

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie
Band: 43 (1963)
Heft: 1: Festschrift Robert L. Parker : zu seinem 70. Geburtstag : 1. Mai 1963

Artikel: Zur Topologie, Metrik und Symmetrie der einfachen Kristallformen
Autor: Niggli, Alfred
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33435>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Topologie, Metrik und Symmetrie der einfachen Kristallformen

Von *Alfred Niggli* (Zürich)¹⁾

Mit 3 Tabellen

Zusammenfassung

Die einfachen Kristallformen werden vom topologischen, metrischen und symmetrischen Standpunkt aus charakterisiert. Dabei zeigt sich, dass es

- 30 topologisch verschiedene Formen, wovon 17 geschlossene und 13 offene,
- 47 metrische Sorten der Kristallformen nach B. DELAUNAY (+ 9 mit kristallographischer Symmetrie verträgliche nichtkristallographische Formen), wovon 30 (+ 5) geschlossene und 17 (+ 4) offene,
- 164 (+ 16) Symmetriefälle einfacher Formen, wovon 75 (+ 6) geschlossene und 89 (+ 10) offene

gibt. Am Rande werden auch die nichtkristallographischen Formen endlicher Flächenzahl behandelt.

Abstract

The simple crystal-forms are characterized with respect to the topology, metrics and symmetry viewpoints. There are

- 30 topologically different forms, whereof 17 closed and 13 open ones;
- 47 metric kinds of crystal forms after B. DELAUNAY (+ 9 non-crystallographic forms, compatible with crystallographic symmetry), whereof 30 (+ 5) closed ones and 17 (+ 4) open ones;
- 164 (+ 16) symmetry cases of simple forms, whereof 75 (+ 6) closed ones and 89 (+ 10) open ones.

Incidentally, the non-crystallographic forms with finite number of faces are mentioned as well.

1. Einleitung

Die Bemerkung von B. DELAUNAY in seinem an der Münchener Gedenktagung „Fünfzig Jahre Röntgeninterferenzen“ 1962 verlesenen Referat, dass es 47 einfache Kristallformen gebe, regte den Verfasser dazu an, diese jedem Kristallographen geläufigen Formen einmal näher vom Standpunkt der Topologie, der Metrik und der Symmetrie zu betrachten.

¹⁾ Institut für Kristallographie und Petrographie der Eidgenössischen Technischen Hochschule und der Universität Zürich.

		8	3	12	6	8	6	4 ³	
15.1	tetr. Skalenoeder								Hexaeder
15.2	orthorhomb. Bipyramide								tetr. Antiprisma
15.3	tetr. Bipyramide								(reg. Zwölfeck)
15.4	Oktaeder								(reg. Zwölfeck)
16.1	tetr. Trapezoeder	8	4	16	8	2		3 ³ .4	abgestumpftes Tetraeder
16.2	(tetr. Streptoeder)								hex. Prisma
17.1	dihex. Prisma	12		12				0	Kubooktaeder
17.2	(dodekag. Prisma)								hex. Antiprisma
18.1	dihex. Pyramide	12		12				1	
18.2	(dodekag. Pyramide)							1	
19	Triakistetraeder	12	3	18	4		4	8	
20.1	ditrig. Skalenoeder	12	3	18	6		2	8	
20.2	ditrig. Bipyramide								
20.3	hex. Bipyramide								
21.1	Deltoiddodekaeder	12	4	24	8	6		14	
21.2	Rhombendodekaeder							(3.4) ²	
22.1	hex. Trapezoeder	12	4	24	12		2	14	
22.2	(hex. Streptoeder)							3 ³ .6	
23.1	tetraedr. Pentagondodekaeder	12	5	30	20			20	
23.2	Pentagondodekaeder							3 ⁵	
23.3	(Dodekaeder)								
24.1	ditetr. Bipyramide	16	3	24	8		2	10	
24.2	(oktag. Bipyramide)							4 ² .8	
25.1	dihex. Bipyramide	24	3	36	12			2	
25.2	(dodekag. Bipyramide)							14	
26	Triakisoktaeder	24	3	36	8		6	14	
27.1	Hexakistetraeder	24	3	36	6		8	14	
27.2	Tetrakishehexaeder	24	3	36	6		8	14	
28.1	Dyakisdodekaeder	24	4	48	8	18		26	
28.2	Deltoidlikositetraeder							3.4 ²	
29	Pentagonikositetraeder	24	5	60	32	6		38	
30	Hexakisoktaeder	48	3	72	12	8	6	26	

Topologisch sind die einfachen Kristallformen als Isoeder, das heisst isoedrische Polyeder (mit kongruenten oder spiegelbildlichen Flächen) der zweidimensionalen Sphäre äquivalent; darüber hinaus sind Formen, die sich — unter Beibehaltung der Anordnung von Ecken, Kanten und Flächen — durch irgendwelche Deformation ineinander überführen lassen, topologisch gleich, was zum Beispiel für das trigonale Trapezoeder, das Rhomboeder und den Würfel zutrifft.

Für den Begriff der *metrischen* „Sorte“ hat DELAUNAY folgende Definition gegeben: Sei $\{S\}$ eine reguläre Teilung und G eine beliebige topologische oder metrische Gruppe der Abbildungen von $\{S\}$ auf sich selbst, die bezüglich der Teilung transitiv ist. Zwei Paare $\{S, G\}$ und $\{S', G'\}$ gehören dann zu derselben „Sorte“, wenn

- die Teilungen $\{S\}$ und $\{S'\}$ topologisch gleich sind;
- die Gruppen G und G' isomorph sind;
- die Gruppen mit ihren Teilungen gleich verbunden sind, das heisst: führt $g \in G$ ein Element der Teilung $\{S\}$ in ein gewisses anderes Element über, so führt das entsprechende g' aus G' die entsprechenden Elemente von $\{S'\}$ ineinander über.

An Beispielen für diesen metrischen Sortenbegriff gibt DELAUNAY einmal eben die 47 einfachen Kristallformen, sodann die den 14 BRAVAIS-Gittern entsprechenden 24 metrischen Sorten der DIRICHLETSchen Teilungen für dreidimensionale Gitter und schliesslich die 46 fundamentalen metrischen Sorten der 11 LAVESSchen (topologisch verschiedenen, isogonalen) Ebenenteilungen.

Der *symmetrische* Gesichtspunkt ist dem Kristallographen wiederum vertraut; er behandelt die Möglichkeit des Auftretens der Formen in den verschiedenen Kristallklassen, wobei einerseits die Flächensymmetrien entscheidend werden und andererseits sowohl Spezialformen wie Grenzformen zu berücksichtigen sind.

2. Topologie der einfachen Formen

Aus der linken Hälfte der *Tabelle 1.1* geht hervor, wie sich die 47 einfachen Kristallformen sowie die 9 (in Klammern geschriebenen) durch Spezialisierung aus ihnen hervorgehenden nichtkristallographischen Formen in 30 durch entsprechende Nummern bezeichnete topologische Fälle gliedern. Für die topologische Kennzeichnung wurden folgende Symbole verwendet:

F = Flächenzahl (Zähligkeit der Form)	E = Eckenzahl
ϕ = Eckenzahl einer Fläche	e_q = Zahl der Ecken, in denen
K = Kantenzahl	q Kanten zusammenlaufen

Das topologische Symbol führt in Produktform auf, wieviele q -kantigen Ecken eine Fläche besitzt.

Zu den isoedrischen Polyedern der einfachen Formen sind die — für den höchstsymmetrischen Fall in der rechten Hälfte der Tabelle 1.1 angegebenen — isogonalen Polyeder dual oder polar, bei denen nun nicht mehr die Flächen kongruent oder spiegelbildlich sind, dafür aber die Büschel der in den Ecken zusammenlaufenden Kanten. Hier sind die zu den offenen Kristallformen dualen null- bis zweidimensionalen Figuren in Klammern geschrieben. Wegen der Symmetrie der EULERSchen Polyederformel $E - K + F = 2$ in E und F ist in der topologischen Kennzeichnung der isogonalen Polyeder die Bedeutung von E und F vertauscht; ϕ zeigt nun, wieviele Kanten in einer Ecke zusammenlaufen, und die e_q sind die Anzahlen der q -eckigen Flächen.

Die *Tabelle 1.2* enthält analoge Angaben über die einfachen nichtkristallographischen Formen, die durch eine endliche Zahl von Ebenen begrenzt werden.

3. Metrik der einfachen Formen

Die metrischen Sorten, das heisst die eigentlichen einfachen Formen, sind schon in den Tabellen 1.1 und 1.2 aufgeführt. Die *Tabelle 2* zeigt am Beispiel der geschlossenen kristallographischen Formen, wie die 17 topologischen Fälle in 30 kristallographische und 5 nichtkristallographische, aber mit kristallographischer Symmetrie verträgliche Formen aufspalten. Entsprechende Überlegungen lassen sich leicht auch für offene oder nichtkristallographische Formen anstellen. Erwähnt sei noch, dass die in der Kristallographie übliche Benennung der Formen mit nur zwei Ausnahmen ein-eindeutig den metrischen Sorten entspricht: vom Standpunkt der Metrik sind Sphenoid und Doma einerseits, monoklines und orthorhombisches Prisma andererseits eine und dieselbe Form.

Interessant sind die Übergänge zu nichtkristallographischen Formen als Spezial- oder Grenzformen im Rahmen kristallographischer Symmetrie: das Pentagondodekaeder (Nr. 23.2) wird bei geeigneter, allerdings irrationaler Wahl der Indizes regulär wie im Falle ikosaedrischer Symmetrie, und die Vortäuschung $2n$ -gonaler Symmetrie durch an sich n -gonale Formen ist häufig zu beobachten. Eine riesige Fülle von Möglichkeiten würde sich ferner aus der Vortäuschung von Formen durch Kombinationen niedrigerzähliger Formen ergeben, wie das bei Pseudosymmetrie oft der Fall ist: so lässt sich etwa das Ikosaeder als Kombination von Oktaeder und geeignetem (wiederum irrational zu indizierendem) Pentagondodekaeder auffassen, und schliesslich liessen sich alle

Tabelle 2. *Metrische Sorten der geschlossenen einfachen Kristallformen*

Fall I	allgemeines Dreieck (3 Bestimmungsstücke)
Fall II	gleichschenkliges Dreieck (2 Bestimmungsstücke)
Fall III	gleichseitiges Dreieck (1 Bestimmungsstück)
Fall IV	Viereck mit 2 gleichen Seiten (4 Bestimmungsstücke)
Fall V	Deltoid (3 Bestimmungsstücke)
Fall VI	Rhombus (2 Bestimmungsstücke)
Fall VII	Quadrat (1 Bestimmungsstück)
Fall VIII	Fünfeck mit 2 + 2 gleichen Seiten (5 Bestimmungsstücke)
Fall IX	Fünfeck mit Spiegelgerader (4 Bestimmungsstücke)
Fall X	reguläres Fünfeck (1 Bestimmungsstück)

Fall relat. Bestim- mungsstücke	$\phi = 3$			$\phi = 4$				$\phi = 5$		
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	2	1	0	3	2	1	0	4	3	0
Nr. 8	8.1	8.2	8.3							
11		11								
12				12.1		12.2	12.3			
15	15.1									
	15.2	15.3	15.4							
16				16.1	16.2					
19		19								
20	20.1									
	20.2	20.3								
21					21.1	21.2				
22				22.1	22.2					
23								23.1	23.2	23.3
24	24.1	24.2								
25	25.1	25.2								
26		26								
27	27.1	27.2								
28				28.1	28.2					
29								29		
30	30									

Formen aus Pedien aufbauen, doch fällt all das nicht mehr unter das betrachtete Thema der einfachen Formen.

Die Tabelle 2 zeigt auch die 10 (römisch numerierten) Gestaltfälle der die geschlossenen Formen begrenzenden Drei-, Vier- und Fünfecke mit den Anzahlen der notwendigen Bestimmungsstücke; weil es dabei ja nicht auf die absolute Grösse ankommt, ist die Zahl der relativen Bestimmungsstücke jeweils um 1 niedriger. Als metrisches Merkmal

[illegible]

findet diese Anzahl ihre Entsprechung in der Zahl der zur kristallographischen Beschreibung einer Form erforderlichen Parameter, die sich aus relativen Konstanten des Bezugssystems (Achsenverhältnisse und freie Achsenwinkel, also 0 bei kubischer bis 5 bei trikliner Symmetrie), aus Freiheitsgraden der Form oder aus den Verhältnissen der linear-unabhängigen, nichtverschwindenden Flächenindizes zusammensetzen.

4. Symmetrie der einfachen Formen

Die *Tabelle 3*, die keiner weiteren Erläuterung bedarf, stellt dar, in welchen Kristallklassen die mit denselben Nummern wie in *Tabelle 1.1.* bezeichneten einfachen Formen auftreten können; die dabei erscheinenden Flächensymmetrien sind mit Buchstaben, im Falle von Grenzformen mit kleinen Buchstaben, angegeben. Pseudosymmetrien sind berücksichtigt: so können etwa das tetragonale Bisphenoid (Nr. 8.2) und sogar das Tetraeder (Nr. 8.3) als Grenzformen des orthorhombischen Bisphenoids (Nr. 8.1) mit geeigneten, eventuell irrationalen Indizes in der Kristallklasse $222-D_2$ vorgetäuscht werden.

Eine einfache Abzählung ergibt, dass zu den 164 Symmetriemöglichkeiten der kristallographischen Formen noch 16 Fälle von an sich nicht-kristallographischen, aber mit kristallographischer Symmetrie verträglichen Formen hinzukommen; alle diese Möglichkeiten verteilen sich auf 32 allgemeine Formen (Flächensymmetrie $1-C_1$), 67 Spezialformen (Flächensymmetrien $m-C_8$, $2-C_2$, $2\text{ mm}-C_{2v}$, $3-C_3$, $3\text{ m}-C_{3v}$, $4-C_4$, $4\text{ mm}-C_{4v}$, $6-C_6$ und $6\text{ mm}-C_{6v}$), 64 allgemeine Grenzformen (Flächensymmetrie $1-C_1$) und 17 spezielle Grenzformen (Flächensymmetrie $m-C_8$).

Wiederum wären analoge Überlegungen leicht auch für die nicht-kristallographischen Symmetrien anzustellen.

5. Zusammenstellung der Ergebnisse

Die in topologischer, metrischer und symmetrischer Hinsicht gefundenen Anzahlen der geschlossenen und offenen, einfachen kristallographischen Formen seien abschliessend nochmals zusammengestellt; dabei sind wieder die an sich nichtkristallographischen, aber mit kristallographischer Symmetrie verträglichen Formen in Klammern aufgeführt:

	geschlossen	offen	total
topologisch	17	13	30
metrisch	30 (+ 5)	17 (+ 4)	47 (+ 9)
symmetrisch	75 (+ 6)	89 (+ 10)	164 (+ 16)

Manuskript eingegangen am 2. Januar 1963.