

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen =
Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie

Band: 25 (1945)

Heft: 2

Artikel: Über eine graphische Auswertung der Achsenwinkel-Gleichung

Autor: Waldmann, Hans

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21014>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über eine graphische Auswertung der Achsenwinkel-Gleichung

Von *Hans Waldmann*, Basel

Wissenschaftliche Laboratorien der F. Hoffmann-La Roche & Co., A.-G.

Der Zusammenhang zwischen dem Winkel V_γ der optischen Achsen und den drei Hauptbrechungsindices n_α , n_β , n_γ optisch zweiachsiger Kristalle wird eindeutig dargestellt durch die bekannte Beziehung:

$$\operatorname{tg}^2 V_\gamma = \frac{\frac{1}{n_\alpha^2} - \frac{1}{n_\beta^2}}{\frac{1}{n_\beta^2} - \frac{1}{n_\gamma^2}} = \frac{n_\gamma^2 (n_\beta^2 - n_\alpha^2)}{n_\alpha^2 (n_\gamma^2 - n_\beta^2)}. \quad (I)$$

Für andere trigonometrische Funktionen des Winkels V lassen sich ganz ähnliche, für den praktischen Gebrauch aber ebenso umständliche Formeln aufstellen. Die Schwerfälligkeit dieser Ausdrücke zeigt sich vor allem bei serienmässigen Berechnungen von Achsenwinkeln, wie diese bei petrographischen oder chemisch-kristallographischen Untersuchungen, z. B. in einer Mischkristallreihe, vorkommen können, oder aber, wenn es sich zu Kontrollzwecken darum handelt, rasch zu überprüfen, ob voneinander unabhängig ermittelte Werte der Hauptbrechungsindices und des Achsenwinkels miteinander vereinbar sind. In den zahlreichen Fällen niedriger Doppelbrechung lässt sich der komplizierte Ausdruck I erfolgreich durch eine Näherungsformel vom Typus II (siehe unten) ersetzen; für höher doppelbrechende Kristalle vermag jedoch nur die vollständige Gleichung I brauchbare Werte für den Achsenwinkel zu liefern. Doppelbrechungen über 0,15 sind allerdings unter den natürlich vorkommenden Mineralien selten¹⁾, dagegen treten solche und noch viel grössere Differenzen der Hauptbrechungsquotienten bei Kristallen organischer Verbindungen überraschend häufig auf; in Tabelle 1 sind einige typische Beispiele zusammengestellt.

Bei den einfachen, sog. MALLARD'schen Näherungsformeln sind als bestimmende Faktoren die Differenzen der Hauptbrechungs-

¹⁾ Die Gruppe der Karbonate von Mg, Ca, Fe, Zn, Mn, Pb, ferner Hämatit, Lepidokrokit, Malachit, Rutil und Schwefel sind die bekanntesten.

indices aus der exakten Gleichung herausgeschält worden. So erhält man den der Gleichung (I) entsprechenden Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2 V_\gamma = \frac{n_\beta - n_\alpha}{n_\gamma - n_\beta}. \quad (\text{II})$$

Diese Näherungsformeln liefern zu niedrige Werte für den Achsenwinkel, wobei die stärksten Abweichungen bei $2V$ um 90° liegen. Man kann zeigen, dass der Fehler des so berechneten Achsenwinkels mit sinkender mittlerer Lichtbrechung einerseits und mit steigender Doppelbrechung andererseits rasch anwächst²⁾. Für niedrige Doppelbrechungen bis höchstens 0,10 geben die Näherungsformeln den optischen Charakter im allgemeinen richtig wieder und man erhält auch brauchbare Werte für den Achsenwinkel. Sie haben daher in der Praxis der petrographischen Mikroskopie ihre Bedeutung, besonders auch deshalb, weil an Stelle der Doppelbrechungen die direkt gemessenen Gangunterschiede eingesetzt werden können (NIGGLI, 4).

Es fehlt nicht an Bestrebungen, diese in verschiedener Form häufig wiederkehrende Berechnungsaufgabe sowohl nach einer der exakten wie nach einer der Näherungsformeln durch graphische Auswertung zu vereinfachen:

WRIGHT (8) hat auf der Näherungsformel $\sin^2 V_\gamma = (n_\beta - n_\alpha) / (n_\gamma - n_\alpha)$ ein recht einfaches Diagramm für V aufgebaut. Als bestimmende Grössen erscheinen nur Doppelbrechungswerte. Durch die Verwendung der sin-Formel wird für das Achsenwinkelfeld ein etwas unsymmetrisches Strahlenbüschel erhalten, das zudem ungewohnterweise zwischen schiefwinkligen Koordinaten liegt. Im Rahmen der Anwendbarkeit der Näherungsformel ist das Diagramm brauchbar für Doppelbrechungen bis 0,09.

Das von BOLDIREW (1) 1911 für den Gebrauch bei Messungen mit dem Universaldrehtisch ausgearbeitete Diagramm ist ebenfalls ausschliesslich auf der Verwendung der Hauptdoppelbrechungen aufgebaut, jedoch unter Anwendung der exakten Formel I. Im Schnittpunkt der rechtwinkligen Koordinatenachsen $(n_\gamma - n_\beta)$ und $(n_\beta - n_\alpha)$ entspringt das Strahlenbüschel der Achsenwinkel $2V$, das mit zunehmender Doppelbrechung allmählich gegen die Abszissenachse $(n_\gamma - n_\beta)$ hin abbiegt. Die Anwendung der genauen Formel setzt voraus, dass der Absolutwert eines Hauptbrechungsindex bekannt ist. BOLDIREW wählt hierfür n_β . Um den verschiedenen Möglichkeiten Rechnung tragen zu können, sind die Achsenwinkelkurven für die 3 Werte $n_\beta = 1,50, 1,65$ und

²⁾ Das von RÖSCH und STÜRENBURG (6) angeführte Zahlenbeispiel ist nicht richtig durchgerechnet. Die Abweichungen betragen ungefähr das 3fache und zwar im entgegengesetzten Sinne. Die nach der exakten Formel berechneten Achsenwinkel sind für dieses Zahlenbeispiel wie folgt zu berichtigen (Seite 590, 5. Zeile von oben):

$$V = 46^\circ 39' \quad 46^\circ 9' \quad 45^\circ 41' \quad 45^\circ 29' \quad 55^\circ 46' \quad 74^\circ 12', \quad (\text{gegenüber } 45^\circ 0' \text{ nach der Näherungsformel}).$$

2,00 berechnet und in verschiedener Signatur eingezeichnet. Dadurch lässt sich in einfacher Weise interpolieren. Der Messbereich dieser Tafeln erstreckt sich bis $(n_\gamma - n_\beta)$ oder $(n_\beta - n_\alpha) = 0,125$.

RÖSCH und STÜRENBURG (6) verwenden für ihr auf Grund der genauen Formel I abgeleitetes Diagramm die einzelnen Hauptbrechungsindices n_α , n_β und n_γ und zwar setzen sie diese in der Form der Quotienten $\frac{n_\beta}{n_\alpha}$ und $\frac{n_\gamma}{n_\alpha}$ zum Achsenwinkel in Beziehung. Die genannten Quotienten der Brechungsindices werden ebenfalls auf graphischem Wege in einer Vortafel bestimmt. Die nicht besonders übersichtliche Haupttafel stellt zwei Scharen sich überschneidender Büschel S-förmiger Kurven dar. Diesem Diagramm kann ausser dem Winkel V_γ der optischen Achsen (dem Binormalenwinkel) auch noch der Biradialenwinkel \mathfrak{B}_γ entnommen werden. Aus der Differenz zwischen dem Achsenwinkel und dem Biradialenwinkel erhält man Aufschluss über die Grösse der konischen Refraktion.

SMITH (7) legt seinem Diagramm die oben angeführte Näherungsformel II zu Grunde, die, wie alle 12 möglichen, einander gleichwertigen Formeln auf Differenzen der Brechungsindices aufgebaut ist. Durch die Auswahl eines die Hauptdoppelbrechungen $(n_\gamma - n_\beta)$ und $(n_\beta - n_\alpha)$ enthaltenden Ausdruckes ist es dem Autor möglich geworden, die einzelnen Hauptbrechungsindices selbst zu benutzen. Diese werden auf einem verschiebbaren, linear geteilten Masstab verwendet. Das zwischen rechtwinkligen Koordinaten liegende, durch ein Strahlenbüschel nach $\text{tg}^2 V$ geteilte Achsenwinkelfeld ist auf die Spitze gestellt. Der die Brechungsindices enthaltende Masstab wird senkrecht zur 45° -Linie mit dem Wert n_β an die Spitze des Diagrammes angelegt und die Stellen n_γ bzw. n_α auf die Koordinatenachsen des Achsenwinkelfeldes projiziert, wodurch dort die Abschnitte $(n_\gamma - n_\beta)$ und $(n_\beta - n_\alpha)$ auftreten. Diese bestimmen den Achsenwinkel. Das Diagramm weist die theoretisch bedingten Fehler auf, die bei Achsenwinkeln um 90° und bei hohen Doppelbrechungen am grössten werden.

LANE JR. und SMITH (2) haben noch ein weiteres Diagramm veröffentlicht, das weder auf der Näherungsformel noch genau auf der Achsenwinkelgleichung beruht. Der Grundgedanke der mathematisch einwandfreien Konstruktion ist die Ermittlung des Winkels zwischen der stumpfen Mittellinie und der Spur des Kreisschnittes n_β im Ellipsenhauptschnitt $n_\gamma - n_\alpha$. Die recht originelle Lösung erfolgt unter Zugrundelegung der 3 Hauptbrechungsindices rein geometrisch nach dem Prinzip des sogenannten Ellipsenzirkels, wobei aber nur der eine gesuchte Punkt der Ellipse bestimmt wird. Das Verfahren eignet sich besonders für höhere Doppelbrechungen und Achsenwinkel zwischen 60 und 120° , ist aber für die Erkennung der Zusammenhänge in der Indicatrix nicht sehr anschaulich.

Im Nachfolgenden wird auf Grund allgemeiner Überlegungen über die Zusammenhänge im Indexellipsoid eine weitere graphische Auswertung für die Achsenwinkelgleichung entwickelt. Diese steht gegenüber den besprochenen an Einfachheit in der Handhabung nicht zurück, übertrifft dieselben aber sowohl im Messbereich (Licht- und Doppelbrechung) und in der Mannigfaltigkeit der Anwendungsmög-

lichkeiten als auch in der Anschaulichkeit der dargestellten Zusammenhänge.

Als Grundlage kommt hierfür nur die exakte Gleichung (I) in Frage. In dieser sind vier an und für sich unabhängige Grössen zueinander in Beziehung gesetzt, nämlich die drei Hauptbrechungsindices n_α , n_β , n_γ und der Winkel V_γ zwischen einer optischen Achse und der Richtung von n_γ . Durch je drei dieser Grössen in beliebiger Kombination wird die vierte eindeutig bestimmt. Es kann gezeigt werden, dass an Stelle der drei Hauptbrechungsquotienten auch zwei Doppelbrechungen zusammen mit einem Brechungsindex, z. B. n_β , treten können. In dieser Hinsicht weist das neue Diagramm eine gewisse Ähnlichkeit mit den BOLDIREW'schen Tafeln (loc. cit.) auf.

Die bildliche Darstellung des Zusammenhanges von vier Variablen erfordert ein räumliches Diagramm; für eine Darstellung in der Ebene müssen die vier Bestimmungsstücke auf deren drei reduziert werden. Dies ist möglich durch die Aufteilung des Diagrammes in zwei Teile. Wir nennen sie hier:

Feld der Brechungsindices und
Feld der Achsenwinkel.

Die Verbindung der beiden Teile erfolgt über eine mathematische Transformation, die wir als „Achsenverhältnis der Indicatrix“ bezeichnen. Dieses ist ganz analog dem in der Kristallmorphologie gebräuchlichen Achsenverhältnis aufgebaut, indem der mittlere Brechungsindex n_β , entsprechend dem Achsenabschnitt der Einheitsfläche auf der Querachse b , zur Einheit gewählt wird.

Das Achsenverhältnis der Indicatrix liefert die relativen Brechungsquotienten A und C , bezogen auf die optische Normale n_β , nämlich:

$$\begin{array}{l} n_\alpha : n_\beta : n_\gamma = A : 1 : C, \\ \text{wobei} \quad A = \frac{n_\alpha}{n_\beta} \text{ immer } < 1 \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \\ C = \frac{n_\gamma}{n_\beta} \text{ immer } > 1 \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad \text{(III)} \end{array}$$

Aus dieser Formulierung ergibt sich ohne weiteres die relative Doppelbrechung zu

$$(C - A) = \frac{n_\gamma - n_\alpha}{n_\beta} .$$

Die neu gewonnenen Grössen A und C setzt man in die reziprok-quadratische Form der exakten Achsenwinkelgleichung (I) ein und erhält:

$$\operatorname{tg}^2 V_{\gamma} = \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{1 - \frac{1}{C^2}}. \quad (\text{IV})$$

Diese Form IV der Achsenwinkelgleichung enthält nur noch den Zusammenhang zwischen drei Grössen, V_{γ} , A und C ; sie ist also für eine ebene graphische Darstellung geeignet. Bevor auf das Achsenwinkeldiagramm selbst eingegangen wird, sollen zuerst noch einige Gesichtspunkte besprochen werden, die sich aus dem Achsenverhältnis der Indicatrix ergeben.

Das Achsenverhältnis der Indicatrix hat, wie aus den Formeln III deutlich hervorgeht, die Eigentümlichkeit, dass der relative Brechungsindex A stets kleiner 1, C dagegen immer grösser als 1 sein muss. Aus dieser Tatsache ergeben sich zwanglos die sog. optisch positiven bzw. negativen Formen der Indicatrix. Durch die Analogie in der Ableitung der Achsenverhältnisse findet man weiter eng übereinstimmende Beziehungen zwischen Kristallmorphologie und Kristalloptik:

1. Dem kubischen Kristallsystem entspricht die optische Isotropie mit dem Achsenverhältnis der Indicatrix = 1.

2. Die wirteligen Kristallsysteme, Tetragonal, Hexagonal und Rhomboedrisch mit dem Achsenverhältnis $a:c$ stimmen mit der optischen Einachsigkeit überein. Hier lautet das Achsenverhältnis der Indicatrix entweder $1:C$ für die optisch positiven oder $A:1$ für die optisch negativen Kristalle, wobei die Richtungen A bzw. C immer mit der mehr als zweizähligen morphologischen Hauptachse zusammenfallen. Beim Vergleich der Konsequenzen des morphologischen und des optischen Achsenverhältnisses zeigt sich — gewissen Gedankengängen von NIGGLI (3) über die extrem planaren bzw. stengeligen Typen in den wirteligen Kristallsystemen folgend — eine gewisse, wohl im wesentlichen durch die Massenverteilung in der Struktur bedingte Parallelität der Erscheinungen. Infolge der verschiedenartigen Definition der miteinander zu vergleichenden Phänomene ergibt sich zahlenmässig ein reziprokes Verhalten³⁾: Dem planaren oder (001)-Typus kommt das morphologische Achsenverhältnis $a:c = 1:\gg 1$ zu, während im optischen Verhalten solche Kristalle vorwiegend negativ sind, also das Achsenverhältnis der Indicatrix

³⁾ Die Parallelität käme auch in der mathematischen Formulierung zum Ausdruck, wenn in der Achsenwinkelgleichung an Stelle der Brechungsindices mit Licht-Fortpflanzungsgeschwindigkeiten operiert würde.

$1:A = 1:<1$ lautet. Für den achsialen oder [001]-Typus gilt das Umgekehrte.

3. Bei den niedrig symmetrischen Kristallsystemen, Rhombisch, Monoklin und Triklin, tritt mit dem dreiachsigen Indexellipsoid auch der vollständige Ausdruck $A:1:C$ für das Achsenverhältnis der Indikatrix in Erscheinung. Für jede gegebene Kombination der relativen Brechungsindices A , 1 und C wird ein eindeutig bestimmter Achsenwinkel festgelegt. Die Grundgleichung (I) gibt den Winkel V_γ , d. h. der Achsenwinkel wird stets zwischen einer optischen Achse und der Richtung n_γ , der grössten Symmetrieachse des Indexellipsoids, gemessen. Im Gegensatz zu dieser eindeutigen Definition bezeichnet man im allgemeinen als Achsenwinkel $2V$ den spitzen, von den beiden optischen Achsen eingeschlossenen Winkel. Diese auf experimentelle Gegebenheiten zurückzuführende Bevorzugung des spitzen Achsenwinkels erfordert eine ergänzende Charakterisierung der Achsenbilder als „positiv“ bzw. „negativ“, je nachdem, ob als erste (oder spitze) Mittellinie die Richtung n_γ oder n_α auftritt. Die Bezeichnungen „optisch positiv“ und „optisch negativ“ sind aber in der Achsenwinkelgleichung gar nicht enthalten und ihre Einführung bildet die Ursache häufiger Unklarheiten, besonders bei $2V$ um 90° , welche durch die Bezeichnung der Winkel von 0 bis 180° ohne weiteres unterdrückt werden⁴⁾. Bei konsequenter Anwendung der strengen mathematischen Formulierung, wie sie beispielsweise auch im Lehrbuch von PÖCKELS (5) angestrebt, sonst aber kaum angetroffen wird, erübrigt sich jede weitere Beschreibung eines zweiachsigen Achsenbildes wie „positiv“ oder „negativ“⁵⁾.

Durch Spezialisierung der Gleichung IV kann man die Bedingung ableiten, durch welche sich die sogenannten „optisch positiven“ und „optisch negativen“ zweiachsigen Kristalle voneinander unterscheiden:

Achsenwinkel	Indicatrix	Bedingung
$2 V_\gamma = 0 - 90^\circ$	„opt. positiv“	$1/A^2 + 1/C^2 < 2$
$2 V_\gamma = 90 - 180^\circ$	„opt. negativ“	$1/A^2 + 1/C^2 > 2.$

⁴⁾ Vergl. z. B. in LANDOLT-BÖRNSTEIN, Physikalisch-chemische Tabellen (5. A.), Tabelle 172: „Brechungsexponenten und Achsenwinkel zweiachsiger Kristalle“; in den Fällen, wo nicht alle drei Hauptbrechungsindices mitgeteilt sind, kann man mit den Angaben dieser Tabelle gar nichts anfangen.

⁵⁾ Für einachsige Kristalle muss zugegeben werden, dass die Unterscheidung von „positiven“ und „negativen“ Achsenbildern einfacher ist als die Angabe der Achsenwinkel 0° bzw. 180° .

Und für den Achsenwinkel $2V = 90^\circ$, d. h. für den optisch zweiachsig-intermediären Typus, ergibt sich nach Gleichung (IV) die Bedingung:

$$1/A^2 + 1/C^2 = 2.$$

Nach diesen theoretischen Erörterungen wollen wir uns wieder dem Achsenwinkeldiagramm zuwenden (siehe Tafel).

Der obere Teil desselben ist das Feld der Brechungsindices. Es stellt den Zusammenhang dar zwischen den Hauptbrechungsindices und dem Achsenverhältnis der Indicatrix. Die Ordinatenachse N ist von unten nach oben geteilt nach steigenden Werten von n^2 . Die Abszisse weist eine sog. reziproke Teilung $1/x^2$ auf mit von links nach rechts steigenden Werten von $x^2 = A^2$ bzw. C^2 . Der Bereich C^2 erstreckt sich von der Null-Linie ganz rechts aussen bis zum Abszissenpunkt 1,00, dort beginnt der Bereich A^2 . Der Nullpunkt dieses Koordinatensystems befindet sich am rechten Rande im Schnittpunkt der Abszisse $1/C^2 = 0$ (also $C^2 = \infty$) mit der Ordinate $n^2 = 0$. In diesem Punkt entspringt ein Strahlenbüschel; jeder Strahl entspricht einem konstanten Brechungsquotienten innerhalb einem veränderlichen Achsenverhältnis der Indicatrix, ausgedrückt durch $1/C^2$ bzw. $1/A^2$. Von diesem Nullpunkt aus lässt sich aus zusammengehörigen Kombinationen von Hauptbrechungsindices n_α , n_β und n_γ sehr einfach das Achsenverhältnis der Indicatrix aufstellen: Man findet den Wert A links von der Ordinatenachse N auf der Höhe n_β im Schnittpunkt mit dem Strahl vom Nullpunkt durch den Punkt n_α auf der Ordinatenachse N . Der Wert C wird ganz analog gefunden rechts von der Ordinatenachse auf der Höhe n_β im Schnittpunkt mit dem Strahl durch n_γ . Im Diagramm ist als erläuterndes Beispiel der rhombische Schwefel dargestellt, vgl. dazu auch die Tabelle 1.

Der untere Teil des Diagrammes, ein auf der Hypothenuse stehendes, gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck darstellend, ist das eigentliche Achsenwinkelfeld. Dieses hat seinen Nullpunkt bei der Abszisse 1 des Feldes der Brechungsindices. Aus dieser Lage des Nullpunktes ergeben sich als Teilungen der Koordinatenachsen dieses Feldes die Ausdrücke $(1/A^2 - 1)$ bzw. $(1 - 1/C^2)$. Im Nullpunkt entspringt wiederum ein Strahlenbüschel, welches das Achsenwinkelfeld nach $\text{tg}^2 V$ unterteilt und zur Winkelhalbierenden, die $2V = 90^\circ$ darstellt, symmetrisch angeordnet ist. Für die Bestimmung des Achsenwinkels wird das nach den vorangehenden Angaben ermittelte Achsenverhältnis der Indicatrix auf die Koordinaten-

achsen des Achsenwinkelfeldes übertragen. Die Lage des Schnittpunktes der entsprechenden Koordinaten im Achsenwinkelfeld ergibt sofort die Grösse des gesuchten Winkels; vgl. auch hier das im Diagramm eingezeichnete Beispiel Schwefel. — Ganz ähnlich gestaltet sich bei Kenntnis von n_β die Berechnung des Achsenwinkels aus den gemessenen Werten von zwei Hauptdoppelbrechungen: Man gewinnt daraus durch Division durch n_β die relativen Hauptdoppelbrechungen. Mit diesen Grössen wird im Achsenwinkelfeld genau gleich operiert wie oben beschrieben.

Das Gesamtdiagramm besitzt zwei Eigentümlichkeiten, auf die noch besonders hingewiesen werden muss: Gemäss Gleichung (IV) ist das ganze Diagramm nur aus quadratischen bzw. quadratisch-reziproken Ausdrücken aufgebaut, nämlich n^2 , $\text{tg}^2 V$, $1/A^2$, $1/C^2$ bzw. $(1/A^2 - 1)$ und $(1 - 1/C^2)$. Infolge dieser Einheitlichkeit kann das ganze Diagramm anstatt nach den genannten quadratischen Grössen ohne Nachteil für die Anwendbarkeit nach den linearen Grundeinheiten n_α , n_β , n_γ , A , C , $2V$ (an Stelle von V), ferner $(C - A) = (n_\gamma - n_\alpha)/n_\beta$ beschriftet werden; ja die Übersichtlichkeit wird durch diese Bezeichnungsweise sogar erhöht. Der Aufbau aus quadratischen Ausdrücken bringt weiter mit sich, dass alle wesentlichen Bezugselemente der Darstellung streng geradlinig sind⁶⁾. Auch dies ist für die Übersichtlichkeit von grossem Vorteil. Die einzigen nicht geradlinigen, aber nur äusserst schwach gekrümmten Bezugselemente sind die weniger wichtigen Kurven gleicher Doppelbrechung $(C - A)$.

Das im Vorstehenden erläuterte Achsenwinkeldiagramm enthält ausser dem allgemeinen Fall der optisch zweiachsigen Indexellipsoide alle anderen Möglichkeiten, nämlich die Isotropie und die Einachsigkeit als Spezialfälle in folgerichtiger Zusammenhang und veranschaulicht damit die Überlegungen, die aus dem Achsenverhältnis der Indicatrix abgeleitet worden waren: Der Nullpunkt des Achsenwinkelfeldes entspricht der Isotropie. Die optisch einachsigen-positiven bzw. -negativen Rotationsellipsoide werden durch die vom Isotropie-

⁶⁾ Selbst die Aufteilung des Achsenwinkelfeldes ist streng geradlinig, denn die Formel IV (Seite 331) enthält in versteckter Form die lineare Gleichung für ein Strahlenbüschel mit den Koordinaten $x = (1 - 1/C^2)$ und $y = (1/A^2 - 1)$. Der Nullpunkt liegt bei $1/C^2 = 1/A^2 = 1$, und der variable Richtungskoeffizient der Strahlen hat den Wert $\mu = \text{tg}^2 V$. In dieser Tatsache liegt der Unterschied gegenüber dem sonst sehr ähnlichen Achsenwinkeldiagramm von BOLDIREW (loc. cit.). In seiner Darstellung haben die Koordinatenachsen linearen Masstab, was bewirkt, dass die Aufteilung des Achsenwinkelfeldes durch zunehmend gekrümmte Linien erfolgt; dagegen sind die Linien gleicher Doppelbrechung bei BOLDIREW wiederum Geraden.

punkt ausgehenden Koordinatenachsen dargestellt. Das von diesen beiden Geraden eingeschlossene Feld enthält alle Möglichkeiten optisch zweiachsiger Kristalle und zwar geht das „zweiachsig-positive Feld“ von der einachsigen-positiven Geraden aus, das „zweiachsig-negative Feld“ von der entsprechenden einachsigen Geraden aus; dort, wo die beiden Felder zusammenstossen, liegt der optisch zweiachsig-intermediäre Typus mit $2V = 90^\circ$. Im Achsenwinkeldiagramm tritt auch die Doppelbrechung $(n_\gamma - n_\alpha) = (C - A) \cdot n_\beta$ als selbständige Grösse auf. Hier zeigt sich nun sehr deutlich, dass der Achsenwinkel in keinem Zusammenhang mit der Gesamtdoppelbrechung steht; für jede gegebene Doppelbrechung sind a priori alle Achsenwinkel $2V$ von 0 bis 180° möglich.

Über die Ablesegenauigkeit ist folgendes zu sagen: Da das Diagramm auf der exakten Formel aufgebaut ist, sollte jede Ablesung frei von prinzipiellen Fehlern sein. Im Feld der Brechungsindices wird die Ablesegenauigkeit mit steigender mittlerer Lichtbrechung günstiger, entsprechend dem progressiven Ansteigen von n^2 . Im Achsenwinkelfeld ist die Ablesegenauigkeit am grössten bei Achsenwinkeln $2V$ zwischen 50 und 130° sowie bei hohen Doppelbrechungen; gegen den Isotropiepunkt hin wird sie immer schlechter. In diesem Bereich hängt sie im Wesentlichen vom Masstab der Zeichnung, genau genommen vom Masstab der reziprok-quadratischen Teilungen A und C ab. Auf diesen für den Anwendungsbereich des Diagrammes wichtigen Punkt kommen wir noch zurück. Bei Achsenwinkeln in der Nachbarschaft der Einachsigkeit, d. h. unter 20° oder über 160° , ist die Ablesegenauigkeit ebenfalls gering. Die Gründe hierfür sind — im Gegensatz zu oben — in der Natur der Erscheinung zu suchen: In diesem Gebiet wird die Achsenwinkelfunktion äusserst empfindlich auf geringe Änderungen in den Brechungsindices ⁷⁾ (auch auf kleine Fehler bei deren Bestimmung), da bei kleinen positiven Achsenwinkeln der Zähler, bei kleinen negativen Winkeln der Nenner in Gleichung IV gegen Null hinstrebt.

Zur Vervollständigung sind in Tabelle 1 einige Mineralien und organische Verbindungen mit hoher und höchster Doppelbrechung zusammengestellt. Die Beispiele sind nach steigendem $(n_\gamma - n_\alpha)$ geordnet. Die Tabelle enthält ausserdem die Achsenwinkel und die relativen Brechungsindices A und C . Diese wenigen angeführten Bei-

⁷⁾ Der Übergang der Ebene der optischen Achsen in eine zur Ausgangslage senkrechte Ebene unter Durchlaufen der Einachsigkeit [$(n_\gamma - n_\beta)$ oder $(n_\beta - n_\alpha) = 0$] in Abhängigkeit von der Lichtwellenlänge ist ein Beispiel hierfür (Brookit).

spiele zeigen schon, dass zwischen der mittleren Lichtbrechung (n_β), der Grösse der Doppelbrechung oder des Achsenwinkels keine einfachen Zusammenhänge bestehen.

Von den Anwendungsmöglichkeiten dieses Achsenwinkeldiagrammes sind in der Einleitung schon zwei kurz gestreift worden, nämlich:

1. An Hand dieses Nomogrammes sind Kontrollbestimmungen rasch durchführbar, wenn es sich darum handelt, ob eine zahlenmässig durchgeführte Berechnung fehlerfrei ist oder aber, ob unabhängig voneinander gemessene Werte der Hauptbrechungsindices oder -doppelbrechungen und des Achsenwinkels miteinander im Einklang stehen.

2. Die serienmässige Ermittlung von Achsenwinkeln, wie sie bei petrographischen oder chemisch-kristallographischen Untersuchungen vorkommen kann, wird durch das graphische Verfahren sehr einfach. Als Beispiel für eine derartige Studie sei die Ermittlung der Abhängigkeit der optischen Charakteristika in einer Mischkristallreihe von der kontinuierlichen chemischen Veränderung ihrer Zusammensetzung genannt.

3. Dieses Achsenwinkeldiagramm erscheint auch für eine Verwendung im Unterricht sehr geeignet. Das aus den relativen Brechungsindices nach n_β abgeleitete Achsenverhältnis der Indicatrix lässt einerseits die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen kristalloptischen Erscheinungen, wie isotrop, einachsig (positiv oder negativ) und zweiachsig, recht anschaulich werden, andererseits auch eben diese optischen Verhältnisse mit der Kristallmorphologie in Parallele setzen.

Für die Anwendung im einzelnen seien noch einige Beispiele gegeben:

Die den Hauptbrechungsindices entsprechenden Punkte n_α , n_β und n_γ werden auf der Ordinatenachse aufgesucht. Durch den Punkt n_β legt man eine Parallele zur Abszissenachse und zieht von n_γ und n_α aus die Strahlen nach dem Nullpunkt des Feldes der Brechungsindices. Den Wert A des Achsenverhältnisses der Indicatrix findet man links von der Ordinatenachse auf der Höhe n_β im Schnittpunkt mit dem Nullpunktstrahl; der Wert C wird rechts von der Ordinatenachse auf ganz analoge Weise ermittelt. Die Punkte A und C werden anschliessend auf die Koordinatenachsen des Achsenwinkelfeldes übertragen und ihr Schnittpunkt innerhalb des Feldes festgestellt. Dieser Schnittpunkt ergibt den gesuchten Achsenwinkel und zwar $0-90^\circ$ für „optisch positive“ bzw. $90-180^\circ$ für „negative“ Kristalle. Oder:

Man bildet auf rechnerischem Wege aus den bekannten Werten der Brechungsindices das Achsenverhältnis der Indicatrix und sucht im Achsenwinkelfeld den diesen Achsenabschnitten entsprechenden Winkel auf.

Tabelle 1. Beispiele von Verbindungen mit hoher und höchster Doppelbrechung

Name und Formel	Kristallklasse	$n_{\beta D}$	$(n_{\gamma} - n_{\alpha})_D$	$2 V_{\gamma}(D)$	Optischer Charakter	A	C	Lit.
Titanit (Sphen), $\text{CaTi}(\text{SiO}_3)_2$ (Beispiel von Nordmarken)	monoklin hol.	1,889	0,127	$31\frac{1}{2}^{\circ}$	positiv	0,996	1,062	1
Kupfersaccharinat ($\text{C}_7\text{H}_4\text{O}_3\text{NS}$) ₂ · 6 H_2O	monoklin hol.	1,700	0,255	135°	negativ	0,877	1,027	2
Ascorbinsäure (Vitamin C), $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$	monoklin hemim.	1,594	0,274	$89\frac{1}{2}^{\circ}$	positiv	0,926	1,098	3
Cerussit, PbCO_3	rhombisch hol.	2,076	0,274	172°	negativ	0,869	1,001	1
Schwefel	rhombisch	2,038	0,287	69°	positiv	0,961	1,102	4
Hexamethylbenzol, $\text{C}_6(\text{CH}_3)_6$	triklin hol.	1,747	0,298	$135\frac{1}{2}^{\circ}$	negativ	0,860	1,031	5
Brenztraubensäureäthylester-phenyl- hydrazon, α -Form, $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{O}_2\text{N}_2$	monoklin	1,726	0,394	112°	negativ	0,861	1,089	6
Isatin, $\text{C}_8\text{H}_6\text{O}_2\text{N}$	monoklin hol.	1,80	0,44	131°	negativ	0,81	1,06	7
Lepidokrokit, $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$	rhombisch hol.	2,20	0,57	96°	negativ	0,88	1,14	1
Methylbixin, $\text{C}_{22}\text{H}_{26}(\text{COOCH}_3)_2$	monoklin hol.	1,649	ca. 1,16	$66\frac{1}{2}^{\circ}$	positiv	0,89	ca. 1,59	8

Literatur zu Tabelle 1:

1. Nach P. NIGOLI, Lehrbuch der Mineralogie (2. Aufl. 1926), II, Spezielle Mineralogie.
2. H. A. KLASSENS et P. TERPSTRA, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas 56 (1937), 673.
3. E. G. COX and T. H. GOODWIN, Journ. Chem. Soc. London 1936, 769; NIGOLI, E., Schweiz. Min. Petr. Mitt. 22 (1942), 189.
4. A. SCHRAUF, Z. Krist. 18 (1891), 113; A. CAVINATO, nach Neues Jahrbuch f. Mineralogie, Referate 1935, I, 24.
5. S. BHAGAVANTAM, Proc. Roy. Soc. London (A) 126 (1929), 143.
6. H. DUFET, Bull. Soc. Franç. de Min. 24 (1901), 118; Verbindung mit einer für jene Zeit unerhört hohen Doppelbrechung.
7. E. G. COX, T. H. GOODWIN and A. J. WAGSTAFF, Proc. Roy. Soc. London (A) 157 (1936), 399.
8. H. WALDMANN und E. BRANDENBERGER, Z. Krist. 82 (1932), 77.

Auch die einer Messung leicht zugänglichen Hauptdoppelbrechungen lassen sich — wie z. B. in den BOLDIREW'schen Tafeln — direkt für die Bestimmung des Achsenwinkels verwenden, allerdings unter der Voraussetzung, dass n_β bekannt ist. Gegeben seien beispielsweise $(n_\beta - n_\alpha)$, $(n_\gamma - n_\alpha)$ und n_β . Man bestimmt mittels Division durch n_β die relativen Doppelbrechungen $(n_\beta - n_\alpha)/n_\beta = (1 - A)$ und $(n_\gamma - n_\alpha)/n_\beta = (C - A)$. Den Wert A sucht man auf der linken Koordinatenachse des Achsenwinkelfeldes auf, die Grösse $(C - A)$ innerhalb dieses Feldes auf den von links nach rechts verlaufenden (punktierten) Kurven gleicher Gesamtdoppelbrechung. Im Schnittpunkt der Ordinate von A mit der Kurve $(C - A)$ liest man den gesuchten Achsenwinkel ab. — Ist n_β nicht bekannt, so kann das Verfahren mit einer als wahrscheinlich angenommenen Zahl für den mittleren Brechungsindex als Näherungsrechnung durchgeführt werden. Unter dieser Voraussetzung erhält man aber systematische Fehler, welche den bei den MALLARD'schen Näherungsformeln bekannten ganz analog sind: Bei Achsenwinkeln um 90° werden die Abweichungen vom richtigen Wert am grössten.

Gegeben sei n_β , eine Hauptdoppelbrechung, z. B. $(n_\gamma - n_\alpha)$ und der Achsenwinkel; gesucht werden n_α und n_γ . Man bestimmt wiederum die relative Doppelbrechung, in diesem Falle $(C - A)$ und sucht für diesen Wert und $2V$ im Achsenwinkelfeld das zugehörige Achsenverhältnis der Indicatrix auf. Von dort aus findet man in Umkehrung des im 1. Beispiel beschriebenen Verfahrens unter Verwendung des bekannten Wertes von n_β die gesuchten Grössen n_α und n_γ .

Konstruktionsgrundlage für die Aufstellung des Achsenwinkeldiagrammes in anderem Masstab

Das auf der Tafel dargestellte Diagramm eignet sich zur allgemeinen Orientierung über optische Verhältnisse sowie zur Verwendung mit sehr hoch doppelbrechenden Substanzen. Für den Gebrauch bei mittel bis niedrig doppelbrechenden Kristallen müssen sowohl das Achsenverhältnis der Indicatrix als auch die einzelnen Brechungsindices wesentlich genauer bestimmt werden können, als dies hier der Fall ist. Die meisten natürlich vorkommenden Mineralien besitzen Doppelbrechungen bis 0,1 absolut, das entspricht 0,05—0,07 relativ. Ausschlaggebend für das Kurvenblatt ist die richtige Wahl des Abstandes auf der Abszissenachse von $C = 1$ bis $C = \infty$. Diese Strecke sollte für ein den gestellten Anforderungen genügendes Diagramm etwa 1000 mm betragen. Weiter ist es zweckmässig, den Abstand von $n^2 = 0$ bis $n^2 = 4$ mindestens gleich gross, eher noch grösser zu wählen. Für den benötigten Ausschnitt auf der Abszissenachse, z. B. für ein Achsenverhältnis der Indicatrix $A = 0,900$ bis $C = 1,150$, müssen die zur Konstruktion des Diagrammes notwendigen Grössen $1/A^2$ und $1/C^2$ in Abstufungen von 0,010 berechnet werden. Die Art dieser Berechnung sei hier angedeutet unter der Annahme, dass der Einheitsabstand $C = 1$ bis $C = \infty$ 1000 mm betrage, siehe Tabelle 2.

Falls der Masstab so gross gewählt worden ist, dass der Nullpunkt des Feldes der Brechungsindices nicht mehr auf der Zeichnungsfläche liegt, so muss das nach diesem Punkt zusammenlaufende Strahlenbündel gesondert berechnet werden: Für jeden dieser einen konstanten Brechungsindex darstellenden Strahlen ist ein Punkt festgelegt auf der

Ordinatenachse N. Einen weiteren Punkt muss man durch Rechnung ermitteln. Dazu wird für einen bestimmten Wert von n_β der Schnittpunkt des gesuchten Strahles mit dieser Horizontalen als Punkt von bestimmtem Achsenverhältnis der Indicatrix gesucht. Für den Strahl X heisst die Lösung $n_x^2/n_\beta^2 = 1/C_x^2$ oder $1/A_x^2$, je nachdem n_x grösser oder kleiner als n_β ist. Der so gefundene Wert des Achsenverhältnisses der Indicatrix wird in die oben abgeleitete Reihe von $1/C^2$ und $1/A^2$ eingeordnet. — Die nach n^2 geteilte Ordinatenachse kann für den praktischen Gebrauch insofern

Tabelle 2

		Abstände in Millimetern		
		a) von der Null-Linie aus	b) von der Ordin.-Achse A=C=1 aus ⁸⁾	Differenzen
		mm	mm	mm
A = 0,900	$1/A^2 = (1/0,900)^2 = 1,2346$	1234,5	- 234,5	
...	
0,950	$(1/0,950)^2 = 1,1080$	1108,0	- 108,0	23,0
0,960	$(1/0,960)^2 = 1,0851$	1085,0	- 85,0	22,5
0,970	$(1/0,970)^2 = 1,0628$	1062,5	- 62,5	21,5
0,980	$(1/0,980)^2 = 1,0412$	1041,0	- 41,0	21,0
0,990	$(1/0,990)^2 = 1,0203$	1020,0	- 20,0	20,0
A = C = 1,000	$1/A^2 = 1/C^2 = (1/1,000)^2 = 1,0000$	1000,0	0,0	20,0
C = 1,010	$1/C^2 = (1/1,010)^2 = 0,9803$	980,0	+ 20,0	19,0
1,020	$(1/1,020)^2 = 0,9612$	961,0	+ 39,0	18,5
1,030	$(1/1,030)^2 = 0,9426$	942,5	+ 57,5	18,0
1,040	$(1/1,040)^2 = 0,9246$	924,5	+ 75,5	17,5
1,050	$(1/1,050)^2 = 0,9070$	907,0	+ 93,0	
...	
1,100	$(1/1,100)^2 = 0,8265$	826,5	+ 173,5	
...	
1,150	$(1/1,150)^2 = 0,7561$	756,0	+ 244,0	
...	
∞	$(1/\infty)^2 = 0,0000$	0,0	+ 1000,0	

in ihrer Länge verkürzt werden, als dieselbe Brechungsindex-Skala n_1 prinzipiell auch für Werte von $n_2 = 2 \cdot n_1$ verwendbar ist. Dies ist bedingt durch die Übereinstimmung der Ausdrücke $(2n_1)^2 = n_2^2$. Hierbei muss allerdings für die höheren Brechungsindices eine auf die Hälfte reduzierte Ablesegenauigkeit in Kauf genommen werden; die Bestimmung des Achsenverhältnisses der Indicatrix wird dagegen nicht beeinflusst. Will man diese doppelte Skala benutzen, so empfiehlt es sich, die Ordinate des Brechungsindex-Feldes von $n = 0,9$ bis $2,0$ zu berechnen, sie ist dann auch verwendbar für $n = 1,8$ bis $4,0$.

Die Unterteilung des Achsenwinkelfeldes bietet keine Schwierigkeiten; sie bleibt immer genau gleich. Man trägt in einem passend gewählten Abstand d vom Isotropiepunkt auf einer Senkrechten zur Koordinatenachse die Werte für $d \cdot \text{tg}^2 V$ in den gewünschten Abstufungen von V ab und zieht vom Nullpunkt aus die Strahlen. Man benötigt nur die Werte von tg^2 für $V = 0$ bis 45° , da rechte und linke Hälfte des Feldes symmetrisch eingeteilt sind.

⁸⁾ Minuszeichen bedeutet links von der Ordinatenachse oder $(1/A^2 - 1)$, Pluszeichen rechts davon $= (1 - 1/C^2)$.

Vom Feld der Brechungsindices wird noch die Einteilung der Abszissenachse auf die Koordinatenachsen des Achsenwinkelfeldes übertragen.

Die Kurven gleicher Gesamtdoppelbrechung müssen nachträglich konstruiert werden. Jede derselben ergibt sich als konstante Summe der auf den Koordinatenachsen vom Punkt der Isotropie aus abgetragenen Abstände $(1-A)$ und $(C-1)$, nämlich $(1-A) + (C-1) = (C-A) = \text{konstant}$.

Zusammenfassung

Aufbau und Handhabung eines Kurvenblattes werden beschrieben, welches gestattet, die Gleichung für den Winkel der optischen Achsen

$$\operatorname{tg}^2 V_\gamma = \frac{1/n_\alpha^2 - 1/n_\beta^2}{1/n_\beta^2 - 1/n_\gamma^2}$$

auf graphischem Wege zu lösen. Als konstruktive Grundlage sind unter der Bezeichnung „Achsenverhältnis der Indicatrix“ die relativen Brechungsindices $A = \frac{n_\alpha}{n_\beta}$ und $C = \frac{n_\gamma}{n_\beta}$ eingeführt worden. Daraus ergeben sich einerseits enge Beziehungen zwischen der kristallmorphologischen und der optischen Betrachtungsweise, andererseits entsteht daraus ein für die Erläuterung der Zusammenhänge in der Indicatrix sehr anschauliches Diagramm. Die vielseitige Verwendbarkeit desselben wird an einigen Beispielen hoch doppelbrechender anorganischer und organischer Verbindungen erläutert.

Herrn Prof. Dr. P. NIGGLI danke ich für seine wohlwollende Förderung dieser Untersuchungen.

Literatur

1. BOLDIREW, A. K., zit nach W. W. NIKITIN, *La méthode universelle de FEDOROFF*, Traduction française par L. DUPARC et V. DE DERVIES (1914), Tome II, p. 389 ff. et planches VII et VIII.
2. LANE, J. H., jr. and SMITH, H. T. U., *Amer. Mineralogist* **23** (1938), 457.
3. NIGGLI, P., *Lehrbuch der Mineralogie* (2. Aufl., 1926), II. Teil: Spezielle Mineralogie, S. 220 und 317.
4. — *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie* (3. Aufl., 1942), Teil II, Kristalloptik und Strukturbestimmung, S. 811.
5. POCKELS, F., *Lehrbuch der Kristalloptik* (1906).
6. RÖSCH, S. und STÜRENBURG, M., *Ztschr. f. Kristallographie* **65** (1927), 588.
7. SMITH, H. T. U., *Amer. Mineralogist* **22** (1937), 675.
8. WRIGHT, F. E., *The Methods of Petrogr.-Microsc. Research* (1911), Washington, Plate 9.

Eingegangen: 28. Juni 1945.

Graphische Auswertung der Achsenwinkel-Gleichung

