsachse s eine passende Affinitätsrichtung gefunden werden kann, so dass das affine Bild des Viereckes $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Quadrat ist. In der Tat: für den Bildpunkt M_3 (gesuchter Kreismittelpunkt) des Diagonalenschnittpunktes M_1 (Ellipsenmittelpunkt) lassen sich zwei geometrische Örter (Thaleskreise) angeben. Verlängert man die Diagonalen $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$ bis zum Schnitt mit s, so erhält man einen Durchmesser des einen Thaleskreises; legt man durch M_1 die Parallelen zu $A_1 B_1$ und $B_1 C_1$, so bestimmen diese auf s einen Durchmesser des anderen Thaleskreises. Der Umkreis des Bildquadrates $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist der gesuchte Kreis, wie leicht einzusehen ist, und $M_1 M_3$ die gesuchte Affinitätsrichtung (Fig. 2).

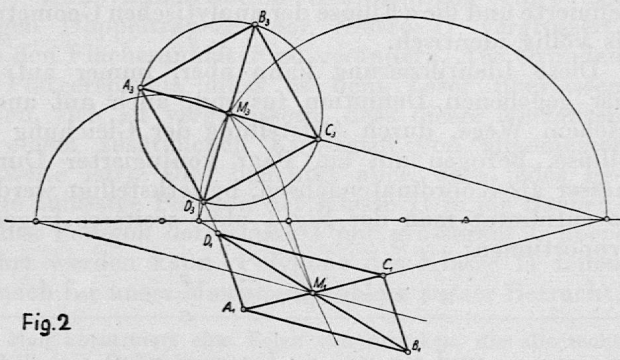


Fig. 2

Auf den *Beweis des Satzes 4* soll hier nicht eingegangen werden, da er leicht zu erbringen ist.

Beweis des Satzes 5: Sei k_2 die bzgl. s perspektiv-affine Figur der Ellipse k_1. Nach Satz 3 gibt es einen Kreis k_3, der ebenfalls bzgl. s mit k_1 perspektiv-affin ist. Folglich ist nach Satz 4 k_2 auch perspektiv-affin mit k_3 bzgl. s. Da aber k_3 ein Kreis ist, muss k_2 eine Ellipse sein (siehe Def!).

Eine weitere Erzeugungsmöglichkeit der Ellipse bietet in natürlicher Weise die zentrische Kollineation, die bekanntlich die perspektive Affinität als Sonderfall enthält. Bei einer gründlichen Behandlung der zentrischen Kollineation stösst man auf einen dem Satz 4 analogen Satz, der auch für unsere weiteren Beweiszwecke wichtig ist.

Satz 6: Sind zwei ebene Felder E_1 und E_2 zentrisch-kollinear mit demselben dritten ebenen Feld E_3 bezüglich derselben Kollineationsachse s, so sind sie selbst bzgl. dieser Geraden zueinander zentrisch-kollinear. Dabei liegt das Zentrum Z_{12} mit den beiden Zentren Z_{13} und Z_{23} in einer Geraden. Natürlich brauchen nicht alle Zentren eigentliche Punkte zu sein.

Auf den Beweis wird hier verzichtet, da leicht.

Eine für uns wichtige Anwendung des Satzes 6 besteht in folgendem: Schneidet man eine Kreiskegelfläche mit einer Ebene, so ist die Schnittfigur bekanntlich zentrisch-kollinear mit der Leitkreisfigur bezüglich der Schnittlinie s der Schnittebene E und der Leitkreisebene L. Klappt man E um s in die Ebene L, so ist die Umklappung affin mit der Schnittfigur bezüglich s, folglich muss nach obigem Satz die Umklappung der Schnittfigur zentrisch-kollinear mit der Leitkreisfigur bzgl. s sein.

Somit: *das Problem der Bestimmung des Charakters der ebenen Schnittfigur einer beliebigen Kreiskegelfläche* (bei nicht entarteten Schnitten) *ist identisch mit dem Problem der Ermittlung der zentrisch-kollinearen Figur eines Kreises, wenn das Zentrum der Kreisebene angehört* (konlokale zentrische Kollineation).

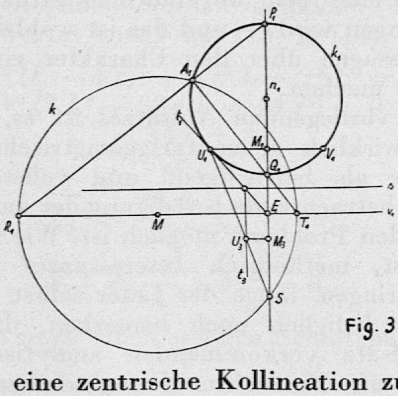


Fig. 3

Nun ist eine zentrische Kollineation zum Beispiel bestimmt, wenn das Zentrum Z, die Achse s und die sogenannte Verschwindungslinie v_1 bekannt sind. Verschwindungslinie ist bekanntlich jene Gerade des als Originalfeld (hier Kreisfeld) angenommenen Feldes, deren zentrisch-kollineares Bild die uneigentliche Gerade des Bildfeldes ist.

Je nach der gegenseitigen Lage von Kreis und v_1, unterscheidet man drei Fälle, nämlich: v_1 schneidet die Kreislinie nicht, v_1 berührt sie (§ 2), v_1 schneidet sie (§ 3).

Satz 7: Schneidet die Verschwindungslinie v_1 den Kreis k_1 nicht, so ist die Bildfigur k_1 eine Ellipse.

Die Beweisidee ist folgende: man versucht, im Sinne unserer Ellipsendefinition, zu zeigen, dass die Figur k_2 auch durch perspektive Affinität aus einem Kreise gewonnen werden kann. Man erhält einen solchen Kreis aus folgender Überlegung (Fig. 3)

Die Normale n_1 (durch den Mittelpunkt von k_1) zu v_1 schneide v_1 in F_1 und k_1 in P_1 und Q_1. Die Polare von F_1 in bezug auf k_1 ist parallel v_1. Sei M_1 die Mitte der Polarensehne $U_1 V_1$ (also Pol der Verschwindungsgeraden v_1 bezüglich k_1) und sei A_1 irgend ein Punkt der Peripherie von k_1, dann ist $\sphericalangle P_1 A_1 Q_1 = 90°$. Man schneide die Gerade $P_1 A_1$ bzw. $A_1 Q_1$ mit v_1 (in R_1 bzw. T_1) und zeichne über $R_1 T_1$ den Thaleskreis k. Sei S einer der Schnittpunkte von n_1 mit k. Dann ist

(1) $S F_1^2 = R_1 F_1 \cdot T_1 F_1$ (rechtwinkliges $\triangle R_1 S T_1$)

aber aus $\triangle P_1 F_1 R_1 \sim \triangle Q_1 F_1 T_1$ (WW) folgt

$$R_1 F_1 : F_1 P_1 = F_1 Q_1 : F_1 T_1$$

$$\therefore \quad (2) \quad R_1 F_1 \cdot F_1 T_1 = F_1 P_1 \cdot F_1 Q_1$$

Also, wegen (1) und (2): $S F_1^2 = F_1 P_1 \cdot F_1 Q_1$

Nun ist aber $F_1 P_1 \cdot F_1 Q_1 = F_1 U_1^2$ (Sekanten-Tangentensatz)

$\therefore \quad S F_1^2 = F_1 U_1^2$ und hieraus: $\underline{S F_1 = F_1 U_1}$.

F_1 ist somit der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte U_1, V_1 und S hindurchgeht. Durchläuft daher A_1 die Peripherie von k_1, so durchwandert der Mittelpunkt M des Thaleskreises k die Gerade v_1, wobei k immer durch S hindurchgeht. Es ist also immer $\sphericalangle R_1 S T_1 = 90°$. Deutet man folglich S als Zentrum, s als Achse und v_1 als Verschwindungsgerade einer zentrischen Kollineation, so durchwandert das Bild A_3 von A_1 ebenfalls einen Kreis, weil ja aus $P_3 A_3 \,//\, R_1 S$ (R_3 uneigentlicher Punkt) und $Q_3 A_3 \,//\, T_1 S$ (T_3 uneigentlicher Punkt) folgt, dass $\sphericalangle P_3 A_3 Q_3$ immer ein rechter bleibt. Das Bild t_3 der Tangente t_1 steht senkrecht auf v_1, weil F_3 der uneigentliche Punkt von n_1 ist. Der Schnittpunkt von $S U_1$ mit t_3 ist U_3 (Bildpunkt von U_1) und es ist $U_3 M_3 \,//\, U_1 V_1$. *Daher ist M_3 der Mittelpunkt und $M_3 U_3$ der Radius des gesuchten Kreises k_3.*

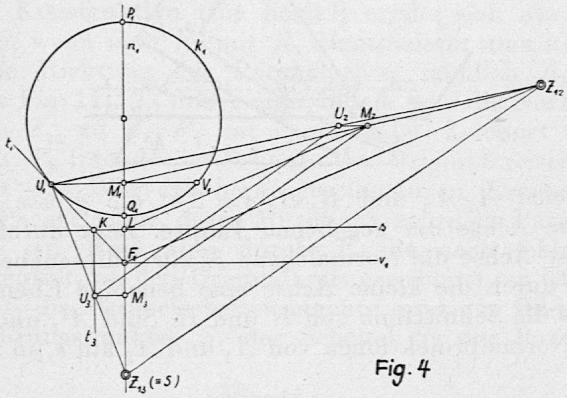


Fig. 4

Nach Satz 6 ist der Hilfskreis k_3 zentrisch kollinear mit k_2 (Bildfigur von k_1); da aber (siehe Fig. 4) $t_2 \,//\, F_2 Z_{12}$ und auch $n_2 \,//\, F_1 Z_{12}$ ist, muss $t_2 \,//\, n_2$ und, weil noch $U_2 M_2 \,//\, s$ ist, muss $KL \,\#\, U_2 M_2$, also $U_3 M_3 \,\#\, U_2 M_2$ sein, woraus $M_2 M_3 \,//\, U_2 U_3$ folgt. Das heisst: *Die Bildfigur k_2 von k_1 entsteht aus dem Kreise k_3 durch perspektive Affinität mit s als Affinitätsachse.* (Nebenbei: $M_2 M_3 \,//\, Z_{12} Z_{13}$). *Also ist k_2* definitionsgemäss (siehe § 1, Absatz 1) *eine Ellipse.*

Anmerkungen: 1. *Der Bildpunkt M_2 der Mitte M_1 der Polarensehne von F_1 in bezug auf k_1 ist der Mittelpunkt der Ellipse k_2.*

Denn v_1 ist die Polare von M_2 in bezug auf k_1. Daher liegen die Pole aller durch M_1 gehenden Sehnen in bezug auf k_1 auf v_1. Folglich sind die Bilder der Tangenten in den Endpunkten einer solchen Sehne parallel zueinander, das heisst das Bild einer solchen Sehne ist ein Ellipsendurchmesser.

2. *Den Mittelpunkt M_2 der Ellipse erhält man* somit direkt auf folgende Weise: man zieht durch L die Parallele zu $F_1 Z_{12}$ und schneidet diese Parallele mit der Verbindungsgeraden $M_1 Z_{12}$ (Fig. 5).

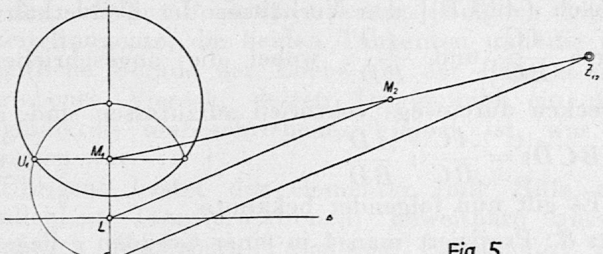
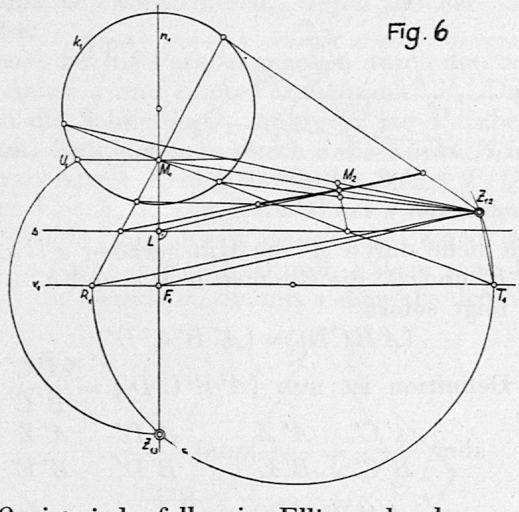


Fig. 5

3. *Die Achsen der Ellipse k_2 lassen sich ebenfalls direkt*) gewinnen.* Man stützt sich dabei einerseits auf die bereits bewiesene Tatsache, dass $\sphericalangle R_1 S T_1$ immer ein Rechter ist (Fig. 3), andererseits auf den leicht zu beweisenden Satz, dass die Mittelparallelen eines jeden einer Ellipse einbeschriebenen Parallelogrammes konjugierte Durchmesser sind, also die Achsen ergeben, wenn das Parallelogramm rechtwinklig ist.

Fig. 6



$P_2 Q_2$ ist jedenfalls ein Ellipsendurchmesser. Sei nun A_2 ein Punkt der Ellipse, von dem aus $P_2 Q_2$ unter einem rechten Winkel gesehen wird. Dann ist $Z_{12} T_1 \,//\, A_2 P_2$ und $Z_{12} R_1 \,//\, A_2 Q_2$, das heisst $R_1 T_1$ wird auch von Z_{12} aus unter einem rechten Winkel gesehen. Das heisst aber: Z_{12} und Z_{13} ($\equiv S$) liegen auf demselben Kreis mit Mittelpunkt auf v_1 (Fig. 6).

Die Konstruktion der Achsen wickelt sich daher so ab (Fig. 6):

Zuerst findet man nach Fig. 5 den Mittelpunkt M_2. Die Normale n_1 zu s schneidet die Kreislinie um F_1 mit dem Radius $F_1 U_1$ in 2 Punkten, von denen einer zu Z_{13} gestempelt wird. Die Mittelsenkrechte von $Z_{12} Z_{13}$ schneidet v_1 in einem Punkte, dem Mittelpunkte des durch Z_{12} und Z_{13} gehenden Kreises, welcher v_1 in den gesuchten Punkten R_1 und T_1 schneidet. Damit sind die Achsenrichtungen $Z_{12} R_1$ und $Z_{12} T_1$ gewonnen und, weil M_2 bekannt ist, durch Rückgang auf das «Kreisfeld» auch die Achsenlängen.

Der Beweis des Satzes 7 kann auch analytisch unter Zuhilfenahme des Begriffes «Doppelverhältnis

*) Indirekt aus k_3 (Fig. 4) auf Grund der perspektiven Affinität zwischen k_3 und k_2. Die Mittelsenkrechte von $M_2 M_3$ schneidet s im Mittelpunkte des Kreises, der aus s 2 Punkte herausschneidet, welche mit M_3 bzw. M_2 verbunden perspektiv-affine konjugierte rechtwinklige Durchmesserpaare von k_3 und k_2 ergeben.

von 4 in einer Geraden liegenden Punkten» (kürzer «Doppelverhältnis eines Punktequadrupels») geführt werden. Bekanntlich versteht man unter dem Doppelverhältnis eines Punktequadrupels A, B, C, D [symbolisch $(ABCD)$] das Verhältnis der Teilverhältniswerte $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$, wobei die angeschriebenen Strecken durchwegs vektoriell aufzufassen sind, also

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Es gilt nun folgender bekannte

Satz 8: Projiziert man 4 in einer Geraden g liegende Punkte A, B, C, D von einem Zentrum Z aus auf eine beliebige Gerade h der Ebene (Z, g), so besteht für die Projektionen A', B', C', D' dieser Punkte die Relation $(A'B'C'D') = (ABCD)$, das heisst das Doppelverhältnis von 4 in einer Geraden liegenden Punkten wird durch Zentralprojektion nicht zerstört.

Der elementar-geometrisch geführte Beweis dieses Satzes ist vielleicht vorzuziehen, daher sei er angegeben (Fig. 7).

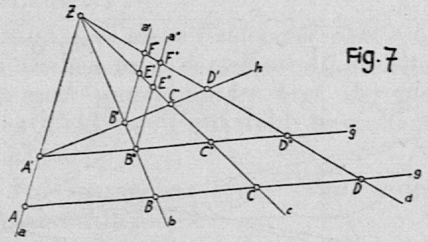


Fig. 7

Man ziehe durch A' die Hilfsgeraden $\overline{g} \parallel g$, ferner durch B' und B'' die Geraden $a' \parallel a$ und $a'' \parallel a$. Aus Fig. 7 folgt sofort

$$(ABCD) = (A''B''C''D'')$$

Nach Definition ist nun $(A'B'C'D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$

$$\text{aber } \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A'Z}{B'E'} \text{ und } \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'Z}{B'F'}$$

$$\therefore \quad (A'B'C'D') = \frac{B'F'}{B'E'}$$

Analog $(A'B''C''D'') = \frac{B''F''}{B''E''}$

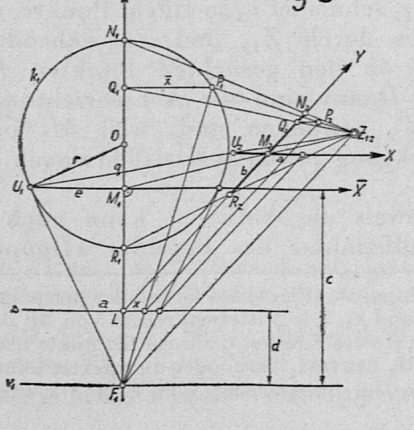
Nun ist aber $\frac{B'F'}{B'E'} = \frac{B''F''}{B''E''}$

$$\therefore \quad (A'B'C'D') = (A''B''C''D'') = (ABCD)$$

was zu beweisen war.

Der in Aussicht gestellte analytische Beweis kann nun leicht geführt werden. Wir konstruieren ein geeignetes Paar konjugierter Durchmesser der Bildkurve k_2 unseres Kreises k_1 (siehe Fig. 8) und suchen

Fig. 8



die Gleichung von k_2, bezogen auf dieses Durchmesserpaar als Koordinatensystem aufzustellen.

Aus Fig. 8 erhält man nach Satz 8

$$(R_1 M_1 Q_1 N_1) = (R_2 M_2 Q_2 N_2)$$

$$\text{also } \frac{R_1 Q_1}{M_1 Q_1} : \frac{R_1 N_1}{M_1 N_1} = \frac{R_2 Q_2}{M_2 Q_2} : \frac{R_2 N_2}{M_2 N_2}$$

$$\therefore \quad \frac{r - q + \overline{y}}{\overline{y}} : \frac{2r}{r+q} = \frac{y+b}{y} : \frac{2b}{b}$$

$$\therefore \quad \overline{y} = \frac{y(r^2 - q^2)}{rb - qy} \text{ und } \overline{y} - q = \frac{(ry - qb)}{rb - qy}\, r \qquad \text{I}$$

Ferner: $x : \overline{x} = d : (\overline{y} + c)$, aber: $c : d = e : a$ und $cq = e^2$,

$$\text{daher} \qquad \overline{x} = \frac{rbex}{a(rb - qy)} \qquad \text{II}$$

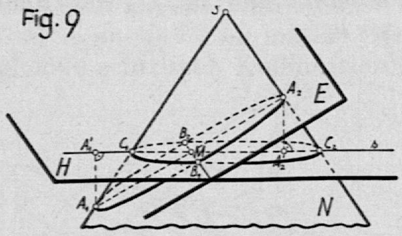
Nun lautet die Gleichung des Kreises im $\overline{X}\,\overline{Y}$-System:

$$\overline{x}^2 + (\overline{y} - q)^2 = r^2$$

Wegen I, II und $r^2 - q^2 = e^2$ erhält man hieraus die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, und das ist bekanntlich die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ein konjugiertes Durchmesserpaar.

Der *Satz 9:* «Eine gegebene Ellipse kann sogar stets als ebener Schnitt einer Rotationskegelfläche aufgefasst werden» wird elementar (auch ohne Kenntnis des Begriffes Brennpunkt) etwa folgendermassen bewiesen.

Fig. 9



Seien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ $(= 2b)$ die grosse bzw. kleine Achse der gegebenen Ellipse. Lege durch die grosse Achse die Normalebene N zur Ellipsenebene E und durch die kleine Achse eine beliebige Ebene H. Sei s die Schnittlinie von N und H. Sind A'_1 und A'_2 die Normalprojektionen von A_1 und A_2 auf s, so muss

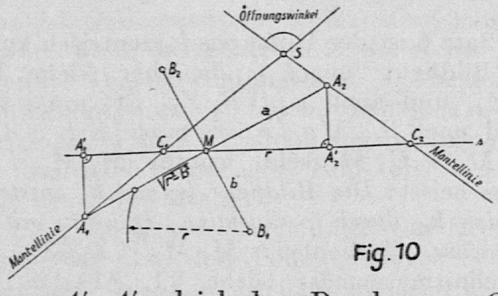


Fig. 10

die Länge $A'_1 A'_2$ gleich dem Durchmesser $C_1 C_2$ des gesuchten Leitkreises der Rotationskegelfläche sein (Fig. 9). Somit Leitkreisradius r bekannt. Setzt man $C_2 M = x$, also $C_1 M = 2r - x$, so erhält man aus $b^2 = x\ (2r - x)$ die Länge x, nämlich $x = r + \sqrt{r^2 - b^2}$. Aus der Konstruierbarkeit von x folgt die Kenntnis der Lage der Punkte C_1, C_2, und auch diejenige der Spitze S der Fläche, als Schnittpunkt der Geraden $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$. Damit ist eine Rotationskegelfläche der gewünschten Art bestimmt.

Ich beschliesse diesen Paragraphen mit der kommentarlos wiedergegebenen Konstruktion dieser Fläche ab (Fig. 10).

§ 2. **Die Parabel**

Nun wenden wir uns dem Falle zu, wo die *Verschwindungsgerade* v_1 *den Originalkreis berührt* (siehe Fallunterscheidung Seite 452).

Die Bildfigur besitzt *einen* uneigentlichen Punkt, nämlich den Bildpunkt des Berührungspunktes F_1. *Sie heisse Parabel.* Diese Definition hat den Vorteil, dass der Schüler sofort die Eigenschaften der Parabel kennen lernt, die er «darstellend» ausnützen kann. Die Parabel kann, wie aus Fig. 6 ersichtlich, als Grenzfall einer Ellipse aufgefasst werden: M_1 ist hier identisch mit F_1, daher ist M_2 ein uneigentlicher Punkt. Die Parabel kann somit als eine Ellipse mit einem uneigentlichen Punkt als Mittelpunkt aufgefasst werden. Daher: alle Durchmesser der Parabel laufen // zueinander. Ferner: beide Achsen sind unendlich lang. Die eine, die sogenannte Parabelachse, ist Symmetrieachse; die andere ist die uneigentliche Gerade der Ebene. Man

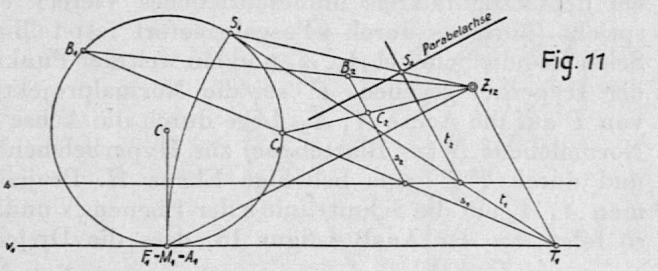


Fig. 11

findet die Parabelachse, indem man eine Sehne oder noch besser eine Tangente sucht, die auf dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht. Die diesbezügliche Konstruktion (für beide!) ergibt sich aus der Fig. 6, wenn man F_1 mit R_1 identifiziert: man kennt ja die Richtung der Parabelachse, nämlich $Z_{12} F_1$ (siehe Fig. 11). T_1 findet man, indem man die Normale durch Z_{12} zu $Z_{12} F_1$ mit v_1 schneidet. Zeichnet man durch T_1 irgend eine Sekante des Originalkreises, so liefert das Bild der herausgeschnittenen Kreissehne eine Parabelsehne, deren Mittelsenkrechte die Parabelachse ist. Wird aber durch T_1 die noch fehlende Tangente t_1 an den Originalkreis gezeichnet, so ist ihr Bild t_2 die Parabelscheiteltangente, und das Bild des Berührungspunktes S_1 der Scheitel S_2 der Parabel.

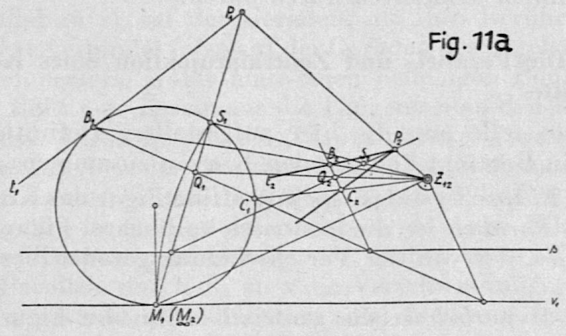


Fig. 11a

Der Fig. 11a entnimmt man mit Hilfe der Polarentheorie des Kreises und des Satzes 8 die bekannte Eigenschaft, dass die Parabelsubtangente vom Scheitel der Parabel halbiert wird. Wenn man mit P_1 den Pol der Geraden $B_1 C_1$ in bezug auf den Kreis bezeichnet, gilt nämlich: $(P_1 Q_1 S_1 M_1) = (P_2 Q_2 S_2 M_2) = -1$ (harmonisches Punktequadrupel), folglich muss, weil M_1 ein uneigentlicher Punkt ist, $P_2 S_2 = S_2 Q_2$ sein. Daraus folgt sofort: *Eine Parabel ist vollkommen durch den Scheitel, die Achse und einen weiteren Parabelpunkt bestimmt*, denn mit diesem Punkt sind auch der normalsymmetrische Punkt bzgl. der Achse und, wegen der Subtangenteneigenschaft, die Tangenten in den beiden Punkten bekannt. Folglich bilden Scheiteltangente, die beiden Tangenten und die uneigentliche Gerade der Ebene ein der Parabel umschriebenes Viereck, dessen Originalbild ein dem Originalkreis umbeschriebenes Viereck ist, was zu beweisen war.

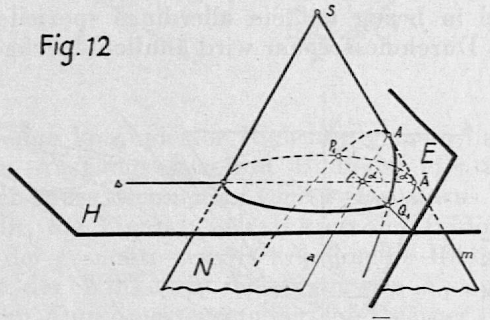
Übrigens leistet der elementar (mit Hilfe von Ähnlichkeits-Transformationen) beweisbare ausserordentlich fruchtbare Pascalsche Satz sofort den Beweis: er gilt ja für den Kreis, also auch für jede aus ihm durch perspektive Affinität oder zentrische Kollineation hervorgehende Figur (reiner Lagensatz). Dabei ist «Punkt und zugehörige Tangente» als 2 Punkte in Rechnung zu setzen. Scheitel und Achse bestimmen also 4 Punkte und der Parabelpunkt liefert den notwendigen fünften.

Die übliche Definitionseigenschaft der Parabel kann durch folgenden Satz nachgewiesen werden:

Satz 10: Zu jeder Parabel lässt sich eine Rotationskegelfläche konstruieren, deren ebener Schnitt sie ist.

Beweis: Sei die Parabel gegeben durch den Scheitel A, die Achse a und einen Parabelpunkt P_1. Dadurch ist auch die Sehne $P_1 Q_1$ senkrecht zur Parabelachse bestimmt. Nun lege man durch a die Ebene N normal zur Parabelebene E und durch die Sehne $P_1 Q_1$ eine beliebige Ebene H. Die Schnittlinie s der Ebenen N und H bilde mit der Parabelachse einen spitzen Winkel α (siehe Fig. 12). Durch A lege man in der Ebene N die Gerade m, die mit s ebenfalls den Winkel

Fig. 12



α einschliessen soll. m schneide s in $\bar{A}$. Durch die drei Punkte $\bar{A}$, P_1, Q_1 ist ein Kreis bestimmt.

Dieser ist Leitkreis der gesuchten Rotationsfläche, deren Spitze S auf m ohne weiteres zu finden ist. Schreibt man dieser Kegelfläche die Dandelinsche Kugel ein, so wird eine natürliche Einführung des Parabelbrennpunktes und der Leitlinie ermöglicht und die in Rede stehende Eigenschaft zugleich nachgewiesen, wodurch unsere Parabel mit der üblich eingeführten identifiziert wird.

Wie bei der Ellipse soll auch für die Parabel die Gleichung, bezogen auf ein passendes Koordinaten-System (Durchmesser und Tangente in dessen Endpunkt) aufgestellt werden (Fig. 13).

$(N_1 F_1 Q_1 M_1) = (N_2 F_2 Q_2 M_2)$ nach Satz 8.

$$\therefore \frac{N_1 Q_1}{F_1 Q_1} : \frac{N_1 M_1}{F_1 M_1} = \frac{N_2 Q_2}{F_2 Q_2} \quad \text{weil } M_2 \text{ uneigentlich.}$$

$$\therefore \frac{c}{c - y} : \frac{2r}{2r - \bar{y}} = \frac{b}{b - y}, \text{ also}$$

$$\bar{y} = \frac{2rcy}{b(2r - c) + cy} \quad \mathrm{I}$$

Aber $x : \bar{x} = (2r - c) : (2r - \bar{y})$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{2brx}{b(2r-c)+cy} \qquad \text{II}$$

Nun gilt aber $\bar{x}^2 + (\bar{y} - r)^2 - r^2 = 0$, daher, wegen I und II,

$$x^2 = \frac{(2r-c)\,c}{b}\, y.$$

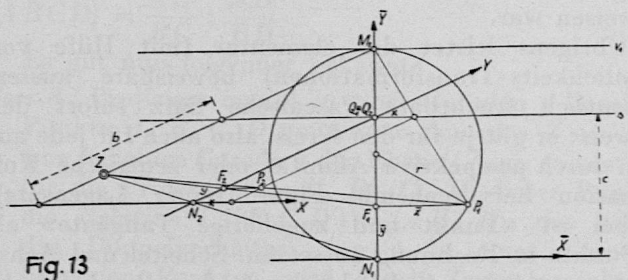


Fig. 13

§ 3. Die Hyperbel

Im letzten Fall, das heisst wo die *Verschwindungslinie v_1 den Originalkreis* schneidet (siehe Fallunterscheidung Seite 452), besitzt die Bildfigur *zwei uneigentliche Punkte*, nämlich die Bildpunkte der Schnittpunkte G_1 und H_1 von v_1 mit dem Originalkreis. Unsere *Bildfigur heisse Hyperbel.* Die Bilder der Tangenten in G_1 und H_1 sind die Asymptoten der Hyperbel, woraus in bekannter Weise (Symmetrien!) die Achsen gefunden werden können. Übrigens ist ja der Mittelpunkt der Hyperbel Bild des Poles der Verschwindungsgeraden in bezug auf den Originalkreis. In gleicher Weise wie bei der Ellipse gewinnt man auch hier ein beliebiges Paar konjugierter Durchmesser. Auch die Aufstellung der Gleichung der Hyperbel in bezug auf ein allerdings spezielles konjugiertes Durchmesserpaar wird ähnlich durchgeführt:

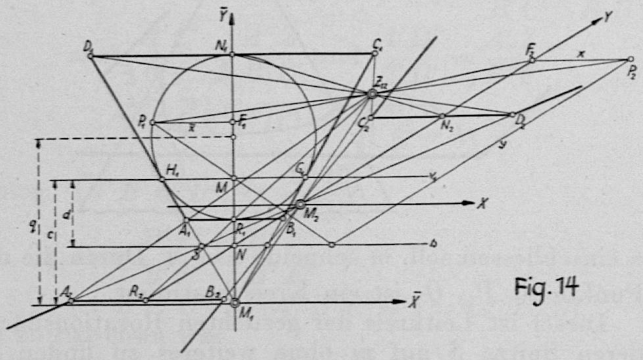


Fig. 14

Aus Fig. 14 folgt genau wie bei der Ellipse

$$\bar{y} - q = \frac{ry - qb}{rb - qy}\, r \qquad \text{I}$$

Ferner nimmt man der Figur die Proportion $x : (-\bar{x}) = d : (\bar{y} - c)$, aber $c : d = e : a$ und $c\,q = e^2$, wenn mit e die Länge des Tangentenstückes $M_1 H_1$ und mit a das zwischen v_1 und s gelegene Stück dieser Tangente bezeichnet werden. Das ergibt, wie bei der Ellipse:

$$\bar{x} = \frac{rbex}{a(rb - qy)} \qquad \text{II}$$

Nun gilt aber $\bar{x}^2 + (\bar{y} - q)^2 = r^2$, daher, wegen I, II und $q^2 - r^2 = e^2$,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

Das Studium der Figur lässt jetzt vermuten, dass $C_2 D_2 \,(= A_2 B_2) = 2a$ ist. In der Tat: $C_2 N_2 : C_1 N_1 = Z_{12} N_2 : Z_{12} N_1 = NM : MN_1 = SH_1 : H_1 D_1$, aber $H_1 D_1 = C_1 N_1$, daher $C_2 N_2 = SH_1 = a$. Damit ist Übereinstimmung mit der analytischen Geometrie erzielt. Wir wollen aber diese Übereinstimmung noch auf elementargeometrischem Wege nachweisen und beweisen zu diesem Zweck den

Satz 11: Zu jeder Hyperbel lässt sich eine Drehkegelfläche konstruieren, deren ebener Schnitt sie ist.

Beweis: Vorerst zeigt man, dass die Hyperbel vollkommen durch die reelle Achse und einen Hyperbelpunkt bestimmt ist. Man stützt sich dabei auf die mit Hilfe der Polarentheorie des Kreises und des Satzes 8 leicht zu beweisende Tatsache, dass die Subtangente in einem Hyperbelpunkte durch die Scheitel der Hyperbel harmonisch geteilt wird. Die Tangenten in den Scheiteln, im gegebenen Punkt und im normalsymmetrischen Punkt bzgl. der reellen Achse liefern ein der Hyperbel umbeschriebenes Viereck, das, wegen der erwähnten Subtangenteneigenschaft ohne weiteres aus den gegebenen Bestimmungsstücken zeichenbar ist. Nun weist man nach, dass diesem Viereck ein dem Originalkreis umbeschriebenes Viereck entspricht (übrigens durch «Pascal» sofort feststellbar). Seien also die Scheitel A_1, A_2 und ein weiterer Punkt P der Hyperbel gegeben. P' sei die Normalprojektion von P auf die Achse $A_1 A_2$. Lege durch die Achse die Normalebene N ($\equiv$ Blattebene) zur Hyperbelebene E und durch PP' eine beliebige Ebene H. Projiziert man $A_1 A_2$ auf die Schnittlinie s der Ebenen N und H, so folgt aus der Analysisfigur 15, dass die Dreiecke $A_1 A_1' C_1$ und $A_2 A_2' C_2$ ähnlich sind, somit $\frac{x+f}{c} = \frac{2r - x - g}{e}$, aber $d^2 = x(2r - x) \therefore \frac{x+f}{c} = \frac{\frac{d^2}{x} - g}{e}$. Weil aber $c : e = f : g$, erhält man hieraus $(x+f)^2 = \frac{d^2 c}{e} + f^2$. Also ist $(x+f)$ konstruierbar, da d, c, e und f bekannt. Daraus ergeben sich C_1 und C_2, also auch der Schnittpunkt S der Geraden $C_1 A_1$ und $C_2 A_2$. Konstruktion siehe Fig. 16.

Schreibt man der Drehkegelfläche die beiden Dandelinschen Kugeln ein, so lässt sich in bekannter Weise die übliche Definitionseigenschaft der Hyperbel erweisen und die Identifizierung unserer Hyperbel mit der üblich definierten durchführen.

§ 4. Die Parallel- und Zentralprojektion eines Kegelschnittes

Ich stelle nun die hier aufgestellten Definitionen der in Betracht kommenden Kurven zusammen:

1. *Ellipse* ist die perspektiv-affine Figur des Kreises.
2. *Parabel* ist die zentrisch-kollineare Figur des Kreises, der von der Verschwindungsgeraden berührt wird.
3. *Hyperbel* ist die zentrisch-kollineare Figur des Kreises, der von der Verschwindungsgeraden geschnitten wird.

Die Definitionen 2, 3 und Satz 7 ergeben sofort den

Satz 12: Schneidet man eine Kreiskegelfläche mit einer Ebene, die nicht durch die Spitze geht, so ist die Schnittfigur eine Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel, je nachdem die Ebene alle Mantellinien schneidet, oder zu *einer* Mantellinie, oder zu *zwei* Mantellinien parallel läuft.

Was lässt sich nun über die Parallel- bzw. Zentralprojektion eines Kegelschnittes aussagen? (Auch für die Schattentheorie von Wichtigkeit!)

Offenbar darf man nach vorangegangenem so fragen: Was ist das perspektiv-affine bzw. zentrisch-kollineare Bild eines Kegelschnittes?

Die Antwort lautet:

Satz 13: a) Das perspektiv-affine Bild eines Kegelschnittes ist ein Kegelschnitt gleicher Art.

b) Das zentrisch-kollineare Bild eines Kegelschnittes ist wieder ein Kegelschnitt; sein Charakter hängt von der Lage der Verschwindungsgeraden bzgl. des Kegelschnittes ab. Dabei kommt das gleiche Kriterium wie bei der zentrischen Kollineation des Kreises in Betracht.

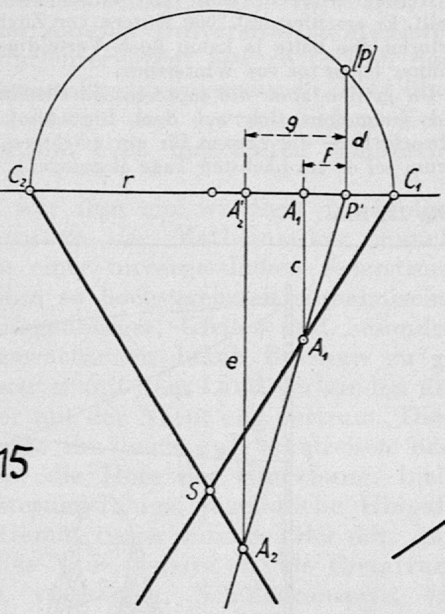


Fig. 15

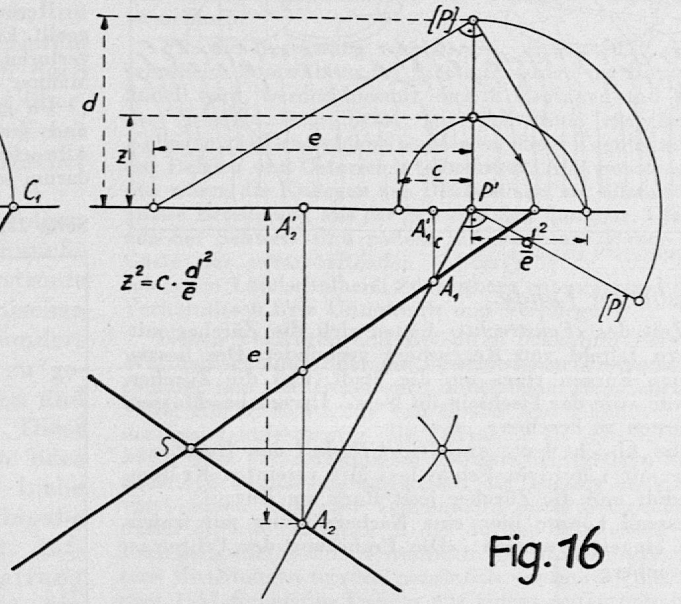


Fig. 16

Als Beweisstütze für Satz 13 brauchen wir den

Satz 14: Es ist stets möglich (auf unendlich viele Arten) einen gegebenen Kegelschnitt so zentrisch-kollinear bzgl. einer gegebenen Geraden s als Kollineationsachse zu transformieren, dass die Bildfigur ein Kreis ist.

Beweis: Man umschreibt (siehe Fig. 17, 18, 19*) dem gegebenen Kegelschnitt ein «Trapez» $A\,B\,C\,D$ von folgender Beschaffenheit: die parallelen Seiten sind parallel zu s; auf der Geraden, die ihre Berührungspunkte verbindet (also auf der Geraden des zugehörigen Durchmessers) wählt man einen beliebigen Punkt F_1 und zieht von diesem aus die Tangenten an den Kegelschnitt. Diese liefern die Trapezschenkel (wie dieses «Trapez» bei der Parabel bzw. Hyperbel aussieht, zeigt unmissverständlich Fig. 18 bzw. 19). Das Zentrum Z_{13} ist nun so zu ermitteln, dass die Bildfigur dieses Trapezes ein Quadrat ist. Daher muss offenbar die Parallele durch F_1 zu s die Verschwindungsgerade v_1 der gesuchten Kollineation sein. Weil nun Anseiten bzw. Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, erhält man Z_{13} als gemeinsamen Punkt zweier geometrischer Örter: des Thaleskreises über der Strecke der Schnittpunkte zweier Anseiten mit v_1, der hier in die Gerade n (durch F_1 senkrecht s) ausartet, und des Thaleskreises über der Strecke der Schnittpunkte der Diagonalen $A_1\,C_1$ und $B_1\,D_1$ mit v_1, was unmittelbar aus der Theorie der zentrischen Kollineation folgt. Schreibt man nun dem Bildquadrat $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ den Kreis ein, so ist zu zeigen, dass dieser Kreis das gesuchte Bild des gegebenen Kegelschnittes ist. Das ist aber sofort ersichtlich, denn die Konstruktion ergibt, dass die Bildpunkte der Berührungspunkte des Kegelschnittes mit dem umschriebenen Viereck die Seitenmitten des Bildquadrates, also Kreispunkte sind. Andererseits muss nach den bisherigen Entwicklungen, wenn man Originalfeld mit Bildfeld für einen Augenblick vertauscht (das heisst den Inkreis des Bildquadrates als Originalfigur und v_1 als Fluchtlinie betrachtet), die Bildfigur eine Figur gleicher Art wie die Ausgangsfigur sein, also beispielsweise in Fig. 17 eine Ellipse, die mit der Ausgangsfigur einen Durchmesser und eine Sehne konjugierter Richtung gemein hat. Daher müssen Ausgangsfigur und Bildfigur identisch sein. Folglich muss, wenn man wieder den status quo ante herstellt, die Figur k_3 der Inkreis des Bildquadrates, somit der gesuchte zentrisch-kollineare Bildkreis sein. Wegen der Willkür in der Wahl von F_1 auf der erwähnten Durchmessergeraden folgt ferner, dass unendlich viele solcher Bildkreise konstruierbar sind, wodurch der Satz 14 vollständig bewiesen ist.

Nun kann der Satz 13 bewiesen werden.

Beweis von Satz 13a: Man konstruiert zu dem gegebenen Kegelschnitt bzgl. der gegebenen Affinitätsachse s nach Satz 14 einen zentrisch-kollinearen Kreis k_3. Sei Z_{13} das Zentrum dieser Kollineation. Nach Satz 6 muss dieser Kreis zentrisch-kollinear mit der perspektiv-affinen Figur k_2 des Kegelschnittes k_1 bzgl. s als Kollineationsachse sein, wobei das Zentrum Z_{23} mit Z_{13} in einer Geraden // der Affinitätsrichtung liegt. Folglich ist k_2 sicher ein Kegelschnitt. Nun entsprechen in der perspektiven Affinität eigentlichen Punkten eigentliche, und uneigentlichen uneigentliche. Daher stimmen k_1 und k_2 auch in der Art überein, was zu beweisen war.

Beweis von Satz 13b: Man konstruiert wie bei 13a einen zentrisch-kollinearen Kreis k_3. Nach Satz 6 muss dieser zentrisch-kollinear mit der Bildfigur k_2 des gegebenen Kegelschnittes k_1 sein, und zwar bzgl. der gleichen Achse s, daher ist k_2 ebenfalls ein Kegelschnitt, was zu beweisen war.

Viktor Krakowski

*) Fig. 17, 18, 19 siehe Titelseite dieser Nummer.

KLEINE SCHWEIZERCHRONIK

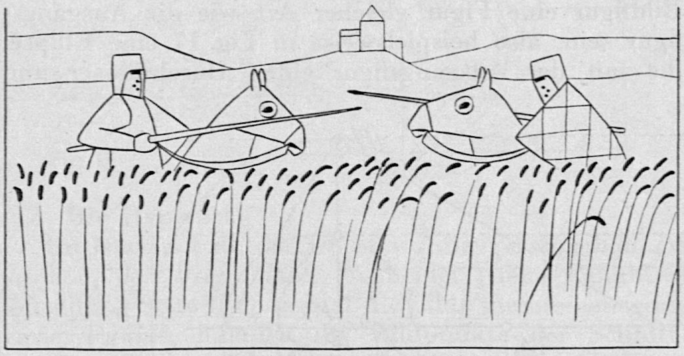
(Siehe die ersten drei Lieferungen in SLZ 17, 18 und 19)

IV. Zürich und die Habsburger

Seite 16, oben Text, unten Bild:

Die kaiserlose, schreckliche Zeit.

Nach dem Tode des guten Friedrich (1250) wurde kein neuer Kaiser gewählt. Viele Adelige erhoben jetzt frech ihr Haupt: Es war ja kein Herr mehr da, dem sie gehorchen mussten! Grosse und kleine Herren versuchten ihr Gebiet zu erweitern, und darum lag bald jeder mit jedem im Streit. Unter diesen endlosen *Fehden* litten die Bauern am meisten.



Seite 17:

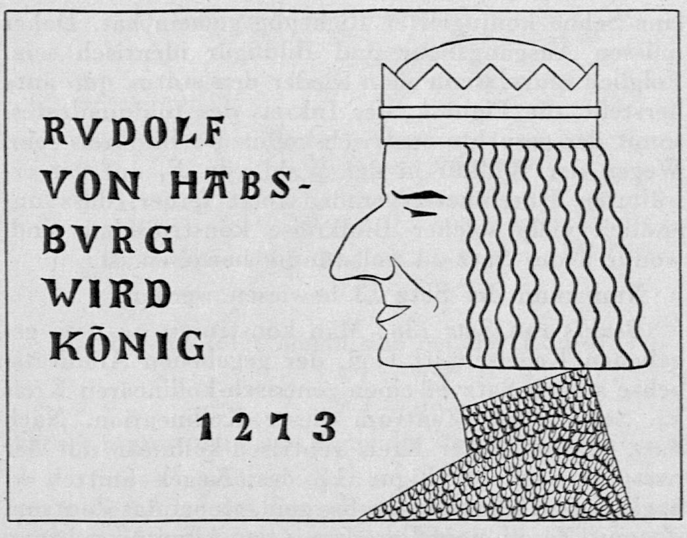
Die Regensberger Fehde.

In jener Zeit des «*Faustrechts*» hatten sich die Zürcher mit dem Freiherrn Lütold von Regensberg verfeindet. Der besass nämlich einige Burgen rings um die Stadt, und die Zürcher kamen sich vor «wie das Fischlein im Netz». Darum beschlossen sie, diese Burgen zu brechen.

Die gleiche Absicht hatte auch *Graf Rudolf von Habsburg*, weil auch er mit Lütold in Fehde lag. Mit vereinten Kräften stürmten Rudolf und die Zürcher jetzt Burg um Burg.

(Anschliessend könnte hier eine Nacherzählung mit freien Zeichnungen eingefügt werden: «Die Eroberung der Ütliburg» oder: «Glanzenberg».

Seite 18, oben Bild und Titel, unten Text:



Die sieben *Kurfürsten* wählten den klugen Grafen von Habsburg zum König, damit er endlich Ordnung schaffe im Reich. Aber das gelang auch Rudolf nicht recht. Dagegen verstand er es ausgezeichnet, das Königsamt geschickt *zum Nutzen seiner eigenen Familie* auszuüben.

Seite 19 (Fortsetzung):

So übergab er zum Beispiel das grosse Reichsland Oesterreich kurzerhand seinem Sohne *Albrecht* und machte ihn zum «*Herzog von Oesterreich*».

Die freien Reichsländer und -städte hatten damals nichts zu lachen!

Auch die Zürcher sollten sich über ihren jetzt so mächtig gewordenen Waffenkameraden noch schwer verwundern. König Rudolf setzte nämlich einen *fremden* habsburgischen Ritter als *Reichsvogt* in die Stadt, und die Bürger mussten schrecklich viele Steuern zahlen!

Seite 20:

Feindschaft gegen Habsburg.

König Rudolf starb im Jahre 1291. Viele, die von ihm bedrängt und ausgebeutet worden waren, erhoben sich jetzt:

Zürich, der junge Bund der Eidgenossen, Luzern, der Bischof von Konstanz, Bern und der Graf von Toggenburg schlossen sich zum Kampf gegen die verhasste Fürstenfamilie Habsburg-Oesterreich zusammen.

Die ungestümen Zürcher zogen allein vor die österreichische Stadt *Winterthur*. Aber dort gerieten sie in eine Falle und erlitten eine vernichtende *Niederlage!*

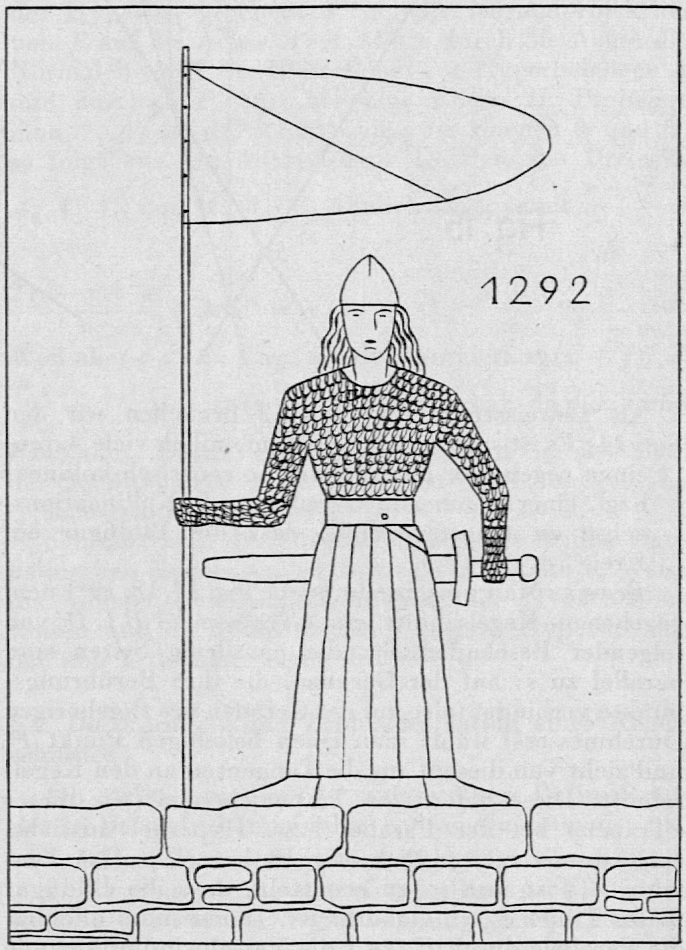
Seite 21:

Die tapferen Zürcherinnen.

Herzog Albrecht kam jetzt selber aus Oesterreich herbeigeeilt. Er erschien mit 2000 Rittern vor Zürich. Die Stadt schien verloren. Sie hatte ja kaum noch Verteidiger, denn ihre besten Männer lagen tot vor Winterthur.

Da griffen aber die tapferen Zürcherinnen zu den Waffen und sammelten sich auf dem Lindenhof. Die Sage erzählt, Albrecht habe die Frauen für ein mächtiges Heer gehalten, und darum sei er am nächsten Tage abgezogen.

Seite 22, Bild:



Seite 23:

Freundschaft mit Habsburg.

In Wirklichkeit hatte der kluge Herzog aber aus einem andern Grunde die Belagerung abgebrochen: Er suchte die Freundschaft der wohlbefestigten Stadt zu gewinnen! Noch im gleichen Sommer kam ein Friedensvertrag zustande, und als Albrecht einige Jahre später König wurde, empfingen ihn die Zürcher mit grossen Ehren.

Die Freundschaft überdauerte sogar des Königs Tod (1308 bei Windisch). So kam es, dass am Morgarten (1315) unter den habsburgischen Fahnen auch das Banner von Zürich wehte.

Hans Hinder.

Ulrich Weber †

Am 17. April verschied in Richterswil, wo er seinen kurzen Lebensabend verbrachte, alt Sekundarlehrer Ulrich Weber von Embrach.

Der Verstorbene gehörte zu jenen Lehrern, die nicht nur viel von ihren Schülern verlangten, sondern auch mit sich selbst streng waren. Dank diesem Einsatz des Willens und einer robusten Gesundheit war ihm ein selten reiches Wirken beschieden.

1883 im damals noch ländlichen Seebach geboren, konnte der begabte Jüngling ins Seminar Unterstrass eintreten. Seinen Lehrblätz bearbeitete der junge Primarlehrer an der Gesamtschule Dickbuch/Elgg, von wo er 1905 zu sechsjährigem Schuldienst an die Freie Schule Zürich 1 übersiedelte. Mit 28 Jahren setzte er sich nochmals selbst in die Schulbank, um Mathematik an der Zürcher Universität zu studieren. Auch das Sekundarlehrerpatent erwarb er sich nach glänzend bestandenem Ergänzungsexamen. 1914 übernahm er die Nachfolge des unermüdlichen Ernst Schneider an der bis 1928 ungeteilten Embracher Sekundarschule.

Ulrich Weber war ihm ein würdiger Nachfolger. In der Schule wusste der Mathematiker manche Deutschstunde zu einer unvergesslichen Feierstunde für unsere, von ihm so hochverehrten einheimischen Bauerndichter Huggenberger, Gfeller und besonders für den hier aufgewachsenen Jakob Bosshart zu gestalten. Zutiefst war er mit dem Land verbunden und als eifriger Gärtner mit der Natur eng vertraut. Diese Heimatliebe beseelte ihn auch auf Schulreisen oder Wanderungen über die Höfe der Umgebung. Liebe zum Stoff, begeisterungsfähige, jugendliche Hingabe und ein sonniges Gemüt rissen seine Schüler mit. Aufgeschlossen für alles Neue, wusste er jede Erstarrung und Routine zu vermeiden. Schülerkonzerte, ein Pestalozzispiel oder die «Heidi»-Aufführungen waren ihm nie zuviel. An der «Landi»-Musterschule hielt er schwungvolle Probelektionen. Ja, sein Name als erfahrener Pädagoge besass über die Talschaft hinaus so guten Klang, dass eine Radioreportage über die Landschule von Embrach bestritten wurde. Natürlich fehlte es dem bekannten Lehrer nicht an verlockenden Angeboten, aber er liebte das stille Tal zu sehr, um sich von ihm trennen zu können.

Bedeutend sind Ulrich Webers Verdienste um die Musikpflege im dörflichen Vereinsleben. Um so erstaunlicher, dass er darüber hinaus noch Zeit fand, auf sozialem Gebiet emsig zu wirken. 20 Jahre lang amtierte er als hingebender Aktuar der Gemeinnützigen Bezirksgesellschaft, wo er zur Verwirklichung des Ferienkoloniegedankens entscheidend beitrug. Auch das Aktuariat der Bezirksschulpflege Bülach brachte ein bedeutendes Arbeitspensum. Die Eingabe der Bülacher Behörde vom Juni 1932, die den eigentlichen Anstoss zu den vielen bisherigen Entwürfen und Debatten gegeben hat, ist weitgehend auf Ulrich Webers Vorschläge zurückzuführen. Daneben wirkte er im stillen noch manches Gute, um das nur die dankbaren Bezüger von Stipendien oder die bei der Kriegsfürsorgestelle Hilfesuchenden wissen.

Ein reiches Familienleben war ihm beschieden; vier Kinder, die er zu tüchtigen Menschen heranwachsen sehen durfte, hatte ihm seine frühverstorbene Gattin geschenkt. Seine zweite Frau stand ihm in den letzten Jahren hilfreich und sorglich zur Seite.

Bis zum letzten Schultag in ungebrochener Frische arbeitend, trat er 1950 in den wohlverdienten Ruhestand. Aber nun zeigten sich die Folgen seiner Anstrengungen plötzlich; ein schweres Herzleiden und Asthmaanfälle folgten dem Rücktritt und bedrängten ihn zuletzt so sehr, dass der Tod als Erlöser kam.

P. R.

Internationale Lehrertagungen in Deutschland

Die Arbeitsgemeinschaft der Lehrerverbände Westdeutschlands führt diesen Sommer mehrere internationale Tagungen durch. Diese Begegnungen sollen bezwecken, die lange Zeit unterbrochenen, gegenseitigen Beziehungen der Lehrer verschiedener Länder wieder aufzunehmen und durch eigene Anschauung von den heutigen Bemühungen der deutschen Kollegen Kenntnis zu nehmen.

Für die Begegnung vom *8.—15. August 1951*, die im Landschulheim Sonnenberg bei St. Andreasberg im Harzgebiet stattfinden wird, werden hiermit auch Kolleginnen und Kollegen aus der Schweiz freundlichst zur Teilnahme eingeladen. Neben Kollegen aus Deutschland werden an dieser Tagung auch Kollegen aus Belgien und Österreich teilnehmen. Aus verschiedenen Gründen wären die Kollegen aus Deutschland vor allem für eine recht grosse Beteiligung aus der Schweiz sehr dankbar. Die Teilnehmer aus der Schweiz sind zudem für die ganze Dauer der Tagung Gäste der veranstaltenden Lehrerverbände, und erhalten als solche im Landschulheim Sonnenberg entsprechend den dortigen Verhältnissen freie Unterkunft und Verpflegung.

Neben Vorträgen und Referaten bekannter Persönlichkeiten Westdeutschlands über die verschiedenen Probleme in der Erziehung und der Gegenwart, sollen eine Rundfahrt durch den Harz, eine Besichtigung von Goslar und Hannover, Besuch im dortigen Landestheater, die Teilnahme an verschiedenen andern kulturellen Veranstaltungen, Fabrikbesichtigungen im Industriegebiet (Braunschweig-Salzgitter) die Tagung erweitern. Selbstverständlich wird den Teilnehmern auch Gelegenheit geboten, durch direkte Einblicke in das dortige Schulwesen neuzeitliche Erziehungsmethoden zu studieren. Genaues Programm und weitere Mitteilungen werden persönlich versandt. Vom 16.—20 August 1951 findet die Tagung mit einem Aufenthalt bei Kollegen in Hannover ihren Abschluss.

Kolleginnen und Kollegen aller Schulstufen, die sich für eine Teilnahme an oben erwähnter Begegnung in Deutschland entschliessen können, wollen sich bitte umgehend, spätestens aber bis Ende Mai 1951, an den Unterzeichneten wenden, der gemäss übernommenem Auftrag Anmeldungen entgegennimmt und dann auch für eine Kollektivreise ab Basel besorgt ist. *Kosten für Bahnfahrt*, je nach Teilnehmerzahl, ca. Fr. 50.—/60.—, für Hin- und Rückreise.

R. Wiedmer, Lehrer, Gelterkinden (BL)
Telephon (061) 7 70 82

Pestalozzianum Zürich Beckenhofstraße 31/35

Samstag, 26. Mai, 14.15 Uhr, im Neubau, Eröffnung der Ausstellung

«S Züripiet»

Die Ausstellung zeigt:

Der Stand Zürich. Die Stadt Zürich: Lage, Entwicklungen. Der Zürichsee: Verstädterung, Schiffahrt, Fischerei.
Die Stadt Winterthur: Lage und Entwicklung; Beziehung zur Landschaft und zur Stadt Zürich; einheimisches Handwerk und weltweit wirkende Industrie, Kunst.
Limmattal: Gaswerk, Industrie, die erste Eisenbahn.
Furttal: Katzensee, Regensberg, der Kalk.
Rafzerfeld: Grenzland, Eglisau und das Kraftwerk.
Glattal: Das breite Tal mit dem Flughafen.
Weinland: Rebbau, Rheinfall, Rheinau.
Tösstal: Baumwollindustrie, Heimarbeit, Kleinbauern.
Oberland: Flarzhaus, Wildbach, Ritterhaus Bubikon.
Amt: Türlersee, Naturschutz, Sitten und Gebräuche.
Zürcherische Lehrer als Maler, Dichter und Musiker für die Jugend.
Die Verwaltung einer Gemeinde.

Während der Ausstellung werden in der Regel an Samstagnachmittagen (15.00 Uhr) Lehrproben veranstaltet.

Schulfunk

Dienstag, 22. Mai: **Nur ein Ziegel.** Hörfolge von Ernst Grauwiller.

Freitag, 25. Mai: **Zürcher und Eidgenosse.** Jubiläumssendung zur 600-Jahrfeier des Beitritts von Zürich zur Eidgenossenschaft.

Kurse

Schweizerischer Lehrerbildungskurs 1951 in Luzern

Es sind rund 700 Anmeldungen eingegangen, wovon 160 aus dem Kanton Luzern und 120 aus der Innerschweiz. Der Kurs Arbeitsprinzip Unterstufe muss dreifach geführt werden (neue Kursleiter: J. Menzi, Zürich; A. Burkhardt, Bern). Doppelt geführt werden folgende Kurse: Heimatkunde, Muttersprache Primar und Sekundar, Sandkasten und Wandplastik, Wandtafelzeichnen und der Schnitzkurs (neuer Leiter: J. Eberhardt, Bischofszell). Wegen zu kleiner Anmeldezahl mussten wegfallen: Deutschkurs für Welsche und Fortbildungskurs Holzarbeiten. Die Teilnehmer erhalten bis Ende Mai Mitteilung über Aufnahme, Zuteilung und Unterkunft. *ng*

Basler Schulausstellung **Münsterplatz 16**

Veranstaltungen über Volkskunde

23. Mai. Herr Gustav Müller, Lausen: «Sagensammeln und Volkskunde als Bereicherung des Schulunterrichtes.»

30. Mai. Herr Prof. Dr. W. Baumgartner, Basel: «Bibel und Volkskunde»; Herr Dr. Ernst Baumann, Therwil: «Katholischer Volksbrauch.»

Schweizerischer Lehrerverein

Sekretariat: Beckenhofstrasse 31, Zürich; Telephon 28 08 95
Schweiz. Lehrerkrankenkasse Telephon 26 11 05
Postadresse: Postfach Unterstrass Zürich 35

Unfall- und Haftpflichtversicherung für Mitglieder des SLV *Wichtig!*

Die grosse Bedeutung einer Unfall- und Haftpflichtversicherung für Angehörige des Lehrerstandes hat den Schweizerischen Lehrerverein schon im Jahre 1919 veranlasst, mit der «Winterthur», Schweizerische Unfallversicherungsgesellschaft in Winterthur, und der «Zürich», Allgemeine Unfall- und Haftpflicht-Versicherungs-Aktiengesellschaft in Zürich, einen Vertrag abzuschliessen, laut welchem unsern Mitgliedern für die persönlichen Einzel-Unfallversicherungen wie auch für ihre Berufs-Haftpflichtversicherungen *weitgehende Vergünstigungen gewährt werden.*

Für Kollegen, die durch die Schulbehörden bereits für Unfälle während des Schulbetriebs versichert sind, wird auf Antrag die *Versicherung auf ausserberufliche Unfälle* beschränkt, was eine Prämiensenkung von 30% zur Folge hat.

Durch eine Jahresprämie von nur Fr. 2.50 kann man sich auch zur Deckung der Folgen der *gesetzlichen Haftpflicht aus der Tätigkeit als Lehrer* versichern. Auf Wunsch kann die *private Haftpflicht* einbezogen werden; auf die hieraus sich ergebende Prämienerhöhung gewährt die Versicherung 10% Spezialrabatt.

Bei zehnjährigen Verträgen wird ein Rabatt von 10% eingeräumt; wird die Prämie hiefür für 10 Jahre vorausbezahlt, erhält man weitere 15% Rabatt, bei Vorausbezahlung für 5 Jahre 10% Rabatt. Die Policegebühren werden auf Fr. 1.50 ermässigt.

Für den SLV selbst ergibt sich ein Vorteil, indem beide Gesellschaften eine Kommission von 3% der Brutto-Prämieneinnahme in die Zentralkasse des SLV einbezahlen.

Wir empfehlen allen unsern Mitgliedern, die noch keine Unfall- oder Haftpflicht-Versicherung besitzen, sich zu einem Vertragsabschluss zu entschliessen und sich dabei an eine der genannten Versicherungsgesellschaften oder deren Agenten zu wenden. Auch das Sekretariat des SLV ist zur Auskunft gerne bereit. *Bei Anmeldungen bei einer der beiden Versicherungsgesellschaften ist die Mitgliedschaft beim Schweizerischen Lehrerverein ausdrücklich zu erwähnen.*

Der Präsident des SLV: *Hans Egg.*

Schweizerisch-Deutsche Jugendschriftentagung

Die diesjährige Jahresversammlung der Jugendschriftenkommission des SLV wird am 26. und 27. Mai in Kreuzlingen und Konstanz abgehalten. Am Morgen des Samstags findet die Geschäftssitzung der Kommission statt. Die übrigen Veranstaltungen werden gemeinsam mit deutschen Jugendschriftenfreunden durchgeführt und sind auch weiteren Interessenten aus schweizerischen Kollegenkreisen zugänglich.

Programm:

Samstag, den 26. Mai 1951, 14.30 Uhr, im Musiksaal des Seminars Kreuzlingen:

1. Begrüssung durch den Präsidenten des SLV, Herrn Hans Egg, Zürich.
2. Referat von Herrn Hans Cornioley, Bern, Präsident der Jugendschriftenkommission des SLV: «Die Lage im schweizerischen Jugendschriftentum.» Führung durch die Jugendschriften-Wanderbücherei des SLV.
3. Referat von Herrn Alfred Herr, zweitem Vorsitzenden der Vereinigten Jugendschriftenausschüsse Hamburg: «Der Aufgabenbereich der Vereinigten Jugendschriftenausschüsse mit besonderer Berücksichtigung des gegenwärtigen Jugendschriftentums.»
4. Aussprache.

*

Sonntag, den 27. Mai 1951, 09.30 Uhr, in Konstanz, im Hotel «Deutsches Haus»:

1. Erfahrungsaustausch, eingeleitet durch die Präsidenten der Jugendschriftenausschüsse.
2. Besichtigung einer deutschen Jugendbücherei.

Für den Besuch der Veranstaltung in Konstanz ist eine Identitätskarte mit Photo oder ein Pass (gültig oder abgelaufen) unerlässlich. *V.*

Schriftleitung: Dr. Martin Simmen, Luzern; Dr. Willi Vogt, Zürich; Büro: Beckenhofstr. 31, Zürich 6. Postfach Zürich 35. Tel. 28 08 95. Administration: Zürich 4, Stauffacherquai 36. Postfach Hauptpost. Telephon 23 77 44. Postcheckkonto VIII 889.

Es ist nicht gut, dass der Mensch allein sei

Suchen auch Sie Ihr Glück zur **Ehe** durch das kath., erfolgreiche, staatl. konzessionierte Büro Elisabet Fuchs **LUZERN** Theaterstrasse 13 Tel. (041) 2 52 37

Hanover School of Higher Education and Modern Languages

Englischkurse für Anfänger, Mittelstufe und Oberstufe. Unterkunft vermittelt. Sprachschule im Zentrum Londons. Hochqualifizierte Lehrkräfte. Weitere Ausbildung in Bürgerkunde für Mädchen.

HANOVER SCHOOL, 1 Hanover Square, **London W. 1.** Telephone Grosvenor 7347, 7348.

Lehrer auf dem Land finden oft keine angemessene Wohnung

Ein eigenes Heim

ist darum die ideale Lösung für das Glück ihres Hausstandes. Wir beraten Sie unverbindlich. Besuchen Sie unsere Ausstellung einfacher Einfamilienhäuser. Eintritt frei. (P 5443 Q) 176

Immobilien Alban AG. Geschäftsstelle der Kobag Spar- Bau- und Hypothekenbank AG., **Zähringerstrasse 21, Zürich**

Schulheim vermietet sein **BERGHAUS** komplett eingerichtet, 27—30 Betten, für längere oder kürzere Zeit an gutgeführte Ferienkolonie oder Heim. Offerten unter Chiffre SL 165 Z an die Administration der Schweiz. Lehrerzeitung, Postf. Zürich 1.

Zu verkaufen neues

modernes Einfamilien-Chalet

Alleinstehend, unverbaubar, erhöhte, schönste aussichtsreiche Lage, Nähe Bruggs, 7 Zimmer, moderne Küche, Einbaubad, gedeckter Vorplatz, Vorraum, Loggia, Waschküche, Keller, Abstellraum, Vorraum, Garage oder Werkstätte. Das Chalet ist rings umgeben mit Ziergarten (Weiherli), Obst-, Beeren- und Gemüsegarten. Für Pensionierten ein ausgezeichneter Sonnensitz. Kaufpreis 64 000 Franken.

Kapitalkräftige Interessenten melden sich unter Chiffre SL 182 Z bei der Administration der Schweizerischen Lehrerzeitung, Postfach Zürich 1.

Schulen der Stadt Zug 185

Wir suchen zum sofortigen Eintritt einen **Lehrer-Stellvertreter** für eine Mittelklasse. — Anmeldungen an Schulpräfektur der Stadt Zug.

Berufsschule des Kaufmännischen Vereins Winterthur

Auf Frühjahr 1952 ist die Stelle eines

Hauptlehrers

für Deutsch mit Korrespondenz und Englisch neu zu besetzen. In Frage kommt eine jüngere Lehrkraft mit abgeschlossenem akademischem Studium. Bewerber mit längerem Aufenthalt im englischen Sprachgebiet erhalten den Vorzug. 187

Wöchentliche Pflichtstundenzahl 28.

Städtische Pensionskasse.

Handschriftliche Offerten mit Angaben über Bildungsgang, bisherige Praxis, nebst Zeugnisabschriften und Photo sind bis spätestens 30. Juni 1951 einzureichen an die **Schulleitung,** Merkurstrasse 23, **Winterthur,** Telephon (051) 2 30 20, die über die Anstellungsverhältnisse nähere Auskunft erteilt.

Die Aufsichtskommission.


Ausflüge
Ferien

UNTERWALDEN

Berghaus Tannalp Frutt

Telephon 85 51 42 — 1982 m ü. M.

Das Haus für Ihren Schulausflug. Jugendherberge. Route: Melchtal — Stöckalp — Frutt — Tannalp — Engstlenalp — Jochpass — Engelberg. Prächtige Lage. Mittelpunkt der Passwanderung. Neues Haus mit fl. Wasser, billige Preise. P 7096 Lz

Besitzer: Frid. Durrer, Leitung: **N. Glattfelder.**

Vierwaldstättersee

Brisenhaus 1753 m

der Sektion Pilatus des Schweizerischen Alpenclub, am Fusse des Brisen, Kt. Nidwalden

Schönes Reiseziel für Bergwanderungen. Angenehmer Aufenthaltsort für Ihre Ferientage. Schönes Skigebiet im Winter.

Bequeme Zufahrt mit Luftseilbahnen ab Beckenried und Dallenwil, von dort noch höchstens 1½ Stunden zu Fuss. Leichte, lohnende Bergtouren mit Blick auf Vierwaldstättersee und die nahen Hochalpen. OFA 6395 Lz
Neuzeitlich eingerichtet. Elektrisches Licht und fliessendes Wasser, 60 Schlafplätze. Selbstverpflegung od. auf Wunsch preiswerte Pension durch den Hauswart. Tel. (041) 84 14 91.
Ermässigte Preise für Vereine und Schulen.
Nähere Auskünfte und Reservationen durch Hüttenchef **P. C. Huguenin,** Gerbergasse 6, **Luzern.** Tel. (041) 2 90 24.

BERN

Pension Friedegg, Aeschi ob Spiez 950 m ü. M.

Das ganze Jahr geöffnet. Alle Zimmer mit fl. Wasser. Garage, Park. Ruhige, sonnige Lage und sorgfältige Küche. Ihr heimeliger Ferien- und Kurort. Speziell schöner Familienort. Pension ab Fr. 10.—. Prospekte zu Diensten. — Mit höflicher Empfehlung
(P 1114 Y) **Fam. Meichtry-Berger,** Tel. (033) 5 68 12.

AXALP 1540 m ü. M. ob Brienz **Kurhaus AXALP**

Postauto ab Brienz-Endstation. Bestbekanntes Haus für Ruhe und Erholung. Selbstgeführte Küche. Grosses Tourengebiet. Pensionspreis Fr. 11.50—13.—. Prospekte. Tel. 2 81 22. Bes. *Familie Rubin.*

Das Schulreisli

in den Tierpark **Bern** mit anschliessender Stärkung im bekannt vorzüglichen

Tierpark-Restaurant

Dählhölzli TEL. 21894

P 9785 Y

Sporthotel Wildstrubel Gemmipasshöhe, 2322 m ü. M.

Der Pass kann voraussichtlich ab 15. Juni begangen werden. Spezialpreise für Schulen. Prospekte mit Preisliste zur Verfügung. Schwebebahn Kandersteg-Stock ab 15. Juni in Betrieb.
OFA 1879 A **Familie Léon de Villa.**

Giessbach **Park-Hotel Giessbach**

am Brienzersee 720 m ü. M. **Telephon** 2 84 84

Die berühmten 300 m hohen Wasserfälle. Das ideale Ausflugsziel für Schulen und Gesellschaften. Prachtvoller Spazierweg nach Iseltwald (1½ Stunden).

Restaurations- u. Aussichtsgarten für 500 Personen. Spezielle Schülermenüs. Prospekte und Exkursionskarten werden den Herren Lehrern gratis abgegeben.

OFA 6313 Lz

Grindelwald *Hotel Central Wolter*

Restaurant / Tea Room / Confiserie

Spezialpreise für Schulreisen.

Telephon 3 21 08 Höfl. empfiehlt sich **E. Crastan**

Schöne Ferien verbringen Sie bei guter und reichlicher Verpflegung zu 8—9 Fr. Pensionspreis in der

Pension «HEIMELY» Haltenegg

mit eigener Landw. in *Goldiwil.* Jede weitere Auskunft erteilt gerne *Walter Baumann jun.,* Pension «Heimely», *Haltenegg* ob Thun. — Telephon 5 92 31.

HILTERFINGEN Seehof

Geeignete Lokalitäten für Schulen und Gesellschaften, grosser Rest.-Garten. Gute Küche. **Edwin Blaser,** Tel. (033) 5 92 26.

KLEINE SCHEIDEGG

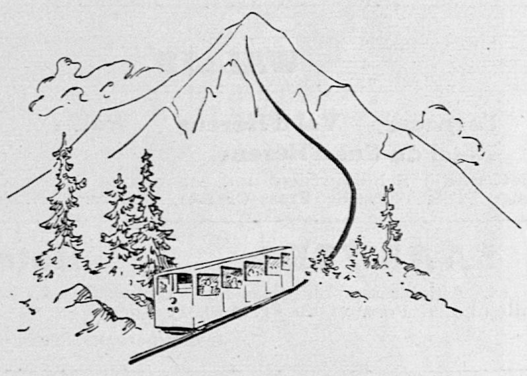
Touristenhaus Grindelwaldblick

Gutes, heizbares Massenlager, ideal für Schulen. Gute Verpflegung, mässige Preise. OFA 3466 B
P. Renevey-Kaufmann, Tel. (036) 3 43 74.

Meiringen und das Haslital

für Schulausflüge unbegrenzte Möglichkeiten

Jochpass, Sustenpass, Grimsel, Grosse Scheidegg, Brünig, Aareschlucht, Gletscherschlucht Rosenlaui, Reichenbachfälle. Kirchenausgrabungen in Meiringen. Ueberall gute Unterkunftsmöglichkeiten. Vogelschaukarte sowie alle Auskünfte gratis durch Verkehrsbüro Meiringen, — Tel. 157.



NIESEN-KULM

2362 m — das beliebte Ausflugsziel

WENGEN **Hotel Alpenruhe-Kulm**

Jeder Tag ein Genuss — eine Erholung. Geöffnet vom 8. Mai bis 30. Okt. und 15. Dez. bis 10. April. Wochenpauschale ab Fr. 112.—. Jeder Komfort. Telephon 3 43 51. *H. Gyger.*
Chalet Breithorn: 2 Wohnungen zu vermieten.

Kandersteg **Vielseitiger Ferienort 1200 m ü. Meer**

Staubfreie Autostrasse, reizende Spazierwege, schönste Bergtouren, Schwimmbad. In 9 Minuten führt Sie die **Sesselbahn** in das prächtige Gebiet des **Oeschinensees,** 1700 m über Meer.
Auskunft: Verkehrsbüro, Telephon (033) 8 20 20.

FREIBURG

G F M

Besuchen Sie Freiburg und sein Greyerzerland mit Bahn und Autocars

Telephon Freiburg (037) 2 12 61
Bulle (029) 2 78 85

MURTEN **Hotel Enge**

Das Haus für Schulen und Gesellschaften. Grosse Räume, grosser Garten, mässige Preise. Bes. E. Bongi, Küchenchef, Tel. 7 22 69

MURTEN **Hotel Murtenhof**

bürgt für gut essen Prächtige Lage mit Aussicht auf den See. Bes. Familie A. Bohren, Tel. (037) 7 22 58.

MURTEN **Hotel Schiff**

Dicht am See, grosser schattiger Restaurationsgarten und Räumlichkeiten für Schulen und Gesellschaften. Parkplatz. Bes. Familie Lehmann-Etter, Tel. 7 26 44.

VAUD

Hôtel-Restaurant du Signal de Bougy (Vaud)

but idéal pour vacances ou courses scolaires. Tél. (021) 7 82 00

MONTREUX **Hotel Helvétie et des Familles**

Restaurant «La Cloche», Tea-Room, alkoholfrei. Zimmer und Schlafsäle. Günstige Arrangements für Schulreisen. Direktion: Frl. E. Krähenbühl, Tel. (021) 6 24 62.

Rochers de Naye ob Montreux 2045 m

Das schönste Ausflugsziel der Westschweiz. Alpiner Garten. Wunderschöne Aussicht über die Berner, Walliser und Savoyer Alpen.

Hotel des Rochers de Naye: Gut eingerichtete Massenlager — gepflegte Küche. Reduzierte Preise für Schulen. Auskunft durch die Direktion der Rochers-de-Naye-Bahn in Montreux.

WALLIS

Ferpècle — Val d'Hérens — Wallis 1800 m
Hôtel du Col d'Hérens

25 Betten. Für Schulausflüge und angenehme Ferien. Gute Küche mässige Preise. Familie Frass-Crettaz, Besitzer, Tel. (027) 4 61 74.

SAAS-FEE **Hotel Dom**

1800 m. Autostrasse bis Saas-Fee. Gutgeführtes, komfortables Familienhotel. Pension ab Fr. 12.50. Prospekt.
Jos. Supersax. Tel. (028) 7 81 02.

Eggishorn
Riederalp

Die traditionellen und beliebten Ausflugsziele für Schulen — Eggishorn, Aletschgletscher, Märjelensee, Aletschwald — Geeignet auch für Ferienaufenthalte Familie Emil Cathrein

Luftseilbahn Mörel—Riederalp

TESSIN

Casa Coray **Agnuzzo-Lugano**

das ideale Haus für Schulen und Gesellschaften. Tel. (091) 2 14 48
OFA 41052 Z

Nach den Brissago-Inseln

empfehle ich Ihnen das neue Pullmannschiff, geeignet für Schul und Gesellschaftsreisen.
L. Poroli, Porto-Ronco Telephon (093) 8 24 3

VILLA Margherita

Hotel Villa Margherita
Bosco bei Lugano

Gepflegtes Kleinhotel in herrlicher, ruhige Aussichtslage mit Park u. Schwimmbassin Gute Verbindung mit Lugano. Gute Küche Pensionspreis ab Fr. 14.—. Prospekte
Familie K. Herzog Telephon (091) 2 48 5

Jugendherberge Casoro Post Figino bei Lugano

empfiehlt sich für Schulreisen und Klassenlager. Bester Ausgangspunkt nach Carona—San Salvatore. Gute Verpflegung zu bescheidenen Preisen. Küche für Selbstkocher. Telephon (091) 3 31 51

LOCARNO - HOTEL REGINA Zentrale Lage am See

jeder Komfort, Lift, Garten-Restaurant, gepfl. Küche. Pension ab Fr. 15.-

LOCARNO-MINUSIO **Pension Lorele**

Direkt am See, mit eigenem See- und Badestrand, Ruderboot heimeliges Haus, prächtige Seeterrasse. Pension alles inbegriffen Fr. 14.—. Frau Vögeli, früher Basilea Ascona, Tel. 7 15 05

Gute, schöne und billige Ferien ist der Wunsch aller. Hier empfiehlt sich:

Pension Müller Locarno-Monti

Wochenpauschalpreis Fr. 107.— bis Fr. 115.—. Prospekte und Referenzen zu Diensten.

MURALTO-LOCARNO **Pension Gassmann**

Gut geführtes Haus, zentral gelegen. Pensionspreis ab Fr. 11.-. Prospekte zu Diensten. Fr. A. Morano-Gassmann, Telephon 7 48 2

Für Ihre

FERIEN IN LUGANO

verlangen Sie zuerst Offerte vom

HOTEL DU MIDI

des direkt am See gelegenen Kleinhotels, das Ihnen ideale Voraussetzungen, modernen Komfort, vorzügliches und reichhaltiges Essen und günstige Arrangements bietet. Es erwartet Sie gerne Fam. M. Lory-Haller, Telephon (091) 2 37 03. AS 503 L

GRAUBÜNDEN

HOTEL MARSÖL CHUR

b. Rät. Museum, wird Sie anlässlich Ihres Vereins- od. Schulausfluges vorzüglich u. preiswert verpflegen in seinem schönen, geräumigen Restaurant oder Garten. Konzertsaal. Schöne Zimmer mit fl. Wasser für Feriengäste. Pension ab Fr. 12.50. Es empfiehlt sich
H. Cuoni

DAVOS **Sporthotel Beau-Séjour**

Ideales Hotel für Ihre Sommerferien. Für Essen bei Schulreisen günstige Preise. Bekannt vorzügl. Küche. Ganzjährig geöffnet

HOTEL MEISSER GUARDA
(Engadin).

Gepflegtes Haus. Vor- und Nachsaison ermässigte Preise. *A. Fanconi.* - Telephon (084) 9 21 32. OFA 536 D

Sommerferien in den Bündner Bergen

dann **Hotel Ravizza-National,** San Bernardino Dorf, 1600 m ü. M. — Pension von Fr. 13.— an Familien-Spezialpreis. Prosp. Tel. (092) 6 26 07

AZ Zürich 1

AG. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich

DER PÄDAGOGISCHE BEOBACHTER
IM KANTON ZÜRICH

Organ des Kantonalen Lehrervereins • Beilage zur Schweizerischen Lehrerzeitung

18. Mai 1951 • Erscheint monatlich ein- bis zweimal • 45. Jahrgang • Nummer 9

Zürcherischer Kantonaler Lehrerverein

Ordentliche Delegiertenversammlung

Samstag, den 26. Mai 1951, 14.30 Uhr,
im Hörsaal 101 der Universität Zürich

Geschäfte:

1. Protokoll der ordentlichen Delegiertenversammlung vom 3. Juni 1950 (Pädagogischer Beobachter, Nr. 12/1950).
2. Namensaufruf.
3. Mitteilungen.
4. Entgegennahme des Jahresberichtes pro 1950 (Pädagogischer Beobachter, Nrn. 5, 6, 7, 8, 9/1951).
5. Abnahme der Jahresrechnung pro 1950 (Pädagogischer Beobachter, Nr. 8/1951).
6. Voranschlag für das Jahr 1951 und Festsetzung des Jahresbeitrages (Pädagogischer Beobachter, Nr. 8/1951).
7. Wahlen:
   a) Wahl eines Rechnungsrevisors für den zurückgetretenen E. Jucker, Uster.
   b) Wahl eines Delegierten in den SLV (Vorschlag der Sektion Horgen).
   c) Wahl eines Delegierten in den KZVF (Vorschlag der Sektion Horgen).
8. Wahlvorschläge zuhanden der kantonalen Schulsynode:
   a) Vertreter der Volksschullehrerschaft im Erziehungsrate.
   b) Synodalaktuar.
   c) Synodaldirigent.
   d) Neues Mitglied der Kommission zur Förderung des Volksgesanges.
9. Allfälliges.

Zürich, den 10. Mai 1951.

Für den Vorstand des ZKLV:
Der Präsident: *J. Baur*
Der Aktuar: *E. Weinmann*

Gemäss § 31 der Statuten hat jedes Mitglied des ZKLV in der Delegiertenversammlung beratende Stimme.

Die Delegierten ersuchen wir um vollzähliges Erscheinen und bitten diejenigen, die an der Teilnahme verhindert sind, *dies dem Präsidenten des ZKLV rechtzeitig mitzuteilen und für Stellvertretung zu sorgen (§ 32 der Statuten).*

Zürch. Kant. Lehrerverein

Jahresbericht 1950

(Schluss)

Jubiläumsgabe des Zürcherischen Kantonalen Lehrervereins an den Schweizerischen Lehrerverein (SLV)

Im Jahre 1949 konnte der Schweizerische Lehrerverein, dem auch der Zürcherische Kantonale Lehrerverein als Sektion angehört, sein 100jähriges Bestehen feiern. Dieses aussergewöhnliche Ereignis veranlasste die Präsidenten der verschiedenen kantonalen Sektionen, zu beschliessen, es sei den Sektionen zu empfehlen, dem Jubilar Gaben zugunsten seiner Wohlfahrtseinrichtungen (Lehrerwaisenstiftung und Hilfsfonds) zu überreichen. Die ausserordentliche Delegiertenversammlung vom 14. Januar 1950 hiess den Antrag des KV einstimmig gut, zugunsten einer Jubiläumsgabe an den SLV einen Sonderbeitrag von Fr. 5.— pro Mitglied einzuziehen.

Die Aktion konnte gegen Ende des Berichtsjahres abgeschlossen werden. Sie ergab nach Abzug bescheidener Spesen den Ertrag von Fr. 9 370.20. Der KV rundete diese Summe auf Fr. 9 500.— auf und wies Fr. 7 000.— der Lehrerwaisenstiftung und Fr. 2 500.— dem Hilfsfonds des SLV zu. Wir möchten an dieser Stelle den herzlichen Dank für die reiche Gabe, den Kollege Hans Egg, Präsident des SLV, uns aussprach, an unsere Mitglieder weitergeben und auch unsererseits allen für ihre Gabe bestens danken. Mit ihrer Jubiläumsgabe an den SLV hat auch die Lehrerschaft des Kantons Zürich erneut bewiesen, dass Solidarität und Hilfsbereitschaft für sie nicht leere Worte, sondern Begriffe sind, die zu Taten verpflichten. (Päd. Beob. Nrn. 17/1949 und 14/1950.)

Darlehenskasse

Das im Vorjahre einem in finanzielle Bedrängnis geratenen Kollegen gewährte Darlehen ist bis auf Fr. 127.— getilgt worden. Der Rest wird in kleinen Raten im kommenden Jahre zurückbezahlt werden.

Unterstützungskasse

Einem durchreisenden Kollegen ist ein Zuschuss von Fr. 25.— zum Reisegeld gewährt worden. Sonst sind keine Unterstützungsgesuche an den Vorstand gelangt.

Rechtsgutachten

Das im Jahre 1950 eingeholte grössere Rechtsgutachten befasste sich mit der Frage, wie weit ein Lehrer verpflichtet ist, einer Amtsstelle über einen Schüler, seinen Charakter und seine persönlichen Verhältnisse Auskunft zu erteilen.

Die Frage wurde gestellt, weil verschiedene Auskünfte von Lehrern an Fürsorgestellen bis zu den Eltern durchsickerten, was den Auskunftsgebern unangenehme Anrempelungen eintrug.

Das Gutachten verweist in erster Linie auf Art. 60 des Zürcherischen Einführungsgesetzes zum Schweizerischen Zivilgesetzbuch, nach dem namentlich Gerichts- und Polizeibeamte, Armen- und Untersuchungsbehörden, Lehrer und Geistliche in Fällen, die das Einschreiten einer Vormundschaftsbehörde rechtfertigen, anzeigepflichtig sind. Aus dieser Anzeigepflicht wird die Verpflichtung zur Auskunfterteilung gegenüber Vormundschaftsbehörden abgeleitet, die einzuschreiten gedenken, wenn ihnen die dauernde Gefährdung des leiblichen oder geistigen Wohles eines Kindes von anderer Seite zur Kenntnis kommt.

Eine Anzeige- oder Auskunfterteilung an Behörden ist aber nicht ohne Gefahren, da es gelegentlich vorkommt, dass sich Betroffene in ihrer Ehre verletzt fühlen und Strafanzeige erstatten.

In einem solchen Fall bietet Art. 32 des Schweizerischen Strafgesetzbuches, welcher u. a. bestimmt, dass die Tat, die das Gesetz oder eine Amts- oder Berufspflicht gebietet, kein Vergehen ist, einen weitgehenden Schutz. Immerhin wird wohl in jedem Fall untersucht werden, ob der Anzeiger oder Auskunftgeber in gutem Glauben und in Wahrung legitimer, öffentlicher Interessen gehandelt hat, oder ob sein Bericht leichtfertig erfolgt ist. Wäre das letztere der Fall, würde eine Ahndung möglich oder wahrscheinlich sein.

Trotz der aufgezeigten Gefahr besteht für den Lehrer also die gesetzliche Pflicht zur Auskunfterteilung gegenüber Fürsorgebehörden und eventuellen Strafbehörden. Eine Weigerung, Auskunft zu erteilen, könnte disziplinarische Sanktionen, in gewissen Fällen Überweisung an den Strafrichter zur Folge haben.

Bei dieser Sachlage muss es als stossend empfunden werden, dass wenig Aussicht besteht, gegen eine Amtsstelle mit Erfolg vorzugehen, welche ihre Diskretionspflicht verletzt, indem sie dem durch eine Anzeige oder Auskunft Betroffenen, den Verzeiger bzw. die Auskunftsperson nennt und den Inhalt der Anzeige oder Auskunft bekannt gibt.

Rechtsauskunft musste ausserdem in zwei Fällen eingeholt werden, in denen sich Kollegen durch Einsendungen in der Tagespresse zu Recht in ihrer Ehrenhaftigkeit angegriffen fühlten. Es gelang beide Male, den verantwortlichen Schreiber auf Grund der durch das Recht vorgeschriebenen Schritte festzustellen. Während der Kantonalvorstand im einen Fall weiss, dass es zu einer gütlichen Einigung kam, entzieht es sich seiner Kenntnis, ob diese von ihm angestrebte Lösung auch im anderen Fall zustande kam.

Bei einem andern Fall handelte es sich um eine tätliche Beleidigung, indem eine aufgeregte Mutter ins Schulzimmer eindrang und dem Lehrer das Heft ihres Kindes, dessen Arbeit beanstandet worden war, ins Gesicht schlug. Da die Schulpflege vor der etwas rabiaten Person offenbar ordentlich Respekt hatte, nahm sie den Lehrer nicht so in Schutz, wie es u. E. hätte sein müssen. Die Möglichkeit eines gerichtlichen Vorgehens wurde deshalb sorgfältig geprüft, worauf der Fall nach den Wünschen des Lehrers erledigt wurde.

Besoldungsstatistik

Nachdem das neue Besoldungsgesetz und die Einordnung der Volksschullehrer in die BVK in Kraft getreten und die freiwilligen Zulagen von sämtlichen Gemeinden des Kantons Zürich festgesetzt worden waren, trat im Berichtsjahre in der Besoldungsbewegung und damit auch für die Statistik einstweilen eine gewisse Stagnation ein. Diesen günstigen Zeitpunkt galt es auszunützen, um durch die bereits eingeleitete Erhebung über die Festsetzung der Lehrerbesoldungen pro 1950 in den Besitz desjenigen Materials zu gelangen, das eine neue, gesamthafte Zusammenstellung der staatlichen Besoldungsanteile und der freiwilligen Gemeindezulagen inklusive Teuerungs-, Sozial- und weiterer Zulagen ermöglichte. Auf Ende Mai konnte vorerst lediglich eine Liste der 50—60 bestzahlenden Primar- und Sekundarschulgemeinden herausgegeben werden, standen doch immer noch 66 Erhebungsbogen aus. Immerhin leisteten die Angaben für die Verhandlungen in den beiden Städten und in etlichen Landgemeinden, die erst nachträglich zu einer definitiven Besoldungsregelung gelangten, gute Dienste. Erst als im Laufe des Sommers dank der Mithilfe der Sektionspräsidenten die Grosszahl der restlichen Fragebogen eingegangen war, konnte mit der eigentlichen Verarbeitung des Materials begonnen werden. Im September war die bezirksweise Zusammenstellung aller Sekundar-, Ende November diejenige der Primarschulgemeinden versandbereit. Die beiden Aufstellungen enthalten die Staatsbeitragsklasse, das Minimum und das Maximum der freiwilligen Gemeindezulagen, die Teuerungs- und Sozialzulagen, die Zulage für ungeteilte Schulen und die Gesamtbesoldung von Staat und Gemeinde und bieten trotz der durch das Gesetz erzielten Vereinfachung der Gehaltszusammensetzung ein mannigfaches Bild der Verhältnisse in den einzelnen Gemeinden des Kantons. In der weitaus überwiegenden Mehrzahl konnte der Stand von 1949 gehalten werden. Inzwischen sind nur ganz vereinzelt Veränderungen eingetreten (am bedeutendsten sind die Neuordnung der Besoldungsverhältnisse in Winterthur und die jüngst erfolgte Lösung der Versicherungsfrage für die Lehrerschaft der Stadt Zürich), so dass die Zahlen heute mit wenigen Ausnahmen noch ihre Gültigkeit haben. Ausser bei der Besoldungsstatistik des ZKLV sind die Angaben in dringlichen Fällen auch bei den Sektionspräsidenten erhältlich. Es ist jedoch wünschenswert, dass das Material vertraulich behandelt werde.

Die Umfrage erstreckte sich auch auf die Gemeinde-Pensionsverhältnisse sowie auf die Entschädigungen für Knaben-Handarbeit, Fremdsprach-, erweiterten Turn-, Stenographie- und Blockflötenunterricht, worüber die Statistik ebenfalls Auskunft gibt.

Sollten zufolge Ansteigens der Teuerung Veränderungen in den Besoldungsansätzen eintreten, so bitten wir um entsprechende Orientierung z. H. der Statistik.

Beziehungen zu anderen Organisationen

Allen nachstehend aufgeführten Organisationen dankt der KV für die wertvolle und verständnisvolle Zusammenarbeit, die es auch in diesem Berichtsjahr wieder ermöglichte, in den verschiedensten Problemen und Fragen gute und gerechte Lösungen zu finden.

1. *Schweizerischer Lehrerverein (SLV)*

Auch im Berichtsjahr 1950 war das Verhältnis zwischen SLV und ZKLV in jeder Beziehung erfreulich. Die Fortsetzung der Erhebungen auf schweizerischem Boden über Besoldungen, Pflichtstundenzahlen, Besoldungsnachgenuss, Dauer der Ausbildung u. a. m. wurde als sehr wertvoll empfunden und leistete dem Vorstand des ZKLV in verschiedenen Fällen wertvolle Dienste. Er erfuhr durch den SLV und dessen Präsidenten auch sonst manche Unterstützung in seinen Bestrebungen um die Erhaltung der Errungenschaften aus früheren Jahrzehnten. Sämtliche durch den Kantonalvorstand begutachteten Gesuche um Hilfe in irgend einer Form fanden beim Leitenden Ausschuss oder beim Zentralvorstand wohlwollendes Gehör.

2. *Lehrerverein Zürich (LVZ)*

In verschiedenen Geschäften nahmen der LVZ und der ZKLV miteinander Fühlung, so, um in einem Schulkreis der Stadt Zürich mit gemeinsamen Massnahmen ganz unerfreuliche Verhältnisse beseitigen zu helfen (siehe Abschnitt «Lehrer, Eltern und Schulbehörde» dieses Jahresberichtes), und in einem Fall betr. die Besoldungsauszahlung bei zwei kurz aufeinanderfolgenden Krankheitsurlauben. — Dann arbeitete unser Rechtskonsulent auf eine Anfrage des LVZ hin ein Rechtsgutachten aus über die Auskunftspflicht der Lehrer an Amtsstellen (siehe Abschnitt «Rechtsberatung» dieses Jahresberichtes).

3. *Synodalvorstand*

Das Berichtsjahr verlangte in nachstehenden Geschäften eine enge Zusammenarbeit mit dem Vorstand unserer kantonalen Schulsynode: Volksschulgesetz, Übergabe der Witwen- und Waisenstiftung an die Beamtenversicherungskasse, Reorganisation des Hilfsfonds der WWSt., Schulpflegesitzungen ohne Lehrer.

4. *Stufenkonferenzen*

In der Kommission des ZKLV zur Beratung des neuen Volksschulgesetzes waren die Stufenkonferenzen durch ihre Präsidenten vertreten. Dieses Gremium hat sich zur Besprechung allgemein schulpolitischer und pädagogischer Fragen, die die ganze Volksschule betreffen, sehr bewährt und ermöglichte die einheitliche Stellungnahme der Volksschullehrer zum neuen Volksschulgesetz (Antrag nach 1. Lesung des Kantonsrates), wie sie in der Eingabe vom 31. Mai 1950 den Behörden bekanntgegeben wurde (Päd. Beob. Nrn. 10, 11/1950). Der KV erachtet es für sehr wünschenswert, dass auch in Zukunft Schulfragen, die für alle Schulstufen von Wichtigkeit sind, in gemeinsamer Zusammenarbeit mit den Präsidenten der Stufenkonferenzen gelöst werden.

5. *Kantonal-zürcherischer Verband der Festbesoldeten (KZVF)*

Im Zentralvorstand des Kantonal-zürcherischen Verbandes der Festbesoldeten war der Zürcherische Kantonale Lehrerverein im Berichtsjahr durch seinen Präsidenten, J. Baur, vertreten. Er tagte viermal. Die wichtigsten Geschäfte waren: Gesetz über die Einordnung der Lehrer, Pfarrer und Kantonspolizisten in die Beamtenversicherungskasse des Kantons Zürich; Revision des Zürcherischen Steuergesetzes; Übergangsordnung der Bundesfinanzreform.

In einer Vorständekonferenz referierte Herr Dr. jur. R. Isler, Direktionssekretär der Finanzdirektion, über die Bundesfinanzreform, worauf der Zentralvorstand anschliessend der Verwerfungsparole der NAG (Nationale Arbeitnehmer-Gemeinschaft) zustimmte.

6. *Konferenz der Personalverbände des staatlichen Personals (KPV)*

Mit einer Eingabe an den Kantonsrat unterstützte die Konferenz der Personalverbände den Zürcherischen Kantonalen Lehrerverein in seinen Bestrebungen für ein gerechtes Disziplinarrecht für die Volksschullehrer im neuen Volksschulgesetz, indem sie ihre alte Forderung auf Schaffung einer allgemeinen Verwaltungsgerichtsbarkeit für das staatliche Personal wieder aufgriff. Das veranlasste dann den Kantonsrat, den gesamten Abschnitt über das Disziplinarwesen im Volksschulgesetz an die vorberatende Kommission zurückzuweisen. (Siehe Abschnitt «Volksschulgesetz» dieses Jahresberichtes und Päd. Beob., Nr. 5/51.)

Für die Abstimmungen für das Gesetz über die Einordnung der Lehrer, Pfarrer und Kantonspolizisten in die Beamtenversicherungskasse und für das Gesetz über die Ausrichtung von Teuerungszulagen an staatliche Rentenbezüger organisierte die KPV eine erfolgreiche Propaganda; in einer Eingabe an die kantonsrätliche Kommission nahm sie Stellung zur Revision der Statuten der Beamtenversicherungskasse.

Schlusswort

Wenn wir wieder auf ein arbeitsreiches Jahr zurückblicken können, so tut dies der KV in Dankbarkeit all jenen Kolleginnen und Kollegen gegenüber, die ihn in seiner nicht immer leichten Aufgabe in irgend einer Weise unterstützten, und der Präsident dankt insbesondere allen Vorstandsmitgliedern, die so oft zu den Sitzungen nach Zürich fahren mussten und in gemeinsamer Arbeit immer bemüht waren, für Schule und Lehrerschaft nur das Beste zu erstreben. Sollte auch da und dort nicht alles nach Wunsch gelungen sein, so hoffen wir doch, unsere Aufgabe zur Zufriedenheit unserer Mitglieder erfüllt zu haben.

Zuversichtlich sehen wir dem kommenden Berichtsjahr entgegen. Die Arbeit des KV wird kaum kleiner werden. Nimmt doch die Zahl der zürcherischen Volksschullehrer dauernd zu. Aber auch der Mitgliederbestand unseres Vereins muss im gleichen Masse wachsen. Wir bitten unsere Sektionsvorstände, keine Mühe zu scheuen, um unsere jüngsten Kollegen für unseren Verein zu gewinnen. Ehrensache jedes Volksschullehrers muss es sein, dem ZKLV anzugehören. Auch dieser Jahresbericht, hoffen wir, zeige mit aller Deutlichkeit wieder, dass eine geschlossene Lehrerschaft erfolgreich für die Interessen der Volksschule und des Lehrerstandes einzutreten imstande ist.

Aber nicht nur für Schule und Lehrerstand sollte der aufgeschlossene Volksschullehrer sich neben seiner eigentlichen Berufsarbeit einsetzen, auch den Aufgaben des öffentlichen Lebens in der Gemeinde und im Staate muss er sich annehmen. Wenn der ehemalige Seminardirektor Wettstein seine Zöglinge gerade zu dieser Mitarbeit im öffentlichen Leben und in der Politik erziehen und innerlich verpflichten wollte, so tat er dies im festen Glauben, dass in unserem demokratischen Staate der Volksschullehrer nicht allein dazu berufen sei, der Jugend ein tüchtiger Erzieher zu sein, sondern auch dazu, dem Volk und dem Staat mit seinen Kenntnissen und Fähigkeiten zu dienen. Schliessen wir unseren Jahresbericht mit dem Ausdruck der Hoffnung, die zürcherische Lehrerschaft möge gerade heute diese hohe Pflicht klar sehen. Dann wird sie in Zukunft bestimmt allen Aufgaben — auch den schwersten — gewachsen sein.

Zürich, im Februar 1951

Der Präsident des ZKLV
Jakob Baur

Zürch. Kant. Lehrerverein

Protokoll der Präsidentenkonferenz,

Samstag, den 3. März 1951, 14.30 Uhr, im HB-Buffet Zürich. Die *Bezirkssektionen* sind vertreten durch: A. Müller (Zürich), K. Haupt (Affoltern), Dr. P. Walder (Horgen), O. Wegmann (Meilen), W. Gräff (Uster), O. Gasser (Hinwil), E. Schneider (Pfäffikon), E. Amberg (Winterthur), R. Egli (Andelfingen), K. Graf (Bülach) und W. Zollinger (Dielsdorf).

Vom *Kantonalvorstand* sind anwesend: Präsident J. Baur, H. Küng, Ed. Weinmann, E. Ernst und W. Seyfert. Entschuldigt abwesend sind Frau Greuter und J. Binder.

Vorsitz: J. Baur, Präsident des ZKLV.

Geschäfte: 1. Protokoll, 2. Mitteilungen, 3. Mitgliederwerbung und -kontrolle, 4. Berufsabzüge bei Steuererklärungen, 5. Pressekomitee des ZKLV, 6. Verschiedenes.

1. Protokolle. Die Protokolle der Präsidentenkonferenzen vom 13. Mai und 11. November 1950 werden genehmigt.

2. Mitteilungen (durch Präsident J. Baur).

a) *Neues Volksschulgesetz:* Die kantonsrätliche Kommission hat das Gesetz nach der 1. Lesung erneut durchberaten und legt neue Anträge zu einzelnen Paragraphen vor (Vorlage vom 24. 1. 51). Der Kantonalvorstand (KV) befasste sich, in Zusammenarbeit mit dem Rechtsberater des ZKLV, sehr eingehend mit dem Disziplinarwesen. In seinen Eingaben an die Erziehungsdirektion zuhanden des Regierungsrates und der kantonsrätlichen Kommission setzte sich der KV immer für die Schaffung einer Verwaltungsgerichtsbarkeit ein. Da aber die Aufnahme der Disziplinarparagraphen ins neue Gesetz nicht zu verhindern war, verlangte der KV die Verankerung bestimmter Rechtsgrundsätze der Strafprozessordnung im Titel «Disziplinarwesen». Die wichtigsten dieser Rechtsgrundsätze sind: Keine Strafe ohne vorangegangene Untersuchung; Recht der Verbeiständung des in die Untersuchung Gezogenen; genaue Protokollführung über Zeugeneinvernahmen und das Recht des Angeklagten oder seines Vertreters, den Zeugeneinvernahmen beizuwohnen; Einsichtnahme in sämtliche Untersuchungsakten zu gegebener Zeit; Recht auf Stellungnahme zum Untersuchungsergebnis; schriftliche Mitteilung der Disziplinarstrafe mit Angabe der Rekursfrist. Die kantonsrätliche Kommission hat der Aufnahme dieser Rechtsgrundsätze zugestimmt. Die Verordnung zum Disziplinarwesen, welche im Entwurfe vorliegt, wird von der kantonsrätlichen Kommission erst beraten, wenn über die gesetzlichen Bestimmungen der Entscheid gefallen ist.

Weitere Änderungen gegenüber der Kommissionsvorlage vom 27. Juni 1949 (1. Lesung) erfolgten an den §§ 1 (Zweckparagraph), 7 (Schulpflicht), 25 (Gliederung der Sekundarschule), 30 (Schülerzuteilung in Real- oder Werkschule), 52 (Körperstrafe), 68 (Nebenbeschäftigung der Lehrer), 105—110 (Disziplinarwesen), 111 (ersetzt § 8 al. 3 und 4 des Lehrerbildungsgesetzes: Entzug des Wählbarkeitszeugnisses), 127 (Zugehörigkeit zur Schulsynode).

Der KV hat die Kommission für das Volksschulgesetz, welcher der KV, die Präsidenten der Stufenkonferenzen und der Synodalvorstand angehören, zusammengerufen. Sie beschloss, vorläufig keine weiteren Schritte zu unternehmen und vollumfänglich an ihrer Eingabe vom 31. Mai 1950 (siehe Päd. Beob. Nr. 10/11, 1950) festzuhalten.

A. Müller regt an, der KV möge den Sektionspräsidenten eine Zusammenstellung über die im Abschnitt «Disziplinarwesen» verankerten Rechtsgrundsätze übermitteln.

b) *Beamtenversicherungskasse (BVK)*

Sämtliche mit der Eingliederung der Pfarrer, Kantonspolizisten und Volksschullehrer verbundenen, gesetzgeberischen Akte sind nun abgeschlossen (Gesetz, Statuten und Verwaltungsreglement). Die Beantwortung von Fragen wird, nach Studium von Statuten und Reglement, an der nächsten Präsidentenkonferenz erfolgen. Eine Aufnahmeurkunde soll jedem Kassenmitglied demnächst von der Finanzdirektion zugesandt werden. Die genaue Überprüfung der darin enthaltenen Angaben über die anrechenbaren Dienst- und Versicherungsjahre wird wichtig sein. Der Mitversicherung der freiwilligen Gemeindezulage durch die Gemeinde wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden müssen. Mit der Bearbeitung von Detailfragen (Nachzahlungen und Einkauf von Dienstjahren, Dienstjahre bei der Gemeinde usw.) wurde Kantonalvorstandsmitglied H. Küng, SL, Küsnacht (ZH), beauftragt. Anfragen sind direkt an ihn zu richten.

K. Graf gibt seinem Befremden darüber Ausdruck, dass nicht offiziell durch die Erziehungsdirektion im Amtlichen Schulblatt auf die Möglichkeit der Versicherung der freiwilligen Gemeindezulage hingewiesen wurde.

E. Amberg vermisst nach 1¼ Jahren immer noch ein Mitspracherecht der Lehrerschaft in der Verwaltungskommission der Beamtenversicherungskasse.

c) *Schulstreit in Kloten*

Präsident J. Baur orientiert über den Verlauf der Angelegenheit. (Wir verweisen auf die Berichterstattungen im Päd. Beob., Nrn. 2 und 5/1951).

K. Graf verdankt die Arbeit des KV bestens. Dieser habe stets im Einvernehmen mit dem Sektionsvorstand gehandelt. Er ist von der Antwort des Präsidenten befriedigt, der erklärt, warum ein Gegenartikel zum seinerzeitigen Aufruf nicht veröffentlicht wurde.

J. Baur gibt Auskunft über die Auswirkung des Aufrufs in bezug auf die Besetzung der vakanten Lehrstellen.

E. Amberg verdankt ebenfalls die Arbeit des KV. Er ermahnt die Sektionspräsidenten, die Kollegen immer wieder aufzufordern, den Beschlüssen und Handlungen des leitenden Vereinsorgans ihr Vertrauen zu schenken und sich nicht durch einseitige Presseeinsendungen beirren zu lassen.

(Schluss folgt.)

Redaktion

Im Sinne einer besseren Arbeitsteilung innerhalb des Kantonalvorstandes ist die Redaktion des «Pädagogischen Beobachters» auf den 1. Mai 1951 dem Vorstandsmitglied *E. Weinmann* übertragen worden.

Zuschriften und Beiträge sind daher künftig an folgende Adresse zu senden: E. Weinmann, Sekundarlehrer, Sempacherstrasse 29, Zürich 32.

Der Präsident des ZKLV: *J. Baur.*

Redaktion des Pädagogischen Beobachters: E. Weinmann, Sempacherstr. 29, Zürich 32. Mitglieder der Redaktionskommission: J. Baur, Zürich; J. Binder, Winterthur; E. Ernst, Wald; L. Greuter-Haab, Uster; H. Küng, Küsnacht; W. Seyfert, Pfäffikon