

Zeitschrift: Schweizerische mineralogische und petrographische Mitteilungen = Bulletin suisse de minéralogie et pétrographie
Band: 54 (1974)
Heft: 1

Artikel: Vereinfachte Berechnung der Euler-Winkel zur Charakterisierung der Plagioklasoptik
Autor: Burri, Conrad
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42186>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vereinfachte Berechnung der Euler-Winkel zur Charakterisierung der Plagioklasoptik

Von *Conrad Burri* (Zürich) *)

Mit 2 Figuren im Text

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie sich die Euler-Winkel zur Definition der optischen Orientierung der Plagioklase auf Grund der bekannten, schon von Euler selbst gegebenen Beziehungen zwischen Richtungscosinus und Euler-Winkeln, auf eine, gegenüber dem bisherigen Verfahren bedeutend vereinfachte Weise berechnen lassen. Die Methode wird am Beispiel des HT-Labradorites von Khuchiré (Iran) illustriert.

Summary

The calculation of the Eulerian Angles, as in use for defining the optical orientation of plagioclases, is much simplified by taking advantage of their interrelationship with the direction cosines, as already given by Euler himself. As an example a high-temperature labradorite from Khuchiré (Iran) is considered.

Das Problem der optischen Orientierung der Plagioklase lässt sich grundsätzlich auf dasjenige der gegenseitigen Orientierung zweier rechtwinkliger Koordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung zurückführen, eines kristallographisch-morphologischen und eines optischen. Für diese Art der Betrachtung erweisen sich die drei senkrecht aufeinander stehenden Zwillingsachsen (ZA) der drei Gesetze Roc Tourné, Albit und Karlsbad unmittelbar als gegebene Achsen des kristallographischen Systems OXYZ, wie die drei Hauptschwingungsrichtungen (Symmetrieachsen der Indikatrix) als solche des optischen Systems OX'Y'Z'.

Für das kristallographische System ist, angesichts der konventionellen Aufstellung der Plagioklase, die Zuordnung:

*) Adresse des Autors: Institut für Kristallographie und Petrographie ETHZ, Sonneggstrasse 5, CH-8006 Zürich.

$$\begin{aligned}
\text{ZA des Roc Tourné-Gesetzes } \perp [001]/(010) &= X \\
\text{ZA des Albit-Gesetzes } \perp (010) &= Y \\
\text{ZA des Karlsbad-Gesetzes } [001] = c &= Z
\end{aligned} \tag{1}$$

ohne weiteres gegeben. Im Gegensatz hierzu bestehen für das optische System drei Möglichkeiten der Zuordnung, welche sich durch zyklische Vertauschung aus einander ergeben, nämlich:

	I	II	III
X'	$[n_\beta]$	$[n_\gamma]$	$[n_\alpha]$
Y'	$[n_\gamma]$	$[n_\alpha]$	$[n_\beta]$
Z'	$[n_\alpha]$	$[n_\beta]$	$[n_\gamma]$

(2)

Die Achsen XYZ und X'Y'Z' der beiden Systeme bilden miteinander insgesamt 9 Winkel, welche jedoch nicht unabhängig von einander und daher nicht beliebig wählbar sind. Wie in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie bewiesen wird, bestehen zwischen ihnen 6 Beziehungsgleichungen, so dass nur drei der Winkel frei wählbar sind. Diese genügen ihrerseits um die gegenseitige Lage der beiden Systeme zu definieren. Anstatt jedoch aus den 9 Richtungswinkeln willkürlich deren drei auszuwählen, erweist es sich als vorteilhafter drei spezielle Winkel zu benützen, wie von EULER gezeigt wurde.

Bezeichnet man die Schnittgerade der beiden Koordinatenebenen XY (Z=0) und X'Y' (Z'=0) als Knotenlinie T, und schreibt man dieser willkürlich einen Richtungssinn zu, so sind die drei sog. Euler-Winkel wie folgt definiert (Fig. 1):

$$\phi = (+T, +X) \quad \psi = (+T, +X') \quad \theta = (+Z, +Z')$$

Die drei Winkel entsprechen drei Drehungen, durch welche das eine System in das andere übergeführt werden kann. Die Winkel bzw. Drehungen werden als positiv gewertet, wenn für einen in einem Punkt des positiven Astes der Drehachse situierten und gegen den Ursprung blickenden Beobachter die Drehung im positiven, d. h. Gegenuhreigersinn erfolgt¹⁾. Für weitere Einzelheiten sei auf die einschlägigen Lehrbücher verwiesen.

¹⁾ Dieser Anforderung wurde leider in den bisherigen Publikationen (BURRI 1956, 1968, 1972, PARKER 1961, BURRI-PARKER-WENK 1967) nicht streng Rechnung getragen. Gemäss Definition ist ϕ positiv zu rechnen, wenn +X durch eine positive Drehung in +T übergeführt wird. Für die gesamte Plagioklasreihe liegt jedoch T so, dass für die Überführung +X $\rightarrow$ +T eine *negative* Drehung (im Uhrzeigersinn) erforderlich ist (vgl. Fig. 1), so dass ϕ *negativ* zu nehmen ist. Analoge Überlegungen gelten in bezug auf die Euler-Winkel II für R und in bezug auf die Euler-Winkel III für D. Diese Korrekturen sind in erster Linie von Bedeutung für Berechnungen. Graphische Darstellungen, wie z. B. die Tafeln I–III in BURRI-PARKER-WENK (1967) behalten für die Plagioklasbestimmung ihre Brauchbarkeit uneingeschränkt bei.

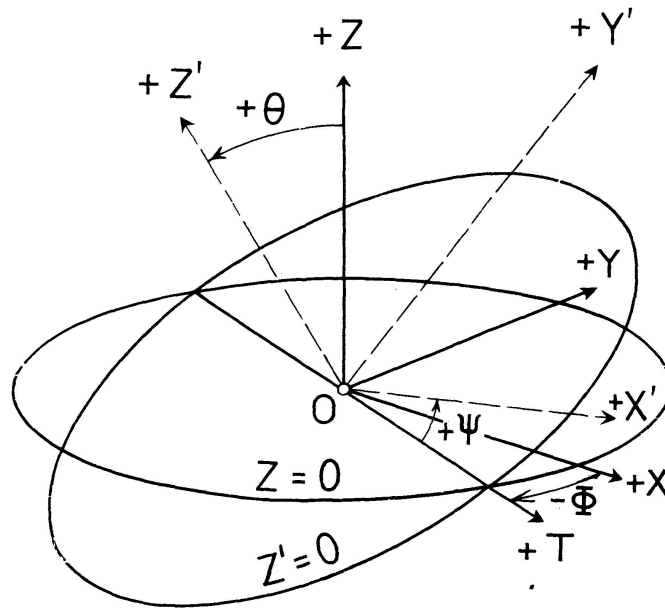


Fig. 1. Zur Definition der Euler-Winkel.

Bezeichnet man die $\cos$ (Richtungscosinus) der Winkel, welche X' mit X , Y , Z einschliesst, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, diejenigen für Y' mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, etc., so resultiert folgendes Schema der Richtungscosinus²⁾:

	X	Y	Z
X'	α_1	α_2	α_3
Y'	β_1	β_2	β_3
Z'	γ_1	γ_2	γ_3

(3)

Wie schon von EULER gezeigt wurde, lassen sich die 9 Richtungscosinus wie folgt in einfacher Weise durch die drei Euler-Winkel ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & \alpha_2 &= \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \alpha_3 &= \sin \psi \sin \theta \\
 \beta_1 &= -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta & \beta_2 &= -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta & \beta_3 &= \cos \psi \sin \theta \\
 \gamma_1 &= \sin \phi \sin \theta & \gamma_2 &= -\cos \phi \sin \theta & \gamma_3 &= \cos \theta
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

²⁾ Es sei darauf hingewiesen, dass gewisse Autoren gelegentlich eine abweichende Bezeichnungsweise verwenden, indem sie die $\cos$ der Winkel, welche X' mit X , Y , Z bildet mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnen, so dass ein Schema wie folgt resultiert:

	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

Im Vergleich zum erstgegebenen erscheint es an der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen gespiegelt, d. h. Spalten und Zeilen sind vertauscht.

Umgekehrt lassen sich die Euler-Winkel ϕ , ψ , θ durch die Richtungscosinus ausdrücken. Man erhält z. B.:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\sin \phi \sin \theta}{-\cos \phi \sin \theta} = -\operatorname{tg} \phi; \quad \frac{\alpha_3}{\beta_4} = \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi \sin \theta} = \operatorname{tg} \psi; \quad \gamma_3 = \operatorname{tg} \theta. \quad (5)$$

Da die betrachteten Richtungswinkel ihrerseits mit den sog. Fedorow-Winkeln (Kleinkreiskoordinaten in bezug auf das kristallographische System OXYZ) identisch sind, gemäss:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = \gamma_1 \\ F_y = \gamma_2 \\ F_z = \gamma_3 \end{array} \right\} [n_\alpha] = Z' \quad \left. \begin{array}{l} F_x = \alpha_1 \\ F_y = \alpha_2 \\ F_z = \alpha_3 \end{array} \right\} [n_\beta] = X' \quad \left. \begin{array}{l} F_x = \beta_1 \\ F_y = \beta_2 \\ F_z = \beta_3 \end{array} \right\} [n_\gamma] = Y'$$

wenn man vorerst nur Fall I von (2) in Betracht zieht. Da diese Fedorow-Winkel bei den U-Tisch-Untersuchungen als rohe Messwerte erhalten werden, welche nötigenfalls noch ausgeglichen werden können, ergibt sich hiermit eine neue Möglichkeit zur Berechnung der Euler-Winkel bei mikroskopischen Plagioklasuntersuchungen. Die Methode ist gegenüber der früher gegebenen Vektormethode (BURRI 1972) zwar bedeutend weniger anschaulich, zeichnet sich aber durch einen weit geringeren Rechenaufwand aus.

Beispiel

Das Verfahren sei am Beispiel des HT-Labradorites An_{62} , aus Andesit von Khuchiré (Iran) illustriert. Da dessen optische Orientierung bereits früher, sowohl nach der sphärisch-trigonometrischen (BURRI 1968), wie nach der vektoriellen Methode (BURRI 1972) aus U-Tischmessungen ermittelt wurde, lassen sich die Resultate unmittelbar vergleichen.

Berechnung der Euler-Winkel I, entsprechend Fall I von (2).

Auf Grund der früher gegebenen, ausgeglichenen Messwerte (BURRI 1972, 511–512) ergibt sich das Schema der Richtungskoeffizienten wie folgt:

	X = $\perp$ [001]/(010)	Y = $\perp$ (010)
X' = $[n_\beta]$	$\alpha_1 = 0,82555 = \cos 34,36^\circ$	$\alpha_2 = -0,47976 = -\cos 61,33^\circ$
Y' = $[n_\gamma]$	$\beta_1 = 0,29705 = \cos 72,72^\circ$	$\beta_2 = 0,81716 = \cos 35,20^\circ$
Z' = $[n_\alpha]$	$\gamma_1 = -0,47984 = -\cos 61,32^\circ$	$\gamma_2 = -0,31949 = -\cos 71,37^\circ$
	Z = [001]	
X' = $[n_\beta]$	$\alpha_3 = 0,29721 = \cos 72,71^\circ$	
Y' = $[n_\gamma]$	$\beta_3 = 0,49397 = \cos 60,40^\circ$	
Z' = $[n_\alpha]$	$\gamma_3 = 0,81712 = \cos 35,20^\circ$	

Auf Grund von (5) erhält man (vgl. Fig. 2.I):

$$\left. \begin{array}{ll} \operatorname{tg} \phi = -\gamma_1/\gamma_2 = -1,50189 & \phi = -56,3^\circ \\ \operatorname{tg} \psi = \alpha_3/\beta_3 = 0,60168 & \psi = 31,0^\circ \\ \cos \theta = \gamma_3 = 0,81712 & \theta = 35,2^\circ \end{array} \right\} \text{Euler-Winkel I}$$

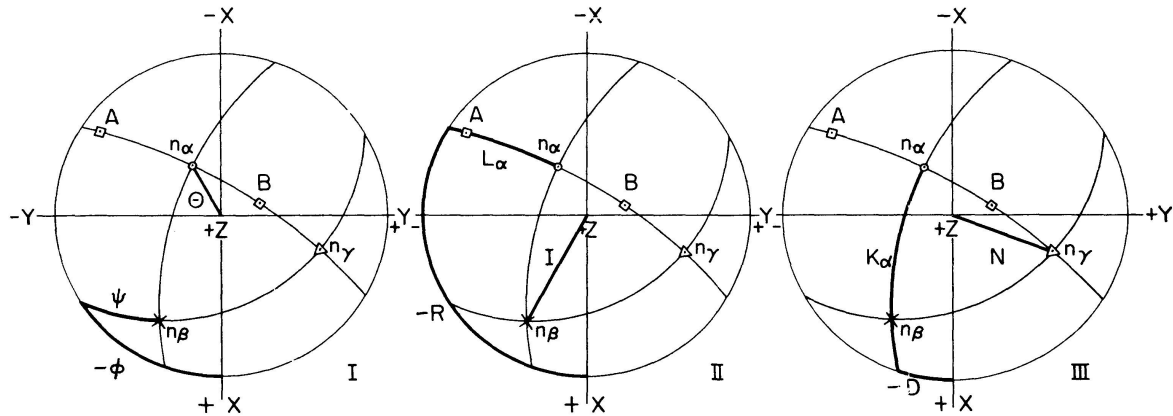


Fig. 2. Optische Orientierung von HT-Labradorit An_{62} . Stereographische Projektionen auf die Ebene $\perp c$ mit Angabe der Euler-Winkel I-III.

Was die Positionen der optischen Achsen anbelangt, so muss entweder nach dem früher gegebenen vektoriellen Verfahren (BURRI 1972) vorgegangen werden, oder es müssen die Euler-Winkel II (PARKER 1961) benutzt werden, entsprechend Fall II von (2). Für diesen erhält man als Schema der Richtungs-cosinus:

	X	Y	Z
$X' = [n_\gamma]$	$\alpha_1 = 0,29705$	$\alpha_2 = 0,81716$	$\alpha_3 = 0,49397$
$Y' = [n_\alpha]$	$\beta_1 = -0,47984$	$\beta_2 = -0,31949$	$\beta_3 = 0,81712$
$Z' = [n_\beta]$	$\gamma_1 = 0,82555$	$\gamma_2 = -0,47976$	$\gamma_3 = 0,29721$

Wiederum nach (5) erhält man $-\operatorname{tg} R = \gamma_1/\gamma_2 = -1,72076$, woraus $R_1 = 59,8^\circ$ und $R_2 = 239,8^\circ$. Der zweite Wert entspricht in bezug auf $+X$ einem Winkel von $R = -120,2^\circ$, in Übereinstimmung mit Fig. 2.II.

$\operatorname{tg} L = \alpha_3/\beta_3 = 0,60453$, woraus $L = 31,1^\circ$. Wie aus Fig. 2.II hervorgeht, gilt dieser Wert für L_γ , so dass $L_\alpha = 90^\circ - L_\gamma = 58,9^\circ$.

$\cos I = \gamma_3 = 0,29721$, woraus $I = 72,7^\circ$.

$$\left. \begin{array}{ll} R = -120,2^\circ \\ L_\alpha = 58,9^\circ \\ I = 72,2^\circ \end{array} \right\} \text{Euler-Winkel II}$$

Für den Fall III von (2), d. h. für die Euler-Winkel III nach PARKER, lautete das Schema der Richtungs-cosinus:

	X	Y	Z
$X' = [n_\alpha]$	$\alpha_1 = -0,47984$	$\alpha_2 = -0,31949$	$\alpha_3 = 0,81712$
$Y' = [n_\beta]$	$\beta_1 = 0,82555$	$\beta_2 = -0,47976$	$\beta_3 = 0,29721$
$Z' = [n_\gamma]$	$\gamma_1 = 0,29705$	$\gamma_2 = 0,81716$	$\gamma_3 = 0,49397$

Für diesen Fall wird:

$-\text{tg } D = \gamma_1/\gamma_2 = 0,36352$, woraus $D = -20,2^\circ$, in Übereinstimmung mit Fig. 2.III.
 $\text{tg } K = \alpha_3/\beta_3 = 2,74930$, woraus $K = 70,0^\circ$.

Wie die Figur zeigt, gilt dieser Wert für den im hinteren, II. Quadranten gelegenen Schnittpunkt der betrachteten Zone mit dem Grundkreis. In bezug auf den vorderen, im IV. Quadranten gelegenen Schnittpunkt gilt somit $K_\alpha = 180^\circ - 70,0^\circ = 110,0^\circ$.

$\cos N = \gamma_3 = 0,49397$, woraus $N = 60,4^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} D = -20,2^\circ \\ K_\alpha = 110,0^\circ \\ N = 60,4^\circ \end{array} \right\} \text{Euler-Winkel III}$$

Sämtliche für die Euler-Winkel I–III hier gegebenen Werte sind mit den früher sphärisch-trigonometrisch oder vektoriell ermittelten (BURRI 1968, 1972) identisch.

Zitierte Literatur

- BURRI, C. (1956): Charakterisierung der Plagioklasoptik durch drei Winkel und Neuentwurf des Stereogramms der optischen Orientierung für konstante Anorthit-Intervalle. Schweiz. Min. Petr. Mitt. 36, 539–592.
- BURRI, C. (1968): Die optische Orientierung von HT-Labradorit aus Andesit von Khuchiré (Iran), zugleich ein Beitrag zur U-Tischmethodik. Ibid. 48, 781–801.
- BURRI, C., PARKER, R. L. und WENK, E. (1967): Die optische Orientierung der Plagioklasse. Basel, Birkhäuser.
- BURRI, C. (1972): Zur Definition und Berechnung der optischen Orientierung von Plagioklassen. Schweiz. Min. Petr. Mitt. 52, 497–514.
- PARKER, R. L. (1961): Betrachtung über die Wahl von Winkeln zur Charakterisierung der Plagioklasoptik. Ibid. 41, 433–442.

Manuskript eingegangen am 8. Februar 1974.